Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ВТОРОГО РОДА В ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. И. Баренблатт, Г. И. Сивашинский

(Москва)

Исследуется задача о распространении сильных ударных волн при условии, что значение показателя адиабаты γ_1 в условиях на ударной волне отличается от значения этого показателя γ в дифференциальных уравнениях, описывающих область непрерывного движения за волной. Такая схема при $\gamma_1 < \gamma$ дает возможность приближенного качественного учета затрат энергии на диссоциацию, ионизацию и возбуждение колебательных степеней свободы молекул. Решение задачи сводится к построению автомодельного решения второго рода.

Автомодельные решения второго рода характеризуются тем, что показатели степени в выражениях автомодельных переменных для них получаются не из соображений размерности, а находятся как некоторые собственные значения из условия существования решения в целом [1]. Как было показано в [2], решения второго рода возникают следующим образом.

Автомодельные решения вообще представляют собой асимптотические представления решений более общих, неавтомодельных задач. Они могут быть получены из неавтомодельных решений путем определенных предельных переходов при стремлении к нулю или бесконечности некоторых безразмерных комбинаций $\xi, \eta\ldots$, включающих независимые переменные и постоянные параметры задачи. Если соответствующие пределы существуют и конечны, то предельной задаче отвечает автомодельное решение первого рода.

Если же конечного предела не существует, но неавтомодельное решение при $\xi, \eta \to 0$ имеет асимптотику одного из двух «степенных» видов

$$\eta^\alpha f(\xi), \qquad \eta^\alpha f(\xi / \eta^\beta) \tag{0.1}$$

где α, β — некоторые постоянные, то предельной задаче отвечает автомодельное решение второго рода.

Показатели α, $\beta\ldots$ остаются в предельной задаче в виде своеобразного следа того неавтомодельного решения, из которого путем предельного перехода получается автомодельное — отсюда и возникают неопределяемые из соображений размерности показатели степени автомодельной переменной. Этот след исчезает в случае регулярного предельного перехода, т. е. для автомодельных решений первого рода. Существенно, чтобы нерегулярность предельного перехода была неустранимой, например при помощи законов сохранения; в противном случае преобразованием безразмерных переменных автомодельное решение может быть получено как решение первого рода.

В работе [2] был использован пример задачи неустановившейся фильтрации, для которого при одном значении входящего в задачу параметра получалось автомодельное решение первого рода, для всех остальных — второго; при этом асимптотика неавтомодельного решения принадлежит к типу первого соотношения (0.1). Подобная же ситуация возникает и в задаче, рассматриваемой в предлагаемой статье, однако для этого случая асимптотика неавтомодельного решения принадлежит к типу второго соотношения (0.1). Здесь исследуется задача о распространении сильных ударных волн, однако в отличие от известной постановки задачи о сильном взрыве, впервые опубликованной Л. И. Седовым в работе [3] (см. также [1, 4, 5, 6, 7]) принимается, что значение показателя адиабаты в условиях на ударной волне γ_1 отличается от значения этого показателя γ в дифференциальных уравнениях, описывающих область непрерывного движения за волной.

Такая схема при $\gamma_1 < \gamma$ дает возможность приближенного качественного учета затрат энергии на диссоциацию, ионизацию и возбуждение колебательных степеней свободы молекул в некоторой промежуточной области распространения сильной взрывной волны (ср. [8]). По-видимому, в задаче о распространении сильных взрывных волн в атмосфере, содержащей мелкие частицы пыли и капли воды (например, в облаке) также может оказаться целесообразным учитывать различие показателей адиабаты на скачке и в непрерывной части потока, поскольку частички пыли или водяные капли уносятся ударной волной, сгорают или испаряются на ней.

В связи с рассматриваемой задачей следует упомянуть работы О. С. Рыжова и Г. И. Таганова [9], В. П. Коробейникова [10] и С. И. Сидоркиной [11]. В частности С. И. Сидоркина [11] (см. также [5]) рассматривала распространение сильного взрыва в аэрозолях, сводя эту задачу к исследованию распространения сильных ударных волн при политропическом режиме, когда показатели политропы на ударной волне и в непрерывной части потока берутся равными между собой, но не равными показателю адиабаты Пуассона для газа. Принципиальное отличие предлагаемой работы от рассмотренных в [9–11] задач состоит в том, что наличие в этих задачах интеграла энергии приводит к автомодельным решениям первого рода.

Для полноты рассматриваются случаи $\gamma_1 < \gamma$ и $\gamma_1 > \gamma$. Получающееся семейство решений описывает непрерывную совокупность движений, включающую обычный сильный взрыв и распространение сильных детонационных волн.

§ 1. Рассмотрим вначале следующую неавтомодельную задачу. В безграничном пространстве, заполненном покоящимся газом плотности ρ_0, имеется сферически симметричная область диаметра d, в которой в начальный момент $t = 0$ мгновенно выделяется конечная энергия E. Как это обычно делается при рассмотрении задач с сильными ударными волнами, начальным давлением газа пренебрегается.

Согласно сказанному выше, показатель адиабаты в области непрерывного движения берется равным γ, а на фронте ударной волны — равным $\gamma_1 \neq \gamma$, так что условия на ударной волне представляются в виде [5]

$$\rho_2 (u_2 - c) = -\rho_0 c, \qquad \rho_2 (u_2 - c) u_2 + p_2 = 0$$
$$\rho_2 (u_2 - c)\left(\frac{u_2^2}{2} + \frac{1}{\gamma_1 - 1}\frac{p_2}{\rho_2}\right) + p_2 u_2 = 0 \tag{1.1}$$

Отсюда

$$u_2 = \frac{2}{\gamma_1 + 1} c, \quad \rho_2 = \frac{\gamma_1 + 1}{\gamma_1 - 1}\rho_0, \quad p_2 = \frac{2}{\gamma_1 + 1}\rho_0 c^2 \tag{1.2}$$

Здесь c — скорость распространения ударной волны, ρ — плотность газа, p — давление, u — скорость; индексом 2 обозначены значения переменных непосредственно за фронтом волны.

В рассматриваемой задаче при $\gamma_1 \neq \gamma$ интеграл

$$\int_0^\infty \rho\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}\right) r^2 dr$$

не сохраняется. Это связано с тем, что третье условие на фронте ударной волны (1.1), которое переписывается в виде

$$
\rho_2(u_2-c)\left(\frac{u_2^2}{2}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}\right)+
+p_2u_2-\frac{\gamma_1-\gamma}{(\gamma-1)(\gamma_1-1)}\left(\frac{p_2}{\rho_2}\right)\rho_2(u_2-c)=0 \tag{1.3}
$$

формально соответствует потере (при $\gamma_1<\gamma$) или притоку (при $\gamma_1>\gamma$) энергии на фронте ударной волны; разумеется, на самом деле никакой потери или притока энергии нет, речь идет лишь о переходе энергии в другую форму. Таким образом, определяющие параметры задачи суть ρ_0, E, r, t, d, γ, γ_1 (t — время, r — расстояние от центра симметрии), так что в задаче имеются две независимые безразмерные переменные

$$
\xi=r\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{-1/5}, \qquad \eta=d\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{-1/5} \tag{1.4}
$$

Используя переменные Л. И. Седова [5], скорость, плотность и давление можно поэтому представить в виде

$$
\rho=\rho_0R(\xi,\eta,\gamma,\gamma_1), \qquad u=\frac{r}{t}V(\xi,\eta,\gamma,\gamma_1), \qquad p=\rho_0\frac{r^2}{t^2}P(\xi,\eta,\gamma,\gamma_1) \tag{1.5}
$$

Известное решение задачи о сильном точечном взрыве при $\gamma=\gamma_1$ представляет собой решение предельной задачи с сингулярными начальными данными, соответствующей $d=0$ и получающееся как предел решения (1.5) при $\eta\to 0$

$$
R=R(\xi,\gamma), \quad V=V(\xi,\gamma), \quad P=P(\xi,\gamma)
$$
$$
r_0(t)=\xi_0(\gamma)\,(Et^2/\rho_0)^{1/5} \tag{1.6}
$$

Здесь $r_0(t)$ — радиус ударной волны, ξ_0 — константа, зависящая от γ.

На первый взгляд, такая же предельная форма решения (1.6) должна иметь место и при $\gamma_1\neq\gamma$, поскольку все соображения анализа размерности для неавтомодельного решения остаются в силе (появление нового параметра γ_1 с этой точки зрения ничего не меняет), а предельный переход при $d\to 0$, т.е. $\eta\to 0$ — переход к точечному взрыву — должен сделать решение не зависящим от параметра η и, казалось бы, автомодельным решением вида (1.6). Однако при $\gamma_1\neq\gamma$ автомодельного решения вида (1.6) не существует, что элементарно следует из данного Л. И. Седовым [5] доказательства существования решения задачи о сильном взрыве при $\gamma_1=\gamma$.

В самом деле, для решения вида (1.6), удовлетворяющего соотношению симметрии $u(0,t)=0$ при всех ξ $(0\leqslant\xi\leqslant\xi_0)$ справедливо соотношение

$$
P=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{RV^2(V-2/5)}{(2/5\,\gamma-V)} \tag{1.7}
$$

а условия на ударной волне (1.2) преобразуются подстановкой (1.6) к виду

$$
\frac{2P}{\gamma_1-1}=RV^2, \quad P=\left(\frac{2}{5}-V\right)RV, \quad P=\frac{2}{5}V \quad \text{при } \xi=\xi_0 \tag{1.8}
$$

При $\gamma_1\neq\gamma$ эти соотношения несовместны, что и доказывает несуществование решения вида (1.6) при $\gamma_1\neq\gamma$.

Однако естественно ожидать, что при достаточно малом размере d области, в которой происходит выделение энергии и достаточно большой энергии, движение должно быстро перестать зависеть от этого размера, т.е. в пределе стать автомодельным. Это, казалось бы, с неизбежностью приводит к представлению решения в форме (1.6). На самом деле это не так, и предельное решение, будучи действительно автомодельным, непредставимо тем не менее в форме (1.6).

Причиной, по которой проведенные выше рассуждения при $\gamma_1 \neq \gamma$ оказались недостаточными (поскольку автомодельного решения в предсказываемой ими форме (1.6), как было показано, не существует) является неправильность предположения о существовании конечного предела функций R, V, P при $\eta \to 0$.

§ 2. Для построения предельного решения заметим, что по существу изучается асимптотическое представление решения рассмотренной выше неавтомодельной задачи при больших t, которое в принципе может быть как автомодельным, так и неавтомодельным. При возрастании t к нулю стремятся как ξ, так и η. В соответствии с общими соображениями, развитыми в [2], предположим, что хотя конечного предела при ξ, η порознь стремящихся к нулю и не существует, но существует такое положительное число β, что при $\xi, \eta \to 0$ главные члены асимптотических представлений функций P, V, R имеют вид

$$P = P\,(\xi/\eta^\beta), \qquad R = R\,(\xi/\eta^\beta), \qquad V = V\,(\xi/\eta^\beta) \tag{2.1}$$

(случай 2 работы [2]) [1].

Если сделанное предположение правильно, то предельное движение принадлежит к классу степенных автомодельных решений уравнений газодинамики, указанному Бехертом [12], Л. И. Седовым [13, 5] и К. П. Станюковичем [14], причем независимую автомодельную переменную удобно аналогично [5] перенормировать и взять в виде

$$\zeta = \mathrm{const}\,\frac{\xi}{\eta^\beta} = r\left(\frac{At^2}{\rho_0}\right)^{-(1-\beta)/5}, \qquad A = \sigma E d^{5\beta/(1-\beta)} \tag{2.2}$$

где постоянный параметр σ выбирается так, чтобы на фронте ударной волны было $\zeta = 1$, так что, в частности, асимптотический закон распространения ударной волны записывается в форме

$$r_0 = A^{(1-\beta)/5}\rho_0^{-(1-\beta)/5}t^{(2-2\beta)/5} \tag{2.3}$$

Стремление ξ и η к нулю можно осуществлять при фиксированных r, t, устремляя E и d соответственно к бесконечности и нулю. При этом, если сделанное предположение правильно, то автомодельное предельное движение — «точечный взрыв» — соответствует при $\gamma_1 \neq \gamma$ выделению в начальный момент в центре взрыва не конечной порции энергии, а энергии, стремящейся к бесконечности или нулю при $d \to 0$ и притом так, что

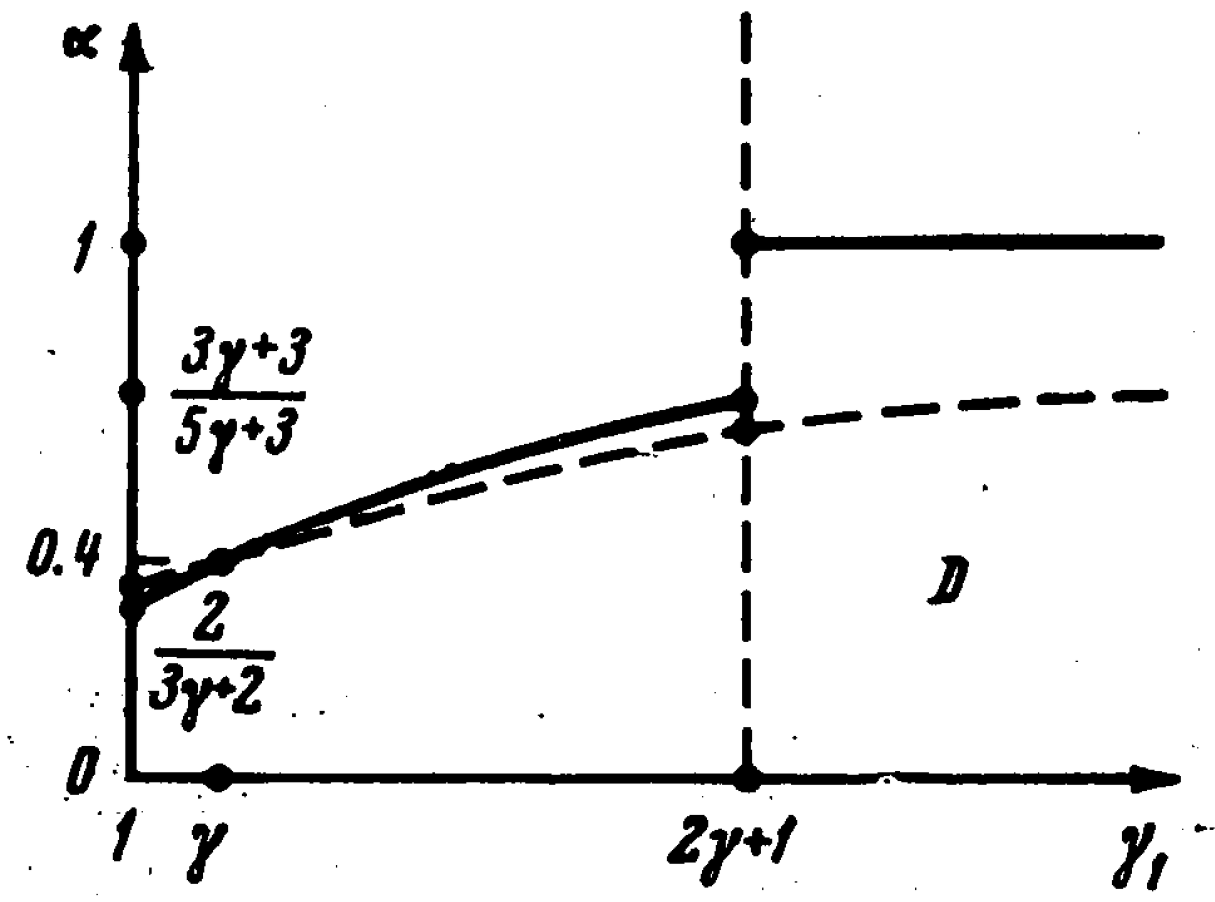
$$Ed^{5\beta/(1-\beta)} = \mathrm{const} \tag{2.4}$$

Таким образом, предельное движение представляет собой автомодельное движение второго рода [1]. Показатель β, или, что то же, показатель степени времени в выражении для автомодельной переменной $\alpha = {}^2/_5 - {}^2/_5\,\beta$ остается «следом» предельного перехода от исходного неавтомодельного

---

[1] В принципе этот случай допускает представление вида $P = \xi^\delta P\,(\xi\,/\,\eta^\beta)$ (ср. (0.1)) и т. д., однако из уравнений движения получается, что δ и аналогичные показатели при выражениях для других переменных равны нулю.

движения, исчезающим для обычных автомодельных решений (и, в частности, в рассматриваемой задаче при $\gamma_1 = \gamma$). Этот показатель должен определяться из условия существования автомодельного решения задачи в целом.



Фиг. 1

Для предварительной ориентировки получим приближенное решение задачи методом Г. Г. Черного [15,1]. В нулевом приближении вся масса газа, охваченного движением $M = (4\pi / 3)\rho_0 R^3$, сосредоточена на фронте ударной волны с радиусом $R(t)$; давление газа в полости p_c равно $p_c = \varepsilon p_2$, где p_2 — давление на фронте, ε — постоянная, подлежащая определению. Из уравнения количества движения, как и в обычном случае $\gamma_1 = \gamma$, получаем

$$c = aR^{-3(1-\varepsilon)}, \qquad a = \mathrm{const} \tag{2.5}$$

Далее энергия газа, охваченного движением E, равна (2.6)

$$E = \frac{4\pi}{3} R^3 p_c \frac{1}{\gamma - 1} + M\frac{u_2^2}{2} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 c^2 A, \qquad A = \frac{2}{\gamma_1 + 1}\left[\frac{\varepsilon}{\gamma - 1} + \frac{1}{\gamma_1 + 1}\right]$$

В силу соотношений (1.3), (1.1) и (1.2) имеем

$$\frac{dE}{dt} = -4\pi R^2 \rho_0 c \tau \frac{p_2}{\rho_2} = -\tau 4\pi R^2 \rho_0 c^3 \frac{2(\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 + 1)^2}, \qquad \tau = \frac{\gamma - \gamma_1}{(\gamma - 1)(\gamma_1 - 1)} \tag{2.7}$$

Подставляя в (2.7) соотношения (2.5) и (2.6), получаем для ε уравнение

$$\varepsilon^2 + \varepsilon\left[\frac{\gamma - 1}{\gamma_1 + 1} - \frac{1}{2}\right] - \frac{(\gamma + \gamma_1 - 2)}{2(\gamma_1 + 1)} = 0 \tag{2.8}$$

Для автомодельного режима $R \sim t^\alpha$, $c \sim t^{\alpha-1}$. Отсюда $\alpha = 1/(4 - 3\varepsilon)$. Как видно, зависимость $\alpha(\gamma_1)$ приближенным методом Черного определяется однозначно для всех $\gamma_1 > 1$; ее график приведен пунктиром на фиг. 1, где D — область неоднозначности для точного решения.

§ 3. Перейдем к исследованию точного решения. Для определения параметра α и построения предельного решения при $\gamma_1 \neq \gamma$ подставим в уравнения газодинамики и условия на ударной волне (1.3) представления (1.5) — (2.1). Получаем, согласно [5]

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z}{\Delta}\{[2(V-1) + 3(\gamma - 1)V](V-\alpha)^2 - (\gamma - 1)V(V-1)(V-\alpha) - {}$$
$$- [2(V-1) + \varkappa(\gamma - 1)]z\} \tag{3.1}$$

$$\Delta = (V-\alpha)[V(V-1)(V-\alpha) + (\varkappa - 3V)z], \qquad \varkappa = \frac{2(1-\alpha)}{\gamma}, \qquad z = \frac{\gamma P}{R}$$

$$\frac{d\ln\zeta}{dV} = \frac{z - (V-\alpha)^2}{V(V-1)(V-\alpha) + (\varkappa - 3V)z} \tag{3.2}$$

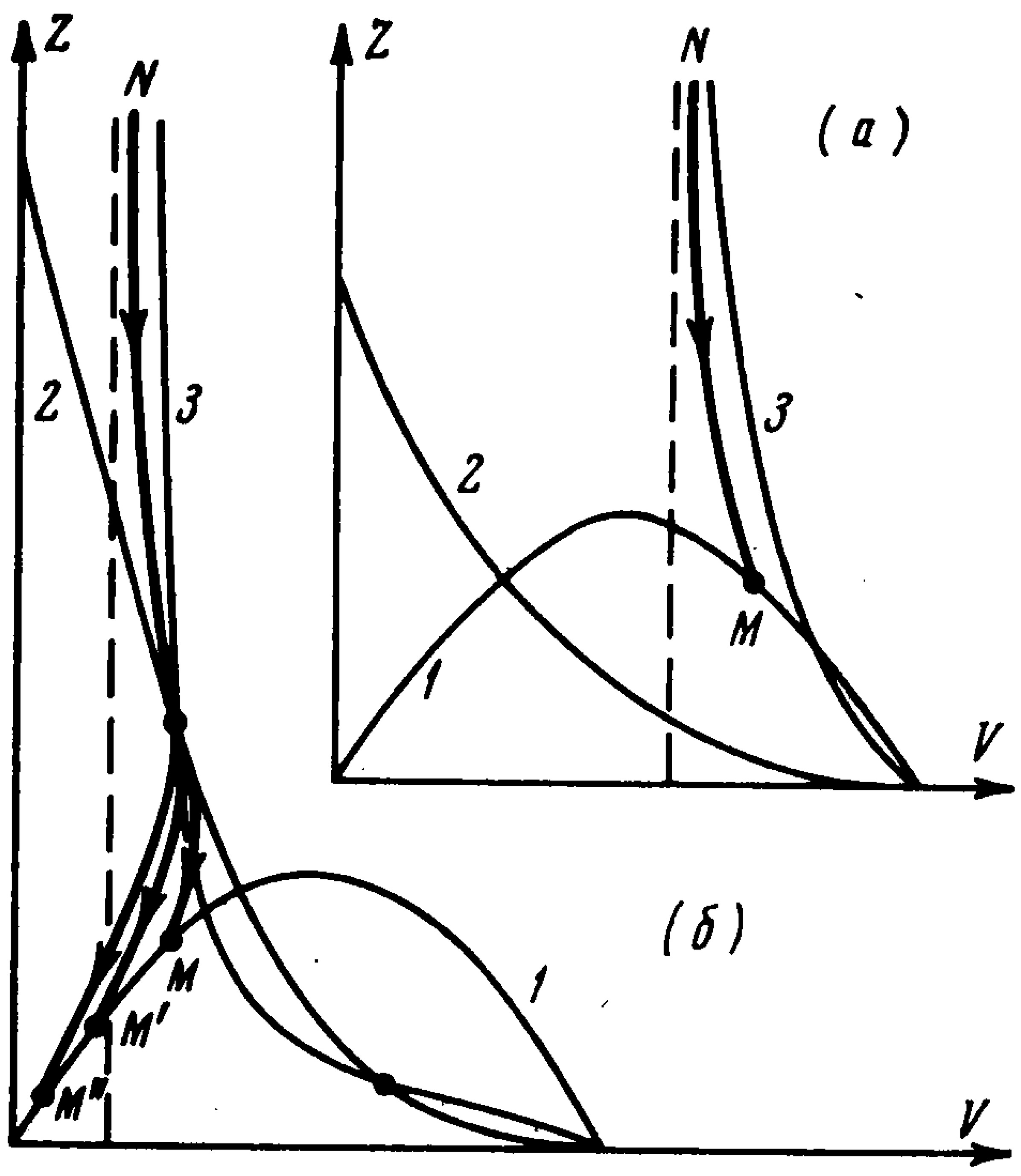
$$(V-\alpha)\frac{d\ln R}{d\ln\zeta} = -3V - \frac{V(V-1)(V-\alpha) + (\varkappa - 3V)z}{z - (V-\alpha)^2} \tag{3.3}$$

Условия сохранения потока вещества, импульса и энергии на ударной волне записываются соответственно в виде

$$z = -\gamma V (V - \alpha), \qquad Rz = \alpha \gamma V$$

$$\frac{2z}{\gamma(\gamma_1 - 1)} = V^2 \quad \text{при } \zeta = 1 \qquad (3.4)$$

Показатель $\alpha = {}^2/_5 - {}^2/_5\beta$ определяется из того условия, что интегральная кривая в плоскости zV уравнения (3.1), выходящая из точки M, определяемой соотношениями (3.4) — образа фронта ударной волны — проходит через точку N — образ центра симметрии, причем при движении от N к M автомодельная независимая переменная ζ монотонно возрастает от $\zeta = 0$ до $\zeta = 1$.



Фиг. 2

Исследование показывает, что зависимость α от γ_1 имеет вид, изображенный сплошной кривой на фиг. 1. Она представляется от $\gamma_1 = 1$ до $\gamma_1 = 2\gamma + 1$ монотонно возрастающей кривой $\alpha(\gamma_1)$, проходящей через точки

$$(\alpha = {}^2/_3\gamma + 2, \gamma_1 = 1), \qquad (\alpha = {}^2/_5, \gamma_1 = \gamma)$$

$$(\alpha = (3\gamma + 3) / (5\gamma + 3), \qquad \gamma_1 = 2\gamma + 1)$$

При $\gamma_1 > 2\gamma + 1$ показатель α не определяется однозначно. Аналогичная неоднозначность была отмечена в работе [16] для другой автомодельной задачи второго рода — задачи о сходящейся ударной волне. В этой работе было высказано предположение о том, что на самом деле осуществляется минимальное значение α, однако вопрос остается неясным.

Качественный вид искомой интегральной кривой в плоскости zV для случая $\gamma_1 < \gamma$ (при $\gamma < 2$) представлен на фиг. 2, *а*, где цифрами *1*—*3* обозначены соответственно кривые

$$z = -\gamma V (V - \alpha), \; z = (V - \alpha)^2, \; z = V(V - 1)(V - \alpha)(3V - \varkappa)^{-1}$$

В случае $\gamma_1 > \gamma$ при $\gamma_1 > 2\gamma + 1$ интегральная кривая, выходящая из седла и проходящая через особую точку типа узла — левую точку пересечения кривых

$$z = V(V - 1)(V - \alpha)(3V - \varkappa)^{-1}, \qquad z = (V - \alpha)^2$$

дает не одну, а целое семейство интегральных кривых, удовлетворяющих всем требуемым выше условиям. Тем самым, как только возникает в плоскости zV особая точка типа узла, получается некоторый интервал значений α и значение показателя α перестает определяться однозначно (фиг. 2, *б*).

В промежуточном случае $\gamma < \gamma_1 < 2\gamma + 1$ исследование вполне аналогично первому случаю и α определяется для каждого γ_1 однозначно, при этом

$$\alpha(2\gamma + 1 - 0) = (3\gamma + 3)\,(5\gamma + 3)$$

§ 4. 1°. Как это характерно для автомодельных решений второго рода вообще, рассматриваемое решение определено с точностью до константы σ. В случае $\gamma_1 = \gamma$, $A = \sigma E$ и константа σ находится [5] из закона сохранения

$$\int\limits_0^\infty \rho\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{(\gamma-1)\rho}\right) r^2 dr = \mathrm{const} \tag{4.1}$$

справедливого и для неавтомодельных движений. При $\gamma_1 \neq \gamma$ такого закона сохранения нет, и единственным способом определения константы σ является численный расчет неавтомодельной задачи вплоть до выхода решения на построенную выше автомодельную асимптотику, известную с точностью до искомой константы.

2°. Исследование области $\gamma_1 > 2\gamma + 1$, и в частности, преодоление имеющейся в этом случае неоднозначности выходит за рамки рассматриваемой работы. Заметим здесь только следующее. При $\alpha < 1$ скорости везде направлены от центра симметрии. При $\alpha > 1$ область течения разделяется некоторой сферой на две части: внутри сферы скорости направлены к центру, вне ее — от центра. Случай $\alpha = 1$ отвечает сильным детонационным волнам[1]. Действительно, в задаче сильной детонации условие на ударной волне имеет вид

$$\frac{1}{\gamma(\gamma-1)}z - \frac{1}{2}V^2 = q \tag{4.2}$$

где q — отношение теплоты, выделяемой на фронте и приходящейся на единицу массы газа, к квадрату скорости распространения волны относительно неподвижного газа. Здесь уже учтено, что независимая автомодельная переменная обратно пропорциональна времени и детонационная волна распространяется с постоянной скоростью. Как известно [18], для получения единственного решения в задаче детонации необходимо дополнительное условие, в качестве которого обычно принимается условие Чепмена — Жуге, состоящее в том, что скорость распространения волны относительно газа равна местной скорости звука, так что при $\zeta = 1$

$$z = (V - 1)^2 \tag{4.3}$$

Последнее условие (3.4) может быть преобразовано к виду

$$\frac{z}{\gamma(\gamma-1)} - \frac{1}{2}V^2 = z\frac{\gamma_1 - \gamma}{\gamma(\gamma-1)(\gamma_1-1)} \tag{4.4}$$

Из (4.3) и (4.4) следует, что для каждого решения задачи о детонации находится такое γ_1, при котором это решение совпадает с решением рассматриваемой здесь задачи при $\alpha = 1$. Однако это γ_1 ограничено снизу. В самом деле, найдем γ_1, соответствующее режиму, в котором выполняется условие Чепмена — Жуге. Решая систему (4.3), (4.4) совместно с первым условием (3.4) при $\alpha = 1$, получим, что на фронте детонации

$$z = z^* = \gamma^2(\gamma+1)^{-2}, \qquad q = q^* = {}^1/_2\,(\gamma^2 - 1)^{-1}$$

так что

$$\gamma_1 = 2\gamma + 1$$

[1] Точечный взрыв горючей смеси газов рассмотрен в работе [17], где можно найти дальнейшую библиографию.

Остальные, «недосжатые» режимы отвечают, как легко видеть, $q < q_*$: при том же тепловыделении на фронте режим Чепмена — Жуге отвечает наименьшей скорости распространения волны. Этим режимам соответствуют $\gamma_1 > 2\gamma + 1$, скорость продуктов сгорания за фронтом детонационной волны для этих решений больше скорости звука.

Авторы благодарят О. С. Рыжова, Ю. П. Райзера, Я. Б. Зельдовича и Г. Г. Черного за обсуждение работы.

Поступила 22 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М., Физматгиз, 1963.
2. Баренблатт Г. И., Сивашинский Г. И. Автомодельные решения второго рода в нелинейной фильтрации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5
3. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
4. Taylor G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. Proc. Roy. Soc., 1950, vol. 201, No. 8, p. 175.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4, М., Гостехиздат, 1957.
6. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
7. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. М., Гостехиздат, 1955.
8. Blythe P. A. Near-frozen quasi-one-dimensional flow. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1967, vol. 262, No. 1125, pp. 203—250.
9. Рыжов О. С., Таганов Г. И. Второй предельный случай задачи о сильном взрыве. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
10. Коробейников В. П. Задача о сильном точечном взрыве в газе при нулевом градиенте температуры. Докл. АН СССР, 1956, т. 109, вып. 2.
11. Сидоркина С. И. О некоторых движениях аэрозоля. Докл. АН СССР, 1957, т. 112, № 3.
12. Bechert K. Differentialgleichungen der Wellenausbreitung in Gasen. Ann. Physik, 1941, Bd. 39, No. 5, S. 357.
13. Седов Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, 1945, т. 9, вып. 4.
14. Станюкович К. П. Автомодельные решения уравнений гидромеханики, обладающих центральной симметрией. Докл. АН СССР, 1945, т. 48, № 5.
15. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
16. Брушлинский К. В., Каждан Я. М. Об автомодельных решениях некоторых задач газовой динамики. Усп. матем. н., 1963, т. 18, № 2.
17. Бишимов Е., Коробейников В. П., Левин В. А., Черный Г. Г. Одномерные нестационарные течения горючей смеси газов с учетом конечной скорости химических реакций. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
18. Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. Теория детонации. М., Гостехиздат, 1955.