

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ О ДЕФОРМИРОВАНИИ УПРУГИХ ТЕЛ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

К. Ш. Ходжаев

(Ленинград)

Описывается постановка «упруго-линейных» задач нелинейной теории магнитоупругости. Под задачей магнитоупругости понимается задача об определении магнитного поля в области, включающей упругие тела, и деформированного состояния этих тел под действием пондеромоторных сил. Рассматриваются ситуации, когда приемлемы предположения линейной теории упругости, но необходимо учитывать зависимость поля от перемещений. Выделены два класса задач, охватывающих соответственно равновесие ферромагнитных тел и проводников с токами, расположенных на расстояниях, сравнимых с упругими перемещениями. В качестве примеров рассмотрены изгиб ферромагнитной мембраны и струны-полоски магнитом и равновесие гибких проводников. Для круглой мембраны задача сводится к неизученному случаю уравнения Эмдена — Фаулера. Показано, что система может иметь сколь угодно много и даже бесконечно много форм равновесия. Задача о равновесии линейных проводников сведена к определению замкнутых и самопересекающихся траекторий точки в поле центральных сил, величина которых обратно пропорциональна расстоянию. Найдены плоские формы равновесия. Сформулирован ряд других краевых задач теории.

§ 1. Упруго-линейные задачи нелинейной теории магнитоупругости. Рассмотрим совокупность упругих тел в магнитном поле. Как обычно в электродинамике, будем считать известной напряженность поля сторонних электродвижущих сил; она может быть задана как функция либо пространственных координат, либо упругого элемента. Известными функциями координат считаем также магнитную проницаемость μ и проводимость σ в недеформированном состоянии. Рассматриваем магнито-линейные среды¹. Плотность объемных сил \mathbf{f} примем в виде

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{1}{2} H^2 \text{grad } \mu \quad (1.1)$$

где \mathbf{j} — плотность тока, \mathbf{B} — индукция, H — напряженность магнитного поля. Предельным переходом из (1.1) определяется плотность поверхностных сил на поверхностях разрыва μ и плотность поверхностных или линейных сил в случаях, когда рассматриваются поверхностные или линейные токи. Остальные пондеромоторные силы и стрикционные эффекты не учитываются. Ограничимся задачей о равновесии. Требуется найти \mathbf{j} , \mathbf{B} и вектор упругих перемещений \mathbf{u} , вызванных силами \mathbf{f} . Эти векторные поля должны определяться совместно. Действительно, \mathbf{j} и \mathbf{B} зависят от \mathbf{u} , поскольку перемещения влияют на распределение μ и проводимости σ в пространстве, а \mathbf{u} определяется силами \mathbf{f} , зависящими от \mathbf{j} и \mathbf{B} .

Будем считать перемещения малыми и примем предположения линейной теории упругости. Опишем две ситуации, когда и при этих предполо-

¹ Требуемые далее значения μ могут иметь только ферромагнетики, которые, таким образом, рассматриваются как магнито-линейные вещества с большой магнитной проницаемостью.

жениях необходимо учитывать зависимость поля от перемещений. Первая из них возникает, когда упругая система включает близко расположенные ферромагнитные тела, вторая — когда она содержит проводники с токами, расположенные в сильно неоднородном поле. Кроме того, должны выполняться еще некоторые условия; они перечисляются далее.

Пусть имеются тела, расположенные в пространстве так, что расстояния между некоторыми участками их поверхностей малы (в указанном ниже смысле). Предполагаем, что все три размера тел одного порядка, а оба размера близкорасположенных участков поверхностей соизмеримы с характерным размером тел. При этом близкорасположенные участки должны иметь «подходящую» форму (чтобы поверхности могли «примыкать» одна к другой в области значительных размеров); например, они могут быть плоскими. Считаем также, что хотя бы один из близкорасположенных участков поверхностей не закреплен.

Для характерных значений приняты следующие обозначения: l — размеры тел, Δ_0 — расстояния между близкорасположенными участками, отсчитываемые по нормали к одной из поверхностей, a — упругие перемещения, μ_1 и μ_0 — магнитные проницаемости тел и окружающей неупругой среды. Отношение a/l считается малым; его величина служит критерием малости перемещений.

В описываемой ситуации должны выполняться следующие условия: $\Delta_0/l = O(a/l)$, т. е. перемещения, в том числе и относительные смещения близкорасположенных поверхностей по нормальям к ним, сравнимы с расстояниями между телами; $\mu_0/\mu_1 = O(\Delta_0/l)$, т. е. отношение магнитных проницаемостей окружающей среды и тел мало (допустимы и большие значения μ_1 , когда $\mu_0/\mu_1 \sim (\Delta_0/l)^2$ и т. п.); значение проницаемости порядка μ_1 достигается на расстояниях порядка Δ_0 или меньших от поверхностей тел; характерная индукция B_0 в области между примыкающими поверхностями на порядок больше индукции B_2 в окружающей среде на расстояниях порядка l от поверхностей тел, т. е. $B_2/B_0 = O(\Delta_0/l)$.

Последнее предположение накладывает ограничения на форму тел и конфигурацию токов. Они должны быть такими, чтобы «число» линий индукции, замыкающихся по пути «точка внутри тела — промежуток между примыкающими поверхностями — другое тело — другой промежуток и т. д. — исходная точка внутри первого тела», значительно превосходило число линий, проходящих расстояние порядка l вне тел. При этом характерная индукция B_1 внутри тел будет сравнимой с B_0 .

При принятых предположениях индукция B , а следовательно, и силы f будут существенно зависеть от перемещений. Действительно, рассмотрим два контура C_* и C , проходящие через одни и те же упругие точки, первый в недеформированной, второй в деформированной системах и замыкающиеся только через тела и узкие промежутки между ними. Пусть S_* и S — поверхности, опирающиеся на C_* и C , а n_* и n — нормали к ним. Из соотношений

$$\oint_{C_*} \mathbf{H}_* d\mathbf{C}_* = \int_{S_*} \mathbf{j}_* \cdot \mathbf{n}_* dS_*, \quad \oint_C \mathbf{H} d\mathbf{C} = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.2)$$

следуют примерные равенства

$$B_{0*} \Delta_0 \mu_0^{-1} + B_{1*} l \mu_1^{-1} = I_*, \quad B_0 (\Delta_0 + a) \mu_0^{-1} + B_1 l \mu_1^{-1} = I \quad (1.3)$$

Здесь и далее величины со звездочками относятся к недеформированному, без звездочек — к деформированному состояниям; I, I_* — характерные полные токи. Исходя из принятых оценок Δ_0, a, l, μ_0 и μ_1 , можно теперь оценить порядок изменения индукции при деформировании

$$\Delta B = B_0 - B_{0*} \sim (a / \Delta_0) B_0 \quad (1.4)$$

в случае, если полный ток неизменен. Из (1.4) видно, что $\Delta B / B_{0*} = O(1)$.

Изменение конфигурации токов также дает некоторый вклад в ΔB , но даже если им пренебречь, задача магнитоупругости будет «перевязанной» и нелинейной. Однако если $\Delta_0 / l = O(1)$ или $\mu_0 / \mu_1 = O(1)$, а токи «разнесены» на расстояние порядка l (см. далее), то токи, поле и силы f можно искать для недеформированного состояния. Задача тогда распадается на задачу о стационарном распределении токов, задачу магнитостатики и задачу теории упругости, решаемые последовательно. Решение при этом находится с точностью до старших членов относительно a / l , которые все равно отбрасываются в линейной теории упругости.

В случае магнитно-нелинейных сред постановка задачи сохраняется, только под μ_1 нужно понимать характерное значение dB / dH в веществе. Кроме того, должно выполняться требование, чтобы зоны, где H настолько велико, что $dB / dH = O(\mu_0)$, не изменяли описанного выше распределения линий индукции. Так будет, например, если размеры этих зон порядка Δ_0 .

Как указывалось, $|\text{град } \mu|$ вблизи поверхностей тел должен быть достаточно велик. Поэтому с точностью до старших членов относительно a/l , силы $H^2 \text{град } \mu$, действующие в этих областях, можно рассматривать как поверхностную нагрузку даже при непрерывном возрастании μ в теле от значения $\mu = \mu_0$ до $\mu = O(\mu_1)$.

Задача может относиться не только к совокупности тел, но и к одному упругому телу, которое, однако, должно иметь специфические очертания. (Например, ферромагнитный тор с узким вырезом, ограниченным плоскостями, нормальными к оси тора. Нагрузка будет при этом приложена к границам выреза.)

Допустимы следующие изменения описанной выше основной ситуации. Наряду со случаем $B_2 / B_0 = O(\Delta_0 / l)$ возможен и случай $B_2 / B_0 = O(1)$, но он должен получаться из предыдущего «наложением» на всю систему поля, характерная индукция которого B_2 как вблизи, так и вдали от тел сравнима с имевшейся ранее индукцией B_0 . (Для создания этого поля нужны токи на порядок большие первоначальных.) Случай же, когда $B_2 / B_0 = O(1)$ и все линии индукции проходят вне тел путь порядка l , исключается. Допускается также случай, когда $B_1 \gg B_0$ за счет введения дополнительного поля, почти все силовые линии которого располагаются целиком внутри одного тела. Наконец, можно рассматривать тела с сильно различающимися размерами в трех направлениях. Далее разбираются лишь те случаи, когда $a, \Delta_0 \ll b$, b — наименьший размер близкорасположенных поверхностей, соизмеримый со «вторым» размером тела. Но тре-

тий размер тела h может быть порядка a , например при изгибе стержня. Тогда следует принять другое предположение о малости отношения μ_0 / μ_1 , т. е. считать $\mu_0 / \mu_1 = O(bh / l^2)$ и т. п., где l — наибольший характерный размер тела.

Рассмотрим вторую основную ситуацию, в которой силы зависят от перемещений. Здесь требуется, чтобы нагрузка создавалась воздействием на токи сильно неоднородного поля, например, такого, что $a | \text{grad } V | \sim V$. Пусть в теле с достаточно гладкой поверхностью протекают объемные или поверхностные токи. Пусть точки тела получают перемещения порядка a , малые по сравнению с его размерами. Тогда во всем пространстве, включая область вблизи поверхности тела, изменения поля будут малы по сравнению с первоначальными значениями. Отсюда следует, что поле должно создаваться токами, протекающими либо в теле, у которого по крайней мере два размера Δ_0 сравнимы с перемещениями, либо в теле с сильно искривленной поверхностью (имеющей области, где одна из кривизн $k = O(1/a)$). Первый случай приводит к задаче о равновесии проводника типа тонкого стержня, расположенного либо вблизи другого подобного проводника, либо вблизи поверхности ферромагнетика.

Описанная выше постановка довольно естественна. Действительно, если требуется деформировать упругую систему силами \mathbf{f} , то ферромагнитные тела или проводники с токами рационально размещать на расстояниях, примерно равных требуемым упругим перемещениям. При этом в упругой области вполне возможны значения l/a , сравнимые с относительными магнитными проницаемостями ферромагнетиков μ_1/μ_0 или даже меньшие на порядок.

§ 2. Равновесие ферромагнитных тел. Нелинейные краевые задачи. При составлении уравнений линейной теории упругости удерживаются лишь младшие члены относительно a/l . Естественно поэтому удерживать только младшие члены и при определении \mathbf{j} и V . Далее рассматриваются некоторые случаи, когда в этом приближении можно проинтегрировать уравнения поля и выразить пондеромоторные силы через перемещения. В результате придем к нелинейной краевой задаче для одного u .

Об определении токов. Допустим, что можно пренебречь зависимостью проводимости от деформаций, токами Холла и т. п. и не учитывать отличные от указанных в § 1 причины возникновения нелинейности (например, влияние перемещений на токи за счет изменения сопротивления среды в области между близкорасположенными поверхностями). Пусть напряженность стороннего электрического поля задана как функция упругой точки. Тогда плотность тока можно определять согласно соотношению $\mathbf{j}(\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})) = \mathbf{j}_*(\mathbf{r})$, где \mathbf{r} — вектор координат точки тела в недеформированном состоянии, \mathbf{u} — ее перемещение, пренебрегая, в частности, изменением ориентации \mathbf{j} вследствие упругих поворотов. Этим токи оказываются выраженными через перемещения. К тому же зависимость от перемещений следует учитывать лишь для токов, взаимодействующих с другими близко расположенными токами, расстояние до которых существенно меняется при деформации (согласно § 1). Для остальных токов можно принимать $\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \mathbf{j}_*(\mathbf{r})$.

Для разыскания \mathbf{B} получается, следовательно, задача магнитостатики, где уравнения и краевые условия известным образом зависят от \mathbf{u} . При ее решении в задаче о равновесии ферромагнитных тел (о равновесии близко-расположенных проводников с токами см. § 5) и условия $B_2 / B_0 = O(\Delta_0/l)$ можно считать, что поле локализовано внутри тел и в промежутках между близкорасположенными поверхностями, т. е. $B = 0$ вне этих областей. Поле в промежутках между телами с указанной точностью в ряде случаев можно найти так.

Рассмотрим тонкий слой между кусками поверхностей σ_1 и σ_2 с заданным потенциалом $\varphi_1(M_1)$, $\varphi_2(M_2)$, M_1 — точка на σ_1 , M_2 — на σ_2 . Пусть два размера слоя сравнимы между собой (соответствующее характерное расстояние обозначим через l), а третий размер — расстояние между σ_1 и σ_2 (его характерное значение обозначим через Δ_0) мал по сравнению с l . Поверхности считаем достаточно гладкими, а их кривизны — порядка $1/l$ или меньшими. Обозначим через \mathbf{n}_1 орт нормали к σ_1 , направленной внутрь слоя, а через Δ_1 — длину ее отрезка между σ_1 и σ_2 . Для всех M_1 отношение $\Delta_1(M_1)/l$ порядка Δ_0/l . Если нормаль к σ_1 проходит через точки M_1 и M_2 на σ_1 и σ_2 и \mathbf{n}_2 — орт нормали к σ_2 , направленной из M_2 наружу, то угол между \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 порядка Δ_0/l ; с этой точностью \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 можно не различать. Пусть $|\text{grad } \varphi_{1,2}|$ «не велик», т. е. характерные значения $|\text{grad } \varphi_{1,2}| = O(\delta\varphi/l)$, где $\delta\varphi$ — характерное значение $|\varphi_1 - \varphi_2|$. Тогда решение задачи Дирихле (значения φ вне σ_1, σ_2 несущественны)

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi = \varphi_1 \text{ на } \sigma_1, \quad \varphi = \varphi_2 \text{ на } \sigma_2 \quad (2.1)$$

везде внутри слоя, кроме областей размеров $O(\Delta_0)$ вблизи краев будет

$$\varphi(M_1, \xi) = \frac{\varphi_2(M_2) - \varphi_1(M_1)}{\Delta_1(M_1)} \xi + \varphi_1(M_1) + \Delta_0/l \dots \quad (2.2)$$

Здесь точка внутри слоя, лежащая на нормали к σ_1 , проходящей через $M_1 \in \sigma_1$ и $M_2 \in \sigma_2$, определяется координатами точки M_1 и расстоянием ξ до σ_1 ; $0 \leq \xi \leq \Delta_1$. Если φ — скалярный магнитный потенциал, внутри слоя $\mathbf{j} = 0$ и $\mu = \mu_0 = \text{const}$, а σ_1 и σ_2 суть поверхности разрыва μ , то из (2.2) найдутся напряженность поля в слое \mathbf{H}_0 и поверхностная нагрузка, приложенная, например, к σ_1

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0 = \text{grad } \varphi &= - \frac{\varphi_2(M_2) - \varphi_1(M_1)}{\Delta_1(M_1)} \mathbf{n}_1 + \dots, \quad \mathbf{q}_1(M_1) = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \left[\frac{\varphi_2(M_2) - \varphi_1(M_1)}{\Delta_1(M_1)} \right]^2 \mathbf{n}_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

(при вычислении нагрузки согласно (1.1) члены порядка μ_0/μ_1 , естественно, отбрасываются). Этими соотношениями можно пользоваться и в случае, когда σ_1 и σ_2 имеют особенности типа ребер, зубцов и т. п. и $\Delta_1(M_1)$ разрывна. Из (2.3) тогда определяются \mathbf{H}_0 и \mathbf{q}_1 везде, кроме областей с размерами $O(\Delta_0)$ вблизи краев и разрывов. Вклад этих областей в \mathbf{q}_1 можно игнорировать. Соотношения (2.3) вообще неприменимы, если число разрывов сравнимо с l/Δ_0 (такие системы встречаются в технике).

Из выражения для энергии поля в слое

$$W_0 = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{H} dV = \frac{1}{2} \int_{V_1} \mu_0 \text{grad}^2 \varphi dV = \frac{1}{2} \mu_0 \int_{\sigma_1} \frac{(\varphi_2 - \varphi_1)^2}{\Delta_1} d\sigma_1 + \dots \quad (2.4)$$

следует, что силы q_1 можно определять, варьируя лишь W_0 ; вариация остальной части полной энергии поля дает вклад вида $(\mu_0 / \mu_1) q_1$. Но сама энергия поля в веществе W_1 в общем случае сравнима с W_0 , что видно из оценок $W_0 \sim \Delta_0 l^2 B_0^2 / \mu_0$, $W_1 \sim l^3 B_1^2 / \mu_1$.

Некоторой иллюстрацией к полученным соотношениям может служить следующее. Пусть σ_1, σ_2 суть одинаковые плоские фигуры площади S и $\varphi_2 - \varphi_1 = \text{const}$. Найдем силу Q_1 , притягивающую σ_1 к σ_2

$$Q_1 = \int_{\sigma_1} q_1 n_1 d\sigma_1 = \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 S$$

где B_0 — индукция в слое. Это известная приближенная формула Максвелла.

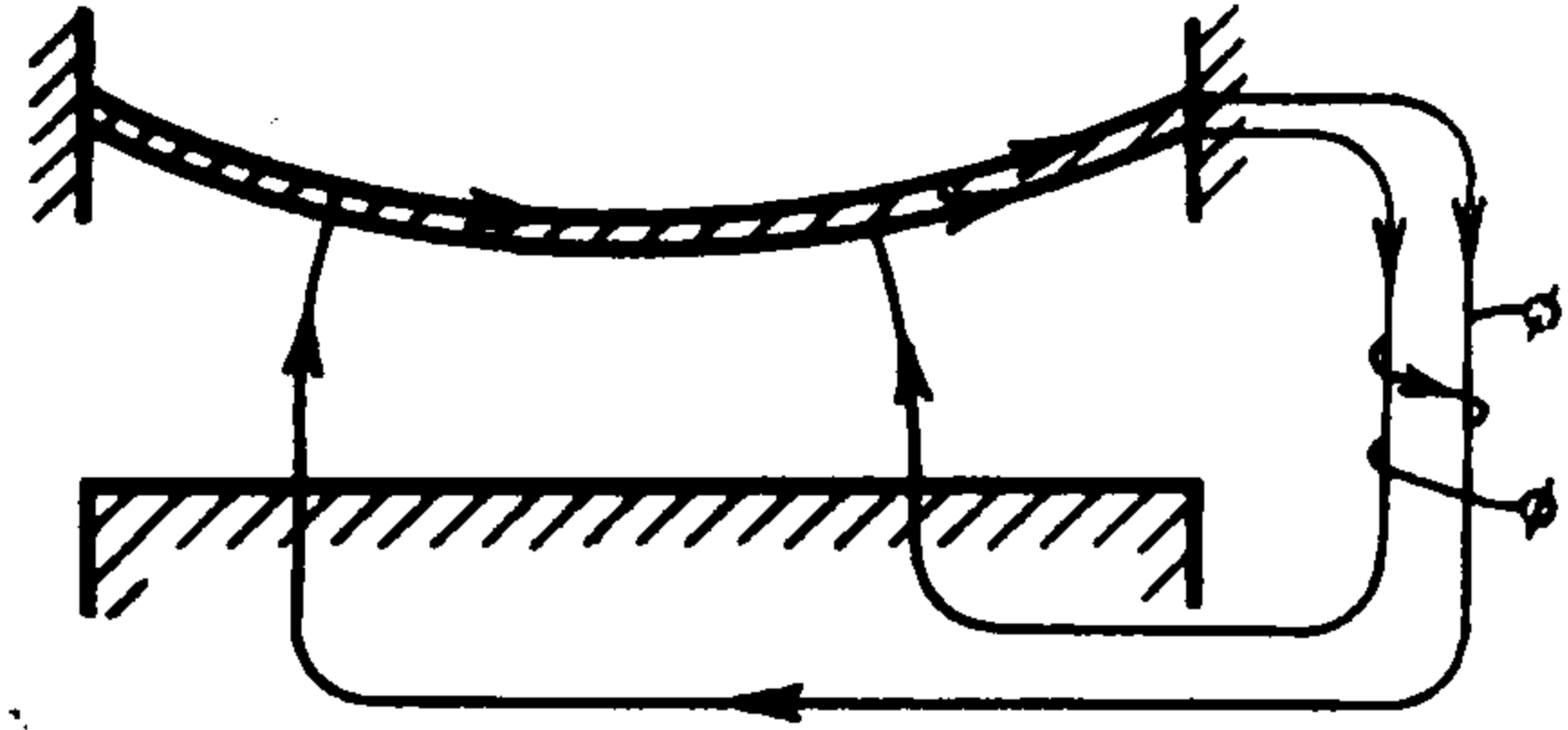
Соотношениями (2.2) и (2.3) поле между телами выражено через скалярный потенциал на их поверхностях и перемещения. Потенциал же должен быть найден из единой задачи об определении поля между телами и внутри них в зависимости от перемещений. Здесь могут представиться возможности для упрощений; рассмотрим некоторые из них.

Вообще говоря, как величины, так и направления векторов \mathbf{B} внутри тел существенно зависят от u . Возможны, однако, случаи, когда допустимо считать, что в веществе, исключая, быть может областей, вклад которых в энергию поля можно игнорировать, изменяются при деформировании только величины, но не направления \mathbf{B} . Для этого требуется, чтобы один из размеров тел l значительно превосходил два других размера b и h . Хотя здесь возможны различные ситуации, — например в зависимости от того, порядка l или b следует считать размеры близкорасположенных кусков поверхностей, в любом случае длина участка линии индукции, расположенного внутри тела, для «почти всех» линий будет сравнима с l и может быть найдена сразу. Кроме того, в телах такой формы обычно можно достаточно точно определить распределение \mathbf{B} в «нормальных» сечениях. Это позволяет связать u и $\varphi_2 - \varphi_1$ при помощи (1.2). Присоединяя затем полученные соотношения к уравнениям теории упругости, получим нелинейную систему относительно перемещений и скалярного потенциала (как ее составлять, будет показано на примере в § 3).

Проще других здесь тот случай, когда оба размера близкорасположенных участков порядка b , а длина отрезков силовых линий в веществе порядка l . Тогда φ_1, φ_2 с принятой точностью можно считать не зависящими от M_1, M_2 ; в результате приходим к краевой задаче для одного u . Однако значения потенциалов примыкающих поверхностей должны быть определены в ходе решения; они зависят от перемещений. Допустим теперь, что у системы, соответствующей последнему случаю, уменьшается l с сохранением других размеров. Когда l станет сравнимым с b , получится система, у которой следует считать $\mu = \infty$ внутри тела. При этом определение скалярных потенциалов существенно упрощается.

Составим уравнения равновесия нескольких конкретных систем. Будем вначале принимать $\mu = \infty$ внутри тел, а затем (в § 3) обсудим, как учесть неидеальность ферромагнетика.

Первой рассмотрим задачу об изгибе ферромагнитной мембраны электромагнитом. Считаем, что все линии индукции замыкаются согласно фиг. 1 и охватываются одним и тем же полным током I . Так как на всей их длине, кроме промежутка между мембраной и магнитом, принято $\mu = \infty$, то форма магнитопровода между мембраной и примыкающей к ней поверхностью ферромагнетика несущественна. Предполагается, что эта поверхность плоская и недеформируемая, а ее контур повторяет контур мембраны Γ' (или охватывает его). Разность скалярных потенциалов мембраны φ_1 и примыкающей поверхности будет $\varphi_1 - \varphi_2 = -I$. Обозначим через Δ_0 расстояние между мембраной и поверхностью магнита в положении равновесия, через u прогиб мембраны [и через T натяжение на единицу длины. При определении нагрузки в (2.3) нужно взять $\Delta_1 = \Delta_0 - u$. Положим $v = u/\Delta_0$, $\kappa^2 = \mu_0 I^2 / 2T \Delta_0^3$ и введем в области Γ' , занятой мембраной, безразмерные координаты, которые получаются умножением соответствующей размерной координаты на κ . Относя, как в линейной теории упругости, нагрузку к недеформированной мембране, получим уравнение равновесия



Фиг. 1

$$\Delta v + \frac{1}{(1-v)^2} = 0 \quad (2.5)$$

Краевое условие будет $v|_{\Gamma} = 0$; оператор Лапласа и кривая Γ задаются на плоскости безразмерных координат. Одномерный аналог уравнения (2.5)

$$v'' + \frac{1}{(1-v)^2} = 0 \quad (2.6)$$

описывает равновесие ферромагнитной струны-полоски, т. е. натянутой ленты, ширина которой b много раз меньше ее длины l , но много больше прогиба u . В (2.6) точка означает дифференцирование по τ , $v = v(\tau)$, $\tau = \kappa x$, x — координата, отсчитываемая вдоль струны, $\kappa = b\mu_0 I^2 / 2T_1 \Delta_0^3$, T_1 — натяжение.

Если примыкающая к мембране или струне поверхность ферромагнетика неплоская, то вместо (2.5) и (2.6) соответственно получим уравнения

$$\Delta v + \frac{1}{(f-v)^2}, \quad v'' + \frac{1}{(f-v)^2} = 0 \quad (2.7)$$

где $f = \Delta_{1*} / \Delta_0$ — известная функция точки, Δ_{1*} — расстