

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ
ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ СЖАТОГО В НЕЙ ГАЗА
С НЕОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

А. Б. Ватажин

(Москва)

В последнее время появилось значительное число работ, в которых изучаются нестационарные течения проводящего газа с ударными волнами в каналах различных магнитогидродинамических устройств (см., например, [1,2]). В большинстве таких исследований предполагается, что распределение электрических токов в газе за ударной волной является одномерным и регулируется условиями замыкания тока во внешней электрической цепи, соединяющей электроды на стенках канала.

Однако в реальных каналах всегда имеются области, в которых магнитное поле неоднородно, а стенки канала непроводящие. Как правило, такие области совпадают с концевыми зонами внешнего магнитного поля. В газе за ударной волной, проходящей через концевые зоны, появляются замкнутые электрические токи, интенсивность которых зависит от положения ударного фронта. Эти токи (имеющие двумерный характер) взаимодействуют с магнитным полем и порождают возмущения, которые догоняют ударную волну и изменяют скорость ее движения.

Концевые эффекты в стационарных магнитогидродинамических течениях исследуются уже длительное время (см., например, [3]). Влияние же этих эффектов на нестационарное движение газа изучено явно недостаточно. Из работ, посвященных этому вопросу, следует отметить экспериментальные исследования [4,5], в которых отмечено существенное изменение скорости переднего фронта плазмы в неоднородном магнитном поле и показано, что это связано с образованием зон замкнутых токов в плазме.

Данная работа посвящена теоретическому рассмотрению некоторых аспектов этой проблемы. Вследствие большой математической сложности задачи (соответствующие уравнения магнитной гидродинамики являются двумерными и нестационарными) для получения обозримых результатов предполагается, что параметр магнитогидродинамического взаимодействия меньше единицы, а индуцированные магнитные поля не оказывают влияния на движение плазмы. Следует заметить, что указанные условия довольно часто реализуются в нестационарных магнитогидродинамических устройствах, когда проводимость газа порядка 1 мо/см, а уровень скоростей и магнитных полей не чрезмерно велик.

1. Рассмотрим плоское или осесимметричное движение газа за ударной волной, распространяющейся по покоящемуся газу в канале $|x^0| < \infty$, $0 < y^0 < h = \text{const}$ с непроводящими стенками в присутствии внешнего стационарного поля B^0 . Система уравнений магнитной газовой динамики, описывающая такие течения, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{v \rho v}{y} = 0 \quad \left(N = \frac{\sigma_* B_*^2 h (\gamma - 1)}{c^2 \rho_\infty (\gamma + 1) D_*} \right) \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = N (\mathbf{j} \times \mathbf{b})_x \quad (1.2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = N (\mathbf{j} \times \mathbf{b})_y \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \gamma p \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{v v}{y} \right) = N \frac{\gamma - 1}{\sigma} \mathbf{j}^2 \quad (1.4)$$

$$\mathbf{j} = \sigma (-\nabla\varphi + \mathbf{v} \times \mathbf{b}), \quad \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 \quad (1.5)$$

$$\left. \begin{aligned} v_n &= \frac{2D}{\gamma+1} \left(1 - \frac{s}{D^2}\right), & v_t &= 0 \\ \rho &= \left[1 + \frac{2s}{(\gamma-1)D^2}\right]^{-1}, & p &= \frac{(\gamma-1)s}{\gamma(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)Dv_n}{\gamma+1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \left(s = \frac{a_\infty^2}{D_*^2}, \quad a_\infty^2 = \frac{\gamma p_\infty}{\rho_\infty} \right) \\ & \text{(на ударной волне)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$j_n = 0 \quad \text{на ударной волне} \quad (1.7)$$

$$v = 0, \quad j_y = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad y = 1 \quad (1.8)$$

Все величины, входящие в уравнения (1.1) — (1.8), являются безразмерными. Размерные (снабженные верхним индексом «°») и безразмерные (без индекса) переменные связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} x^\circ &= hx, & y^\circ &= hy, & t^\circ &= \frac{ht}{D_*}, & D^\circ &= D_*D \\ v^\circ &= D_*v, & \rho^\circ &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_\infty\rho, & p^\circ &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_\infty D_*^2 p \\ \mathbf{B}^\circ &= B_*\mathbf{b}, & \mathbf{j}^\circ &= \frac{\sigma_*}{c} B_* D_* \mathbf{j}, & \varphi^\circ &= \frac{h}{c} B_* D_* \varphi \end{aligned} \quad (1.9)$$

Здесь t — время, ρ — плотность, p — давление, D — скорость распространения ударной волны в пространстве, v_n и j_n — проекции векторов абсолютной скорости газа и плотности электрического тока на нормаль к ударной волне (\mathbf{n} направлена в сторону покоящейся среды), u и v — проекции вектора абсолютной скорости \mathbf{v} на оси x и y , φ — электростатический потенциал (связанный с электрическим полем, определенным в покоящейся системе координат), σ — электропроводность газа, c — скорость света в вакууме, γ — отношение удельных теплоемкостей; $v = 0$ для плоского и $v = 1$ для осесимметричного течений. Размерные величины D_* , B_* и σ_* соответственно представляют собой скорость движения ударной волны перед зоной взаимодействия с магнитным полем и характерные внешнее магнитное поле и проводимость газа. Посредством p_∞ и ρ_∞ обозначены размерные давление и плотность покоящегося газа.

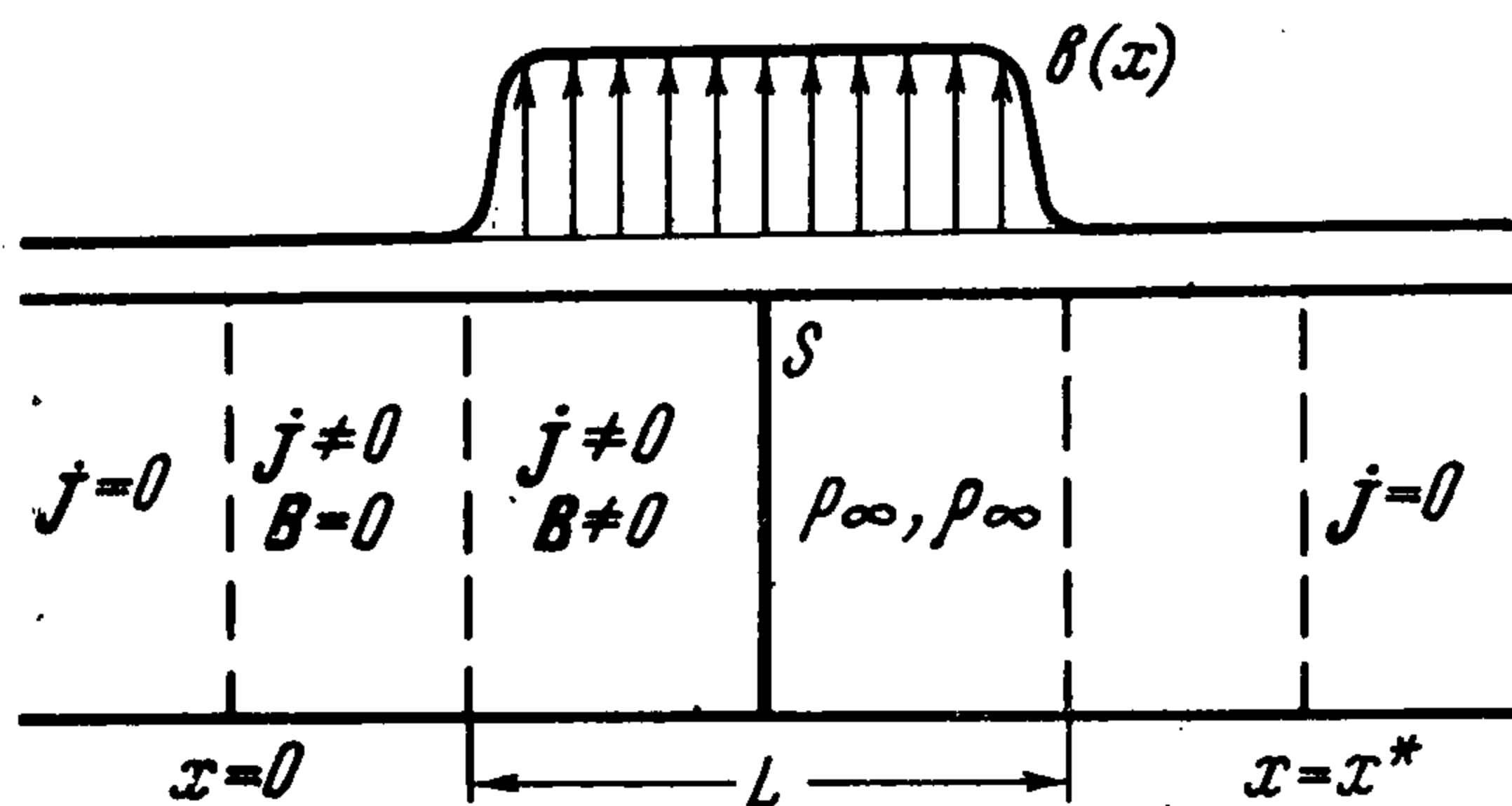
Величина N является параметром магнитогидродинамического взаимодействия, а параметр s равен обратной величине квадрата числа Маха, рассчитанного по характерной скорости движения ударной волны и скорости звука a_∞ в покоящемся газе.

При выводе системы уравнений (1.1) — (1.8) было предположено, что среда представляет собой совершенный газ с постоянными теплоемкостями, индуцированные магнитные поля и эффект Холла достаточно малы, стенки канала непроницаемы для газа и электропроводность среды перед ударной волной равна нулю.

Остановимся на некоторых особенностях изучаемого движения.

Прежде всего обратим внимание на то обстоятельство, что внешнее магнитное поле \mathbf{b} в реальных устройствах бывает сосредоточенным в некоторой зоне L конечной протяженности, а вне ее практически равно нулю (фиг. 1). До входа ударной волны S в зону L ($t < 0$) течение газа за фронтом является однородным (так как $\mathbf{j} = 0$ и $\varphi = 0$), а скорость ударной волны постоянна ($D = 1$).

За сильными ударными волнами температура газа поднимается настолько, что проводимость достигает заметной величины. Поэтому после того как ударная волна вошла в зону L ($t > 0$), в движущемся газе в результате его взаимодействия с магнитным полем появляются электрические токи ($j \neq 0$).



Фиг. 1

Соответствующие распределения j и ϕ находятся из системы уравнений (1.5), имеющей эллиптический характер, и поэтому теоретически величины j и ϕ мгновенно «возбуждаются» во всем потоке за ударной волной. Однако практически эти параметры достигают заметной величины только правее некоторого сечения $x = 0$, которое в общем случае расположено выше по потоку от зоны L на расстоянии порядка калибра канала (фиг. 1). Левее этого сечения величинами j и ϕ можно пренебречь в силу их малости.

При решении системы уравнений (1.5) можно ограничиться рассмотрением области между ударной волной и сечением $x = 0$ и использовать условие

$$j_x = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad 0 < y < 1 \quad (1.10)$$

Несмотря на то, что магнитогидродинамические силы и Джоулева теплота при $x < 0$ (в силу указанной схематизации течения) равны нулю, газодинамические параметры (p, ρ, v) в этой области, вообще говоря, могут изменяться вследствие распространения акустических возмущений вверх по потоку. Течение левее сечения $x = 0$ оказывается невозмущенным (магнитным полем) и однородным, если абсолютная скорость газа за ударной волной до ее входа в зону L является сверхзвуковой ($M_0 > 1$). Соответствующие этому случаю параметры $\rho = \rho_0, p = p_0$ и $u = u_0$ находятся из соотношений (1.6), если в них положить $D = 1, v_n = u_0$.

Когда же абсолютная скорость газа за ударной волной меньше скорости звука ($M_0 < 1$), то параметры газа левее сечения $x = 0$ отличны от ρ_0, p_0 и u_0 и должны находиться в результате решения задачи.

Невозмущенные параметры ρ_0, p_0 и u_0 , которые соответствуют движению газа за прямолинейной ударной волной, имеющей скорость $D_* = \text{const}$, определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \left(1 + \frac{2s}{\gamma - 1}\right)^{-1}, & u_0 &= \frac{2(1-s)}{\gamma + 1} \\ p_0 &= \frac{(\gamma - 1)s}{\gamma(\gamma + 1)} + \frac{2(\gamma - 1)(1-s)}{(\gamma + 1)^2}, & v_0 &= 0 \\ a_0^2 &= \gamma p_0 / \rho_0, & M_0 &= u_0 / a_0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

В верхней по потоку концевой зоне магнитного поля также можно указать сечение $x = x^*$, правее которого всегда $j = 0$ и $\phi = \text{const}$. Поэтому для моментов времени, когда ударная волна находится правее зоны $0 < x < x^*$, уравнения (1.5) должны рассматриваться в области $0 < x < x^*$ с учетом соотношения (1.10) и граничного условия

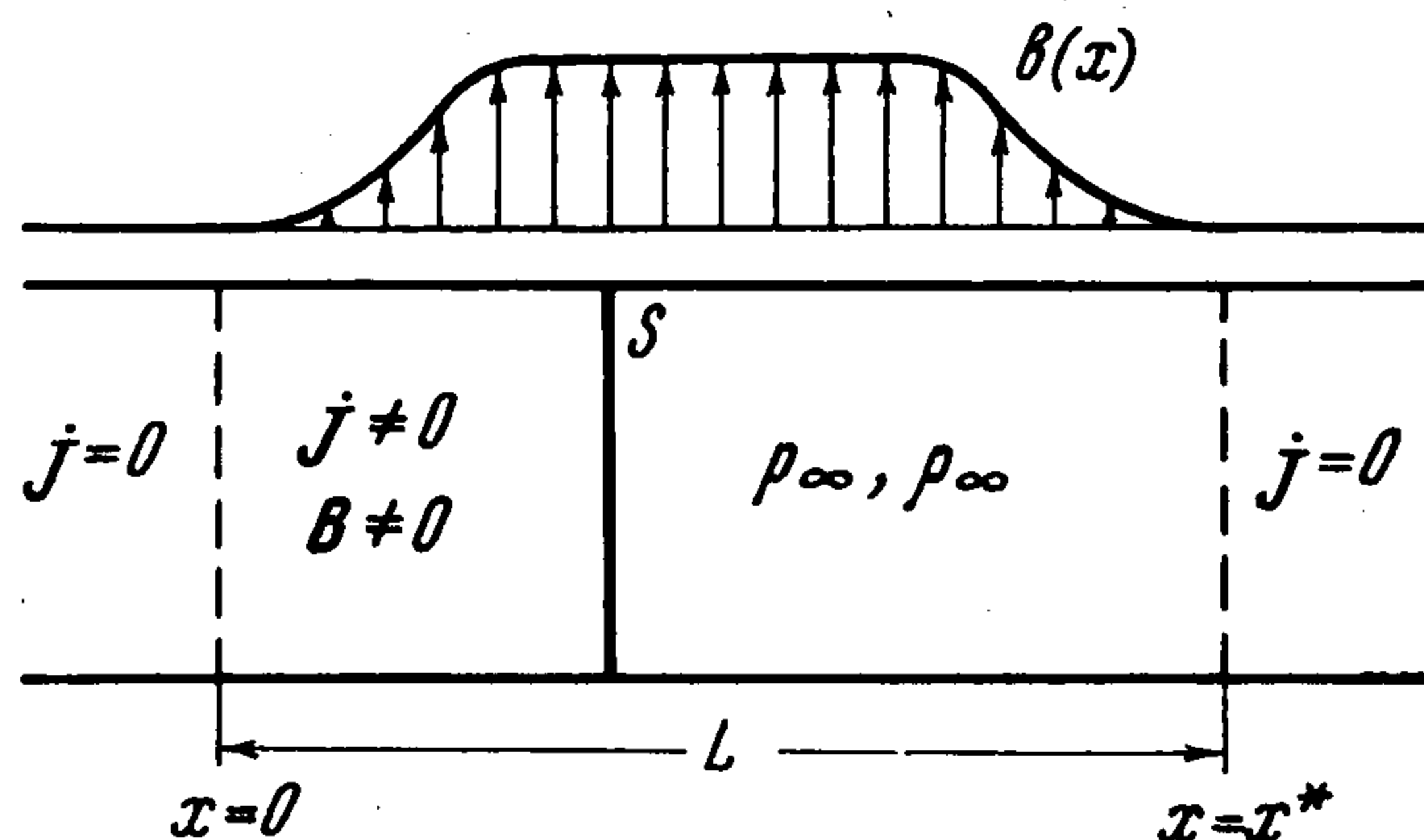
$$j_x = 0 \quad \text{при } x = x^*, \quad 0 < y < 1 \quad (1.12)$$

Для тех же моментов времени, когда ударная волна проходит область $0 < x < x^*$, уравнения (1.5) должны рассматриваться в области между $x = 0$ и ударной волной с учетом граничных условий (1.7), (1.8) и (1.10).

Система уравнений (1.1) — (1.4) служит для определения газодинамических параметров за ударной волной. Граничными условиями для решения этих уравнений и определения скорости и формы ударной волны служат соотношения (1.6), (1.8) и (1.11).

Основная сложность задачи состоит в том, что «электрические» уравнения (1.5) и «газодинамическая» система (1.1) — (1.4) должны решаться совместно. Заметим также, что система (1.5) является эллиптической, в то время как (1.1) — (1.4) имеет гиперболический характер. Это обстоятельство часто усложняет использование численных методов.

Однако при достаточно малом параметре магнитогазодинамического взаимодействия решение указанных систем уравнений можно производить последовательно. В этом случае вначале с помощью (1.5) находится распределение электрических токов в предположении, что газодинамические параметры определяются соотношениями (1.11), а ударная волна —



Фиг. 2

прямолинейная и движется со скоростью $D = 1$. Затем исследуется система уравнений (1.1) — (1.4) при условии, что входящие в нее величины $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$ и $\mathbf{j}^2 \sigma$ известны и вычислены на основе решения (1.5). Этот метод анализа будет использован ниже.

При проведении конкретных расчетов необходимо также иметь в виду, что выбор сечений $x = 0$ и $x = x^*$ должен производиться исходя из особенностей распределения магнитного поля. Например, если $\mathbf{b} = (0, 0, b(x))$ и $b(x)$ аппроксимируются ступенчатой функцией (фиг. 1), то длина x^* должна быть больше L . Когда же $b(x)$ асимптотически стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, то всегда можно выбрать такое L , чтобы $L = x^*$ (фиг. 2).

2. При малом параметре магнитогазодинамического взаимодействия N решение системы уравнений (1.1) — (1.8) можно искать в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + Nu_1(x, y, t) + \dots, & v &= Nv_1(x, y, t) + \dots \\ \rho &= \rho_0 + N\rho_1(x, y, t) + \dots, & p &= p_0 + Np_1(x, y, t) + \dots \\ \mathbf{j} &= \mathbf{j}_0(x, y, t) + N\mathbf{j}_1(x, y, t) + \dots, & \varphi &= \varphi_0(x, y, t) + \\ & & &+ N\varphi_1(x, y, t) + \dots \\ \Phi(x, y, t) &= x - t + N\psi(y, t) + \dots = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Входящие в (2.1) постоянные величины u_0 , p_0 и ρ_0 представляются формулами (1.11). Уравнение $\Phi = 0$ определяет форму ударной волны.

Подставляя (2.1) в соотношения (1.1) — (1.8), для определения электромагнитных параметров \mathbf{j}_0 , φ_0 и газодинамических величин u_1 , v_1 , p_1 и ρ_1 получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_0 &= \sigma_0(-\nabla\varphi_0 + \mathbf{v}_0 \times \mathbf{b}), & \operatorname{div} \mathbf{j}_0 &= 0 \\ j_{x0} &= 0 & \text{при } x &= 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$j_{n0} = 0$ на ударной волне (или $j_{x0} = 0$ при $x = x^*$)

$j_{y0} = 0$ при $y = 0, y = 1$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{v \rho_0 v_1}{y} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = f_x \quad (f_x = (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{b})_x) \quad (2.3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial p_1}{\partial y} = f_y \quad (f_y = (\mathbf{j}_0 \times \mathbf{b})_y)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} + u_0 \frac{\partial p_1}{\partial x} + \gamma p_0 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{v v_1}{y} \right) = (\gamma - 1) q \quad \left(q = \frac{j_0^2}{\sigma} \right)$$

$$p_1 = \alpha u_1, \quad \rho_1 = \beta u_1, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\delta u_1, \quad v_1 = u_0 \psi(y, t) \quad (2.4)$$

$$\alpha = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)(1 + s)}, \quad \beta = \frac{2s(\gamma^2 - 1)}{(\gamma - 1 + 2s)^2(1 + s)}, \quad \delta = \frac{\gamma + 1}{2(1 + s)}$$

$$v_1 = 0 \quad \text{при } y = 0, y = 1 \quad (2.5)$$

Произведем усреднение уравнений (2.3) — (2.5) по координате y . Используя условие (2.5), получим следующую систему уравнений относительно усредненных по сечению газодинамических параметров:

$$\frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} = 0$$

$$\rho_0 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} = \langle f_x \rangle$$

$$\frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x} + \gamma p_0 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x} = (\gamma - 1) \langle q \rangle \quad (2.6)$$

$$\langle p_1 \rangle = \alpha \langle u_1 \rangle, \quad \langle \rho_1 \rangle = \beta \langle u_1 \rangle, \quad - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \delta \langle u_1 \rangle \quad \text{при } x = t \quad (2.7)$$

$$\left(\langle \xi \rangle = \int_0^1 \xi(x, y, t) y^v dy \right)$$

В этих выражениях все усредненные параметры являются функциями x и t , а величина $-\langle \partial \psi / \partial t \rangle$ характеризует возмущение усредненной скорости распространения ударной волны

$$\langle D \rangle = 1 - N \langle \partial \psi / \partial t \rangle + \dots \quad (2.8)$$

Наиболее простым способом исследования системы (2.6), который с успехом использовался при решении многочисленных нестационарных одномерных задач газовой динамики и магнитной газовой динамики, является метод характеристик.

Уравнения (2.6) имеют три следующие действительные семейства характеристик

$$\frac{dx}{dt} = u_0 \pm a_0 \quad \left(a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)$$

$$\pm d \langle p_1 \rangle + \rho_0 a_0 d \langle u_1 \rangle - dt [a_0 \langle f_x \rangle \pm (\gamma - 1) \langle q \rangle] = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{dx}{dt} = u_0, \quad d \langle \rho_1 \rangle = -\rho_0 \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x} dt \quad (2.10)$$

Обратим внимание, что решение газодинамической задачи с помощью характеристических соотношений (2.9), (2.10) в данном случае может производиться последовательно. Вначале из уравнений (2.9) и соответствующих граничных условий находят величины $\langle u_1 \rangle$, $\langle p_1 \rangle$ и возмущенная скорость ударной волны, а далее из (2.10) определяется плотность газа $\langle \rho_1 \rangle$.

Предположим, что затухание магнитного поля является асимптотическим, так что можно использовать схему, показанную на фиг. 2. Соответствующие семейства характеристик (2.9), (2.10) при $M_0 > 1$ изображены на фиг. 3. Прямые 1 и 2 представляют собой характеристики первого и второго семейств, а прямые 3 — траектории частиц газа.

Определим вначале параметры газа непосредственно за ударной волной (например, в точке A , фиг. 3). Используя связь (2.9) между параметрами вдоль характеристики $A'A$, граничные условия (2.7) и соотношения

$$\langle u_1 \rangle = 0, \quad \langle p_1 \rangle = 0, \quad \langle \rho_1 \rangle = 0 \quad \text{при } x = 0$$

найдем

$$\begin{aligned} \langle u_{1A} \rangle &= (u_0 + a_0) (\alpha + \rho_0 a_0) \int_{A'A} G dx \quad (G = a_0 \langle f_x \rangle + (\gamma - 1) \langle q \rangle) \\ \langle p_{1A} \rangle &= \alpha \langle u_{1A} \rangle, \quad \langle \rho_{1A} \rangle = \beta \langle u_{1A} \rangle, \quad - \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle = \delta \langle u_{1A} \rangle \end{aligned} \quad (2.11)$$

Параметры газа в произвольной точке потока C теперь определяются с помощью соотношений (2.9), (2.10) и (2.11).

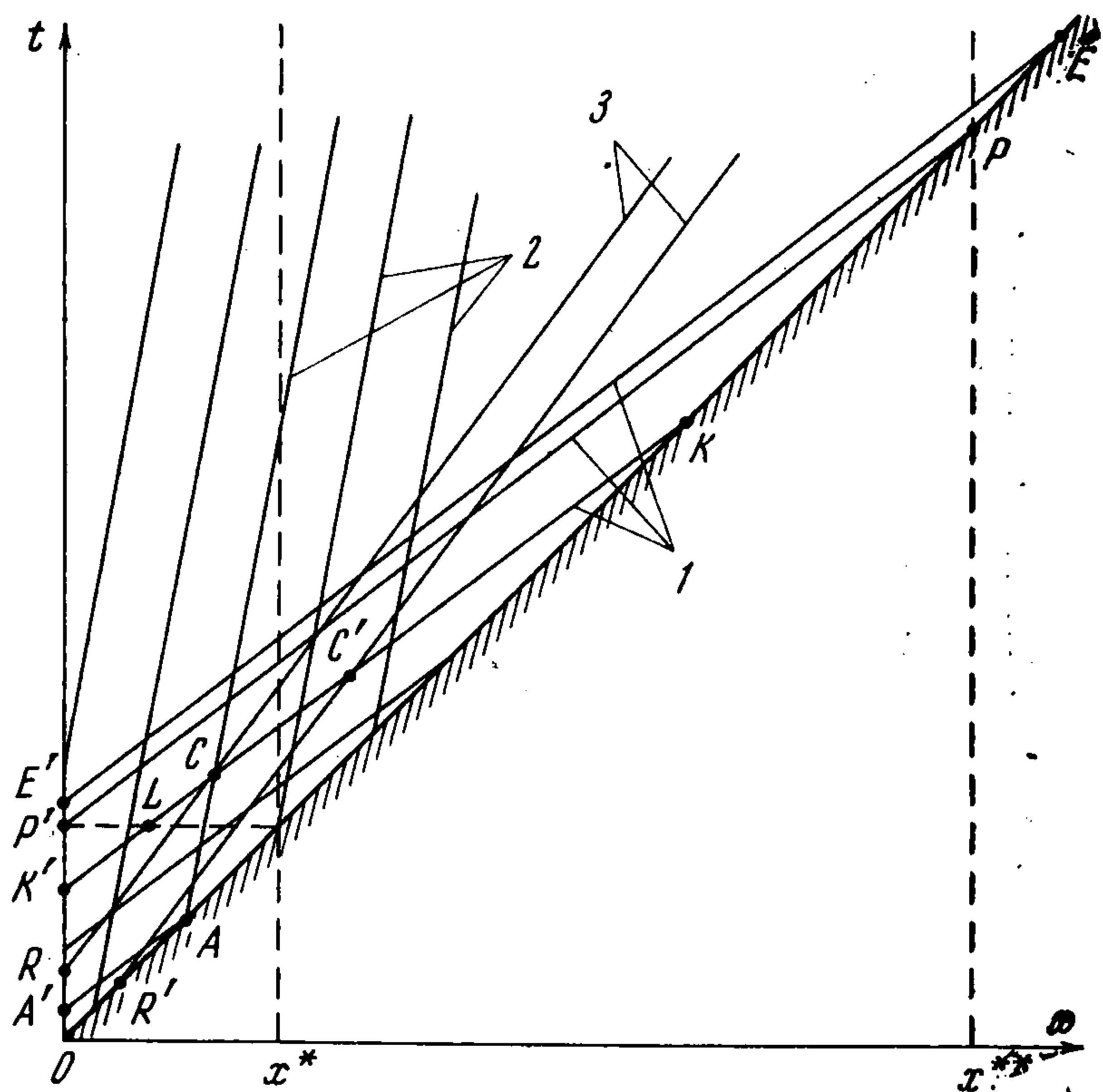
После элементарных преобразований получаем

$$\begin{aligned} \langle p_{1C} \rangle &= \frac{(\alpha - \rho_0 u_0)}{2(u_0 + a_0)(\alpha + \rho_0 a_0)} \int_{A'A} G dx + \frac{1}{2(u_0 + a_0)} \int_{K'C} G dx - \frac{1}{2(u_0 - a_0)} \int_{AC} G^* dx \\ \langle u_{1C} \rangle &= \frac{1}{\rho_0 a_0} \left(\frac{1}{u_0 + a_0} \int_{K'C} G dx - \langle p_{1C} \rangle \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\langle \rho_{1C} \rangle = \langle \rho_{1R} \rangle - \frac{\rho_0}{u_0} \int_{RC} \frac{\partial \langle u_1 \rangle}{\partial x} dx \quad (G^* = a_0 \langle f_x \rangle - (\gamma - 1) \langle q \rangle)$$

Величина $\langle \rho_{1R} \rangle$ равна нулю, если траектория частиц, проходящая через точку C , пересекает ось t и равна возмущению плотности газа в точке R' на ударной волне, если траектория частиц, проходящая через рассматриваемую точку C' , пересекает ударную волну (фиг. 3).

Аналогично можно определить газодинамические параметры и при $M_0 < 1$. В этом случае область возмущенного движения газа в плоскости x, t расположена между прямыми $t = x$ и $t = x/(u_0 - a_0)$. Возмущения газодинамических величин на второй из указанных прямых равны нулю. Параметры газа непосредственно за ударной волной по-прежнему будут определяться формулами (2.11), так как возмущающие факторы при $x < 0$ равны нулю и интегрирование по характеристике производится в пределах $0 < x < x^*$.



Фиг. 3

Таким образом, осредненные газодинамические параметры за ударной волной могут быть сравнительно легко определены при задании возмущающих факторов — магнитогидродинамической силы $\langle f_x \rangle$ и джоулевой теплоты $\langle q \rangle$. Последние величины должны находиться с помощью решения системы (2.2).

3. Определим прежде всего скорость движения ударной волны на большом расстоянии от зоны магнитного поля вниз по потоку.

Рассмотрим положение ударной волны, характеризующееся условием

$$x = \zeta > x^{**}, \quad x^{**} = x^* \frac{u_0 + a_0}{u_0 + a_0 - 1} \quad (3.1)$$

Нетрудно заметить (фиг. 3), что величины $\langle f_x \rangle$ и $\langle q \rangle$ на соответствующей характеристике $E'E$ не зависят от t и являются функциями только x . Это связано с тем, что электрическое поле в канале, после того как ударная волна вышла из области $0 < x < x^*$, становится стационарным.

В результате интегрирования вдоль характеристики $E'E$ получаем

$$\int_{E'E} G dx = a_0 \int_0^{x^*} \langle f_x \rangle dx + (\gamma - 1) \int_0^{x^*} \langle q \rangle dx \quad (3.2)$$

Обратим внимание, что в соотношениях (3.2) величины $\langle f_x \rangle$ и $\langle q \rangle$ представляют собой возмущающие факторы, соответствующие стационарному течению газа (имеющему скорость u_0 и проводимость σ_0) по каналу в заданном неоднородном магнитном поле.

Известно [3], что в случае течений проводящей среды по каналам с неэлектропроводными стенками справедливо следующее интегральное соотношение:

$$-u_0 \int_0^{x^*} \langle f_x \rangle dx = \int_0^{x^*} \langle q \rangle dx = q_\Sigma \quad (3.3)$$

где q_Σ — безразмерная суммарная джоулева диссипация в канале.

Используя формулы (2.11), (3.2), (3.3) и (2.8), получаем следующее асимптотическое выражение для скорости движения ударной волны

$$\langle D^\circ \rangle - D_* = -\frac{\sigma_0^\circ B_*^2 h}{c^2 \rho_\infty} T(s, \gamma) Q_\Sigma, \quad T(s, \gamma) = \frac{(\gamma - 1) \delta u_0 [a_0 - (\gamma - 1) u_0]}{(\gamma + 1) (u_0 + a_0) (\alpha + \rho_0 a_0)} \quad (3.4)$$

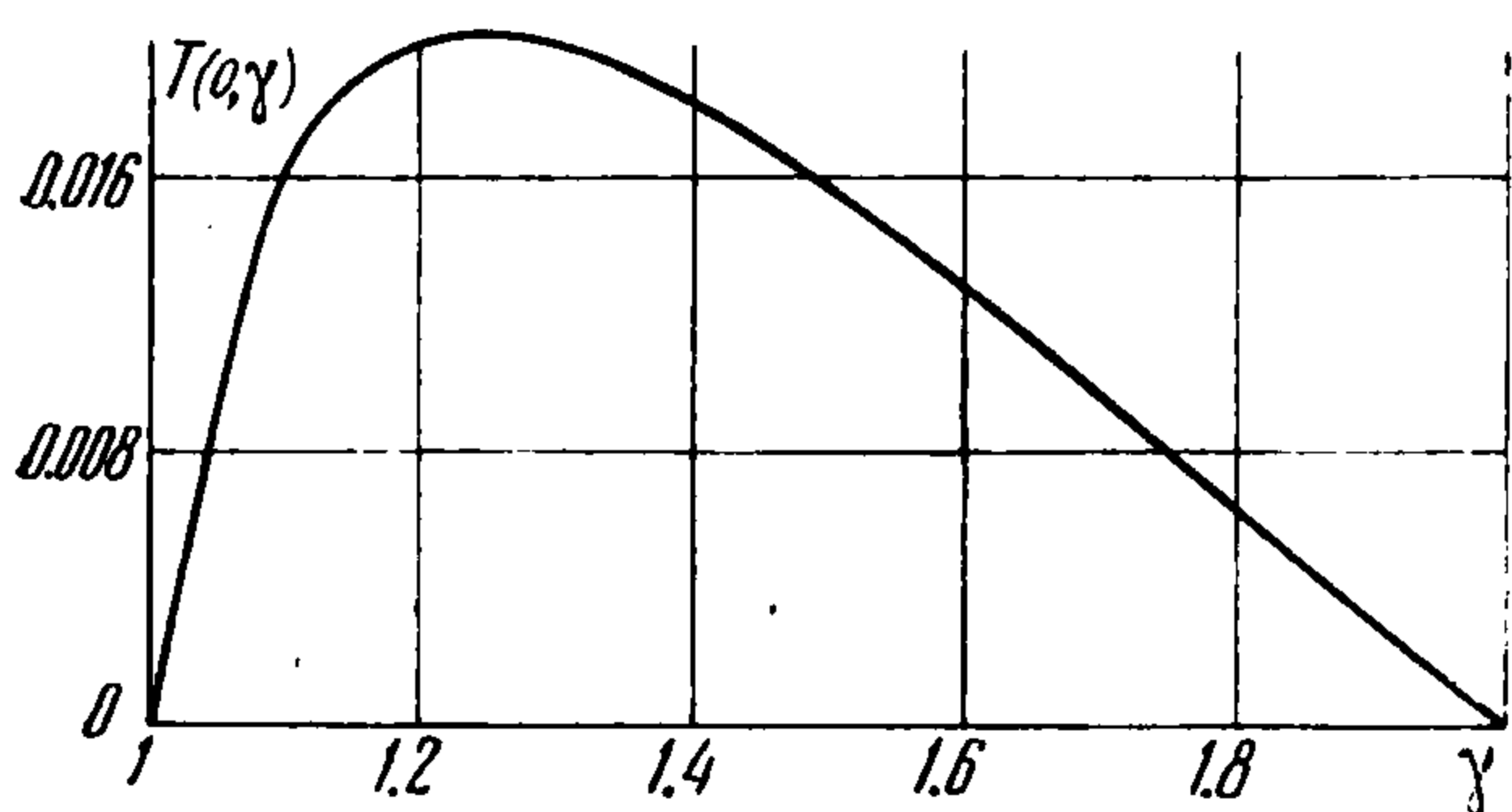
$$q_\Sigma = \sigma_0 u_0^2 Q_\Sigma$$

Здесь $\langle D^\circ \rangle$ — размерная осредненная скорость движения ударной волны, σ_0° — размерная проводимость, рассчитанная по параметрам (1.11), Q_Σ — безразмерная джоулева диссипация, соответствующая течению газа, скорость и проводимость которого равны единице. Величины δ , u_0 , a_0 , ρ_0 и α определяются формулами (1.11) и (2.4).

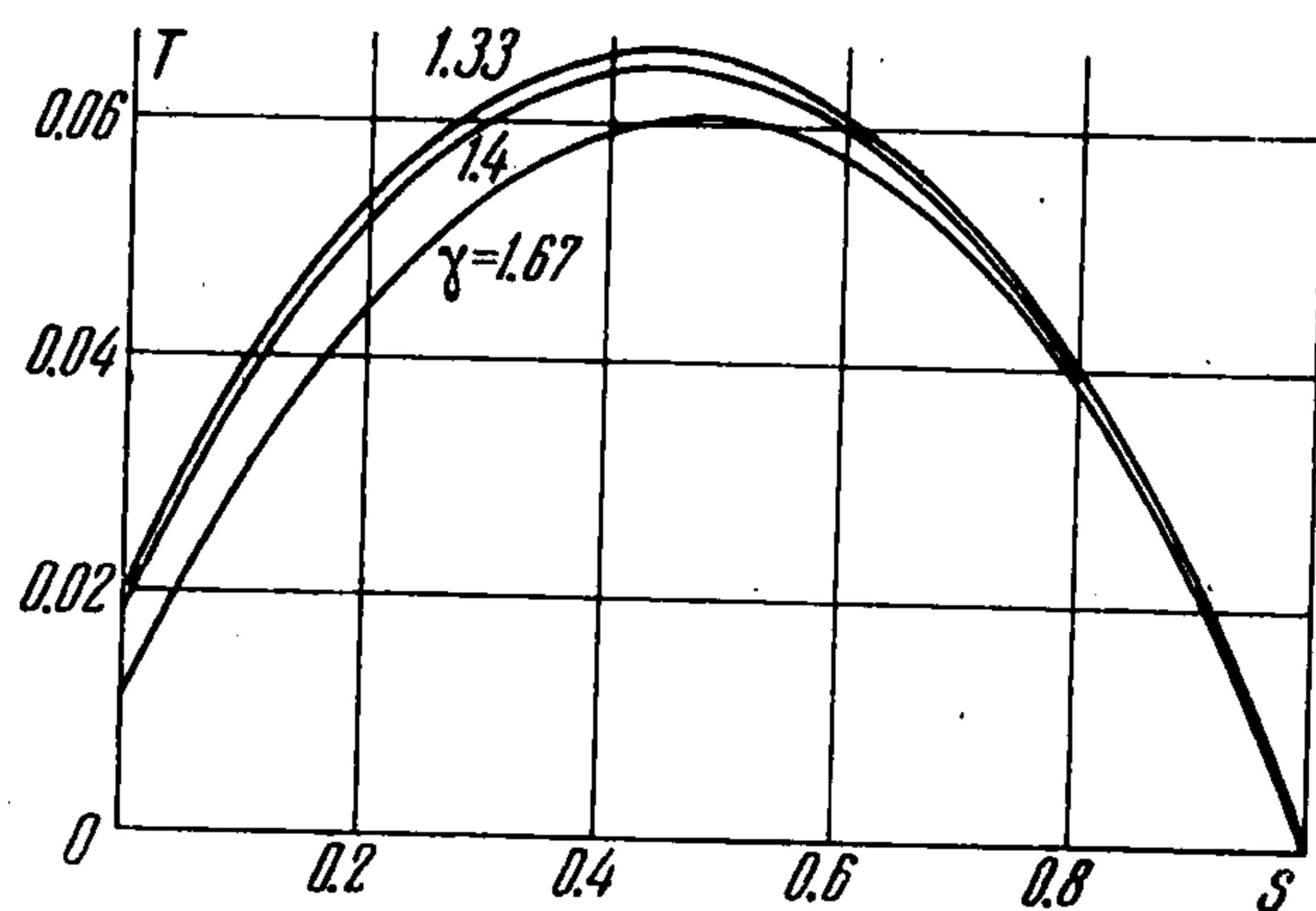
Джоулева диссипация Q_Σ представляет собой одну из важнейших характеристик магнитогидродинамических устройств, которая рассчитывалась во многих работах. Как следует из формулы (3.4), эта же величина Q_Σ дает возможность определить и результирующее изменение скорости движения ударной волны.

Исследуем некоторые свойства функции $T(s, \gamma)$. Прежде всего заметим, что параметр s изменяется от нуля (отсутствует противодавление, $M_\infty = (D_* / a_\infty) \rightarrow \infty$) до единицы (по газу распространяется слабый разрыв, $M_\infty = 1$, $M_0 = 0$).

Покажем, что функция $T(s, \gamma) > 0$, если $1 < \gamma < 2$. Для этого необходимо доказать неравенство: $r(s, \gamma) = 1 - (\gamma - 1)M_0 > 0$. Чтобы убедиться в его справедливости, заметим, что $\partial r / \partial s = -(\gamma - 1)\partial M_0 / \partial s > 0$ при $1 < \gamma < 2$, и, таким образом, достаточно проверить выполнение условия: $r(0, \gamma) > 0$. Используя (1.11), легко показать, что последнее неравенство всегда имеет место, когда величина γ находится в указанном интервале ее изменения.



Фиг. 4



Фиг. 5

Таким образом, при выполнении неравенства $1 < \gamma < 2$ взаимодействие ударной волны с магнитным полем в итоге вызывает уменьшение скорости ее распространения.

Для иллюстрации влияния параметров γ и s на асимптотическую скорость движения ударной волны на фиг. 4 и 5 соответственно представлены величина $T(0, \gamma)$ и функции $T(s, \gamma)$ при различных значениях γ . Обратим внимание, что $T(1, \gamma) = 0$, $T(s, 1) = 0$, $T(0, 2) = 0$, а при фиксированном γ имеется значение $s = s_{\max}(\gamma)$, при котором торможение ударной волны будет наибольшим.

Наиболее интересными с практической точки зрения являются ударные волны бесконечно большой интенсивности ($s = 0$). По всей видимости, распространение таких ударных волн наиболее близко соответствует движению плазмоидов в электроразрядных установках. Зависимость $T(0, \gamma)$, показанная на фиг. 4, дает возможность выяснить влияние величины γ на скорость распространения ударных волн в этом случае.

В дальнейшем будет рассмотрено несколько примеров движения ударных волн в неоднородных магнитных полях и определена скорость движения ударного фронта при произвольных значениях его координаты ζ .

4. Изучим движение ударной волны в круглой трубе ($\nu = 1$) при наличии внешнего осесимметричного магнитного поля¹.

$$\mathbf{b} = (b_y(x, y), 0, b_x(x, y)) \quad (4.1)$$

В этом случае $\nabla\phi \equiv 0$, и распределение электромагнитных параметров, на основании (2.2), представляется формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= (0, -\sigma_0 u_0 b_y, 0), & f_x &= -\sigma_0 u_0 b_y^2, & \langle f_x \rangle &= -\sigma_0 u_0 g(x) \\ q &= \sigma_0 u_0^2 b_y^2, & \langle q \rangle &= \sigma_0 u_0^2 g(x) & \left(g(x) &= \int_0^1 y b_y^2 dy \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Соотношения (4.1) выполняются в области между сечением $x = 0$ и ударной волной.

Характерной особенностью полученного распределения электромагнитных параметров является то обстоятельство, что плотность тока в каждой точке пространства после прохождения через нее ударной волны не зависит от времени.

¹ Используется цилиндрическая система координат y, θ, x .

Используя (2.11) и (3.2), для скорости движения ударной волны получаем следующее выражение:

$$\langle D^\circ \rangle - D_* = - \frac{\sigma_0^\circ B_*^2 h}{c^2 \rho_\infty} T(s, \gamma) K(\zeta), \quad K(\zeta) = \int_0^\zeta g(x) dx \quad (4.3)$$

Входящие в (4.3) величины D° , σ_0° и T определяются так же, как в формулах (3.4); $x = \zeta$ представляет собой текущую координату ударной волны.

Как следует из формулы (4.3), неравенств $g \geq 0$, $T \geq 0$, распространение ударной волны в круглой трубе при наличии осесимметричного магнитного поля сопровождается непрерывным торможением ударного фронта.

Для проведения конкретных вычислений удобно обозначить посредством x_0 координату некоторой характерной точки в зоне магнитного поля и ввести переменную $x - x_0 = X$. Учитывая асимптотический характер затухания магнитного поля, можно принять, что $x_0 \gg 1$. В этом случае получаем

$$K = \int_{-x_0}^{\zeta - x_0} g dX \approx \int_{-\infty}^{\zeta - x_0} g dX \quad (4.4)$$

В качестве примера рассмотрим распространение ударной волны в магнитном поле, которое в области канала не сильно отличается от осевого. Для того чтобы такая ситуация имела место, достаточно предположить, что радиус трубы h значительно меньше характерного радиуса соленоидальных обмоток H ($\varepsilon = h/H \ll 1$).

В этом случае величину b_y можно аппроксимировать следующим выражением [6]:

$$b_y = - \frac{\tau'(\xi) \eta}{2} + O(\eta^3) \quad \left(\tau' = \frac{d\tau}{d\xi}, \quad \xi = \frac{X^\circ}{H}, \quad \eta = \frac{y^\circ}{H} \right) \quad (4.5)$$

где $\tau(\xi)$ — распределение осевой составляющей поля b_x при $y = 0$.

Интеграл, входящий в формулу (4.4), с помощью (4.5) представляется в виде

$$K = \int_{-\infty}^{\zeta - x_0} g dX = \frac{\varepsilon}{16} \int_{-\infty}^{\mu} \tau'^2(\xi) d\xi + O(\varepsilon^3) \quad \left(\varepsilon = \frac{h}{H} \ll 1, \quad \mu = \frac{\zeta^\circ - x_0^\circ}{H} \right) \quad (4.6)$$

Произведем расчеты для магнитного поля от токового витка радиуса H , расположенного в сечении $\xi = 0$, и поля полубесконечного соленоида того же радиуса. Функция $\tau(\xi)$ для этих полей выражается формулами

$$\tau(\xi) = (1 + \xi^2)^{-3/2} \quad (\text{виток}), \quad \tau(\xi) = 1/2 (1 + \xi(1 + \xi^2)^{-1/2}) \quad (\text{соленоид})$$

За характерное поле B_* , создаваемое токовым витком, принято поле в точке $\xi = 0$, $\eta = 0$, а в качестве характерного поля соленоида выбрана величина магнитной индукции при $\xi = \infty$.

Величина K для рассматриваемых случаев представляется в виде

$$K = K(\mu) = \frac{9\varepsilon}{16 \cdot 8 \cdot 48} \left[15 \left(\arctg \mu + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{15\mu^7 + 55\mu^5 + 73\mu^3 - 15\mu}{(1 + \mu^2)^4} \right] + O(\varepsilon^3) \quad (\text{виток})$$

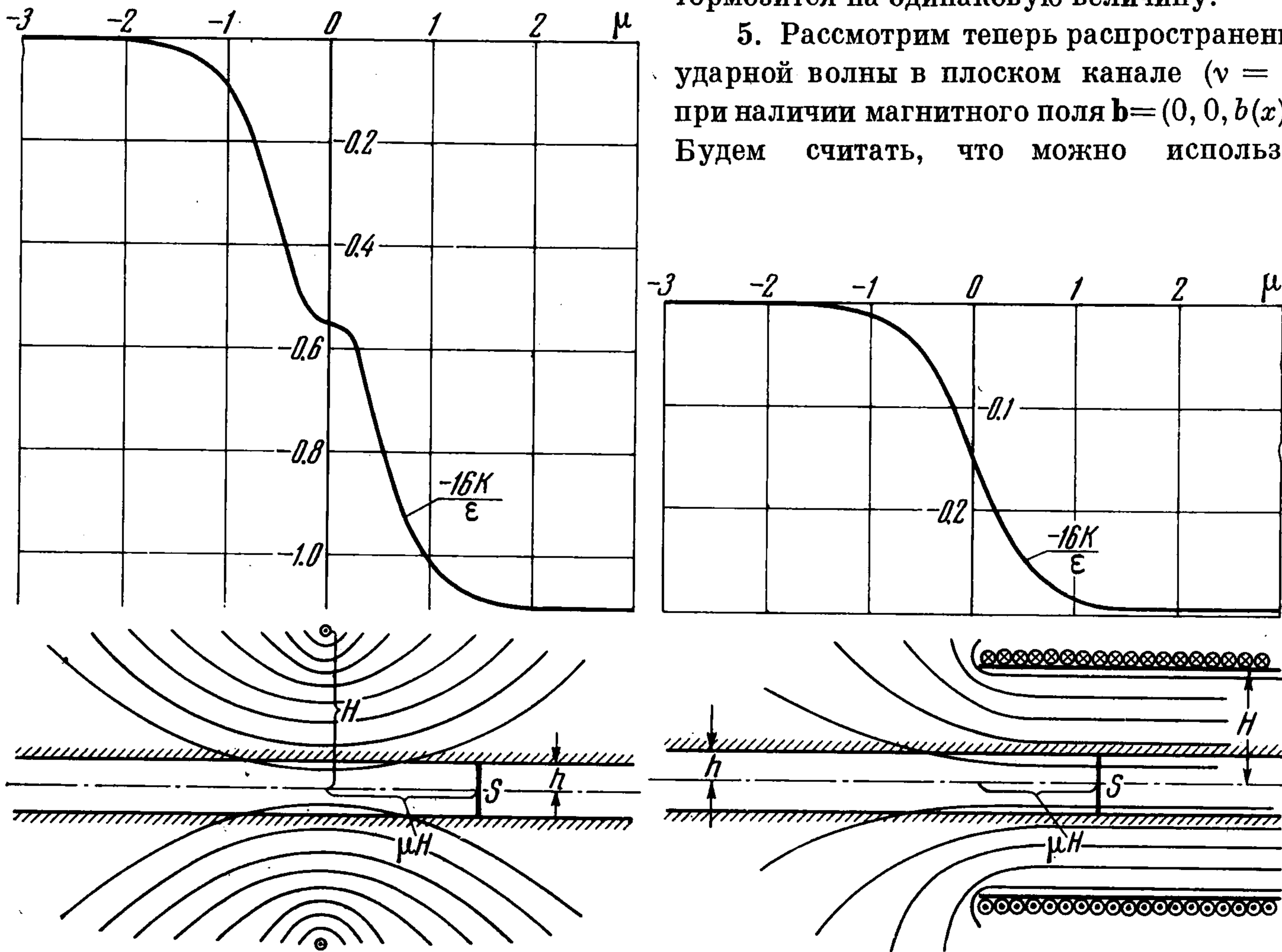
$$K = K(\mu) = \frac{\varepsilon}{16 \cdot 4} \left[\frac{5\mu + 3\mu^3}{8(1 + \mu^2)^2} + \frac{3}{8} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \mu \right) \right] + O(\varepsilon^3) \quad (\text{соленоид})$$

Зависимости $16K/\varepsilon$, иллюстрирующие динамику торможения ударной волны S в магнитном поле токового витка и соленоида, соответственно, представлены на фиг. 6 (члены $O(\varepsilon^3)$ не учитываются).

Заметим, что $K_{\max} = K(\infty) = 9 \cdot 15 \text{ эл} / (16 \cdot 8 \cdot 48)$ в случае магнитного поля витка и $K_{\max} = K(\infty) = 3\text{эл} / (16 \cdot 32)$ при движении ударной волны в поле соленоида.

Как следует из приведенных графиков, ударная волна в областях $\xi < 0$ и $\xi > 0$ тормозится на одинаковую величину.

5. Рассмотрим теперь распространение ударной волны в плоском канале ($v = 0$) при наличии магнитного поля $\mathbf{b} = (0, 0, b(x))$. Будем считать, что можно использо-



Фиг. 6

вать расчетную схему, показанную на фиг. 2. В отличие от течения в осесимметричном магнитном поле изучаемое движение характеризуется значительно более сложным законом распределения электромагнитных параметров в областях $0 < x < t$ (если $t < x^*$) и $0 < x < x^*$ (если $t > x^*$). Для определения тока \mathbf{j} в рассматриваемом случае необходимо решить следующую краевую задачу:

$$\Delta\omega = 0, \quad \partial\omega/\partial y = -b(x) \quad \text{при } y = 0, y = 1 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \begin{cases} x = t & (\text{если } t < x^*) \\ x = x^* & (\text{если } t > x^*) \end{cases}$$

$$\left(\mathbf{j}_0 = \sigma_0 u_0 \mathbf{J}, \quad \varphi_0 = u_0 \omega, \quad J_x = -\frac{\partial\omega}{\partial x}, \quad J_y = -\frac{\partial\omega}{\partial y} - b(x) \right)$$

Обратим внимание, что время t характеризует положение ударной волны ¹ и входит в систему (5.1) в качестве параметра. Если $t < x^*$, то задача (5.1) должна решаться в области $0 < x < t$, $0 < y < 1$, и величина \mathbf{J} оказывается зависящей от t : $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, t)$. Если же $t > x^*$, то уравнение (5.1) необходимо рассматривать в области $0 < x < x^*$, $0 < y < 1$, и поэтому $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x)$.

¹ Напомним, что уравнение $x(t) = t$ представляет собой закон движения ударной волны при $N = 0$.

Величины $\langle f_x \rangle$, $\langle q \rangle$ и интеграл, входящий в формулы (2.11), вычисляются с помощью соотношений (2.3)

$$\langle f_x \rangle = \sigma_0 u_0 F, \quad F = F(x, t) = \int_0^1 J_y b dy \quad (5.2)$$

$$\langle q \rangle = \sigma_0 u_0^2 Q, \quad Q = Q(x, t) = \int_0^1 (J_x^2 + J_y^2) dy, \quad \int_{A'A} G dx = \sigma_0 u_0 R(\zeta), \quad \zeta = x(A)$$

$$R = R(\zeta) = \int_0^\zeta [a_0 F(x, z) + (\gamma - 1) u_0 Q(x, z)] dx, \quad z = \zeta - \frac{\zeta - x}{u_0 + a_0}$$

Возмущения газодинамических параметров на ударной волне находятся по формулам (2.11) с учетом (5.2) и соотношений (1.11) и (2.4) для определения u_0 , a_0 и α , β , δ . Выражение для скорости движения ударной волны можно представить в виде:

$$\langle D^\circ \rangle - D_* = \frac{\sigma_0 B_*^2 h}{c^2 \rho_\infty} \frac{T(s, \gamma)}{[a_0 - (\gamma - 1) u_0]} R(\zeta) \quad (0 < \zeta < \infty)$$

$$D^\circ = D_* \quad (\zeta < 0) \quad (5.3)$$

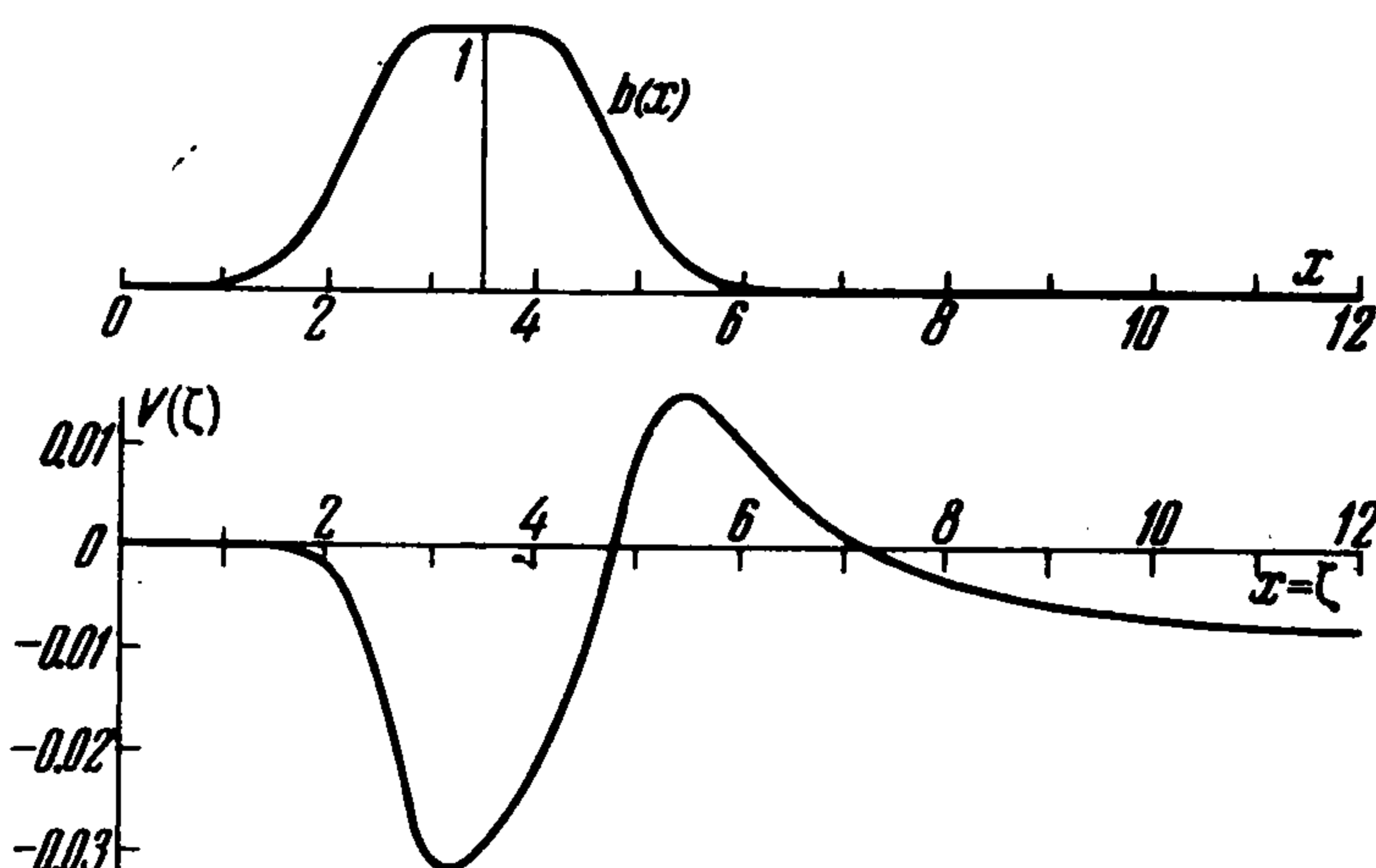
При вычислении функции R по формуле (5.2) необходимо различать следующие интервалы изменения ζ : $(0, x^*)$, (x^*, x^{**}) и $x > x^{**}$, где величина x^{**} определяется формулой (3.1). В первом из указанных диапазонов функции F и Q на соответствующих характеристиках $A'A$ зависят от двух аргументов x и t . Когда ζ принадлежит второму интервалу (например, точка K , фиг. 3), то на характеристике $K'K$ имеется точка L ее пересечения с прямой $t = x^*$, которая делит $K'K$ на участок $K'L$, где $F = F(x, t)$, $Q = Q(x, t)$ и участок LK , где $F = F(x)$, $Q = Q(x)$ при $x(L) < x < x^*$ и $F = 0$, $Q = 0$ при $x^* < x < x(K)$.

Если же $x > x^{**}$, то, как было указано в п.3, функции F и Q зависят только от x на пути интегрирования вдоль характеристики от $x = 0$ до $x = x^*$ и равны нулю при $x > x^*$. В этом случае

$$R(\zeta) = -[a_0 - (\gamma - 1) u_0] Q_\Sigma, \quad Q_\Sigma = \int_0^{x^*} Q(x) dx$$

и формула (5.3) переходит в выражение (3.4).

В качестве примера было рассмотрено распространение ударной волны в магнитном поле, которое определяется следующей зависимостью: (5.4)



Фиг. 7

$$b(x) = \begin{cases} \exp[-(x-3)^2] & (0 < x < 3) \\ 1 & (3 < x < 4) \\ \exp[-(x-4)^2] & (4 < x < 7) \end{cases}$$

Магнитное поле (5.4) показано на фиг. 7.

Предварительные расчеты стационарных электрических полей при указанной геометрии магнитного поля показали, что в сечениях $x = 0$ и $x = 7$ электрические токи практически равны нулю.

Поэтому при решении задачи (5.1) было принято, что $x^* = 7$.

Решение системы уравнений (5.1) при произвольном положении передней границы области, занятой электрическими токами, было получено при помощи численных методов. По найденным значениям $F(x, t)$ и $Q(x, t)$ были определены возмущенные параметры газа за ударной волной и вычислена скорость движения ударного фронта.

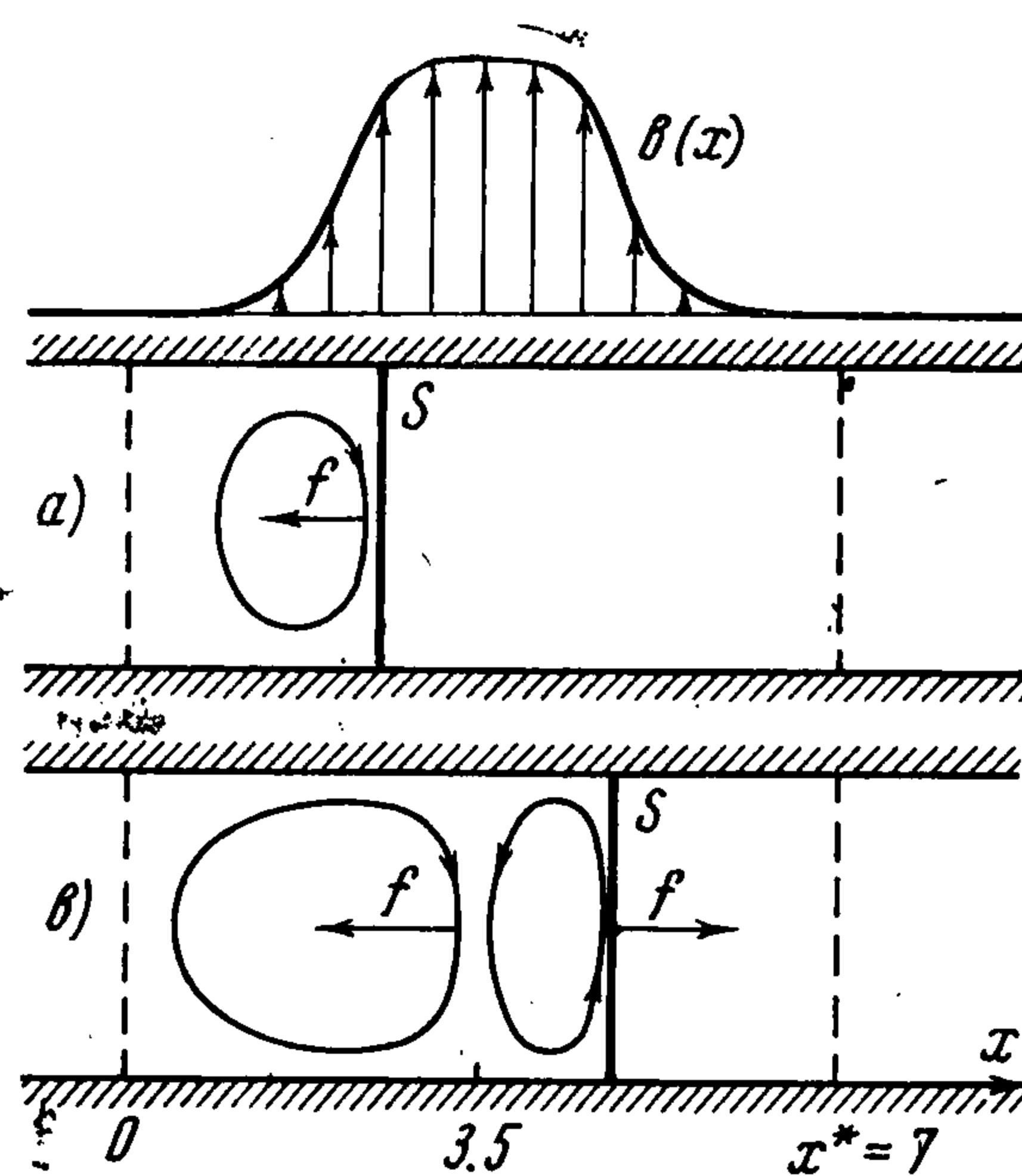
Динамика движения ударной волны по каналу при наличии магнитного поля (5.4) показана на фиг. 7, где представлена рассчитанная для $\gamma = 1.42$ и $s = 0$ зависимость $V(\zeta)$, определяемая выражением (см. формулу (5.3))

$$\langle D^\circ \rangle - D_* = 0.204 \frac{\sigma_0^\circ B_*^2 h}{c^2 \rho_\infty} V(\zeta) \quad \text{при } 0 < \zeta < \infty$$

$$D^\circ = D_* \quad \text{при } \zeta < 0 \quad (5.5)$$

Как следует из фиг. 7, скорость распространения ударной волны по длине канала изменяется крайне немонотонно. При движении ударного фронта в верхней по потоку концевой зоне магнитного поля ($\zeta < 3.5$) наблюдается уменьшение скорости ее распространения ($V < 0, dV/d\zeta < 0$). Это связано с формированием концевотока в области $0 < x < 3.5$, ориентированного таким образом, что сила, действующая на слой газа вблизи ударной волны S , оказывается тормозящей (фиг. 8, а).

Далее, когда ударная волна входит в верхнюю по потоку концевую зону магнитного поля ($\zeta > 3.5$), скорость ударной волны начинает увеличиваться ($dV/d\zeta > 0$). Такой характер зависимости можно объяснить формированием второго витка концевотока, взаимодействующего с магнитным полем таким образом, что сила, действующая на слой газа вблизи ударной волны S , оказывается ускоряющей (фиг. 8, б).



Фиг. 8

Соответствующие возмущения догоняют ударную волну, вызывая ее ускорение. При некотором ζ величина V достигает максимальной величины $V_{\max} > 0$ и затем начинает убывать, выходя на асимптотическое значение $V = V_\infty = -T(0, 1.42)Q_\Sigma / 0.204$. Указанное уменьшение скорости ударной волны объясняется тем, что возмущающие факторы $\langle f_x \rangle$ и $\langle q \rangle$ непосредственно за фронтом ударной волны, занимающей положения $\zeta > 5$, практически равны нулю, а суммарное воздействие возмущений, генерированных в области $0 < x < x^*$, как было показано в п.3, вызывает торможение ударной волны.

Наличие ускорения фронта движущейся плазмы в зоне выхода из магнитного поля было отмечено ¹ в экспериментах [4,5].

¹ При проведении дальнейших экспериментальных исследований автором работ [4,5] было замечено, что скорость фронта плазмы за зоной неоднородного магнитного поля умеренной величины (когда $N < 1$) возрастает настолько, что превосходит свое первоначальное значение D_* , а затем убывает до величин, меньших D_* (устное сообщение). Нетрудно видеть, что такая же закономерность обнаружена в проведенном выше теоретическом исследовании нестационарного движения газа. Имеющее место количественное расхождение теоретических и сообщенных экспериментальных данных объясняется прежде всего наличием (в эксперименте) индуцированных магнитных полей и использованием (при теоретическом анализе) соотношений на ударной волне в качестве граничных условий на плазменном фронте.

Удовлетворительное качественное совпадение теоретических и экспериментальных результатов дает возможность надеяться, что многие особенности магнитогазодинамических течений в импульсных электроразрядных установках и ударных трубах могут быть объяснены на основе обычных газодинамических представлений.

Расчеты, проведенные при $\gamma = 1.67$ и $s = 0$, показали, что характер движения ударной волны остается без изменения.

6. Выше уже было отмечено, что формулы (2.11) и (2.12) позволяют рассчитывать возмущения газодинамических параметров после того, как найдены силы и источники тепла $\langle f_x \rangle$ и $\langle q \rangle$. Распределения этих величин становятся известными после решения системы уравнений для электрических параметров (j_0, φ_0), простейшая запись которой представлена выражениями (2.2). Системы уравнений типа (2.2) уже давно являются предметом интенсивного исследования (см., например, [3]). Поэтому представляется широкая возможность использовать уже полученные данные и расчетные схемы для изучения движения ударных волн в каналах при наличии анизотропии проводимости, индуцированных магнитных полей, генераторного и ускорительного режимов течений и т.д.

Используя накопленные сведения о влиянии различных параметров на интегральные характеристики магнитогидродинамических устройств, можно сразу сделать ряд выводов о величине торможения ударной волны в магнитном поле. Прежде всего следует заметить, что при течении газа в канале с непроводящими стенками величина джоулевой диссипации Q_Σ при увеличении параметра Холла β и магнитного числа Рейнольдса R_m уменьшается. Поэтому, согласно формуле (3.4), с ростом β и R_m будет уменьшаться и безразмерная характеристика торможения ударной волны $\epsilon(\infty)$, где $\epsilon(\zeta) = (\langle D^\circ \rangle - D_*) / D_* N$. Соответствующие кривые $\epsilon = \epsilon(\zeta)$ при увеличении R_m должны все более смещаться вправо, что является следствием сноса потоком газа магнитных силовых линий.

При рассмотрении движения ударной волны в канале магнитогидродинамического генератора необходимо иметь в виду, что кинетическая энергия газа преобразуется как в электроэнергию P , выделяемую на внешней нагрузке, так и джоулеву теплоту Q . Используя известное энергетическое соотношение $A = Q + P$ между работой A среды по преодолению сопротивления магнитного поля и величинами Q и P , можно показать, что асимптотическое выражение для скорости движения ударной волны будет иметь вид

$$\langle D^\circ \rangle - D_* = - \frac{\sigma_0 B_*^2 h}{c^2 \rho_\infty} \frac{T(s, \gamma)}{[a_0 - (\gamma - 1) u_0]} \{ Q_\Sigma [a_0 - (\gamma - 1) u_0] + a_0 P_\Sigma \}$$

$$P = \frac{\sigma_0 B_*^2 h^2 D_*^2}{c^2} u_0^2 P_\Sigma$$

Величины, входящие в формулы (6.1), определены в (3.4).

В заключение автор выражает признательность Е. К. Холщевниковой, выполнившей численное интегрирование системы (5.1), а также А. Н. Крайко за ряд полезных замечаний.

Поступила 30 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Mir e l s H., B r a u n W. H. Perturbed one-dimensional unsteady flows including transverse magnetic field effects. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 3, pp. 259—285.
2. R o s c i s z e w s k i J., O p p e n h e i m A. K. Shock interactions with an electromagnetic field. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 5, pp. 689—698.
3. В а т а ж и н А. Б., Р е г и р е р С. А. Электрические поля в каналах магнитогидродинамических устройств. Доп. к кн. Шерклиф Дж. «Теория электромагнитного измерения расхода», М., «Мир», 1965.
4. К а ш к и н Ю. Ф. О торможении сгустка плазмы в неоднородном магнитном поле. ПМТФ, 1969, № 3.
5. К а ш к и н Ю. Ф. Исследование концевых электрических токов при движении плазмы по каналу электроразрядной трубы через неоднородное магнитное поле. ПМТФ, 1970, № 1.
6. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М. Движение осесимметричной струи газа с малой проводимостью в осесимметричном магнитном поле. Докл. АН СССР, 1960, т. 131, № 1.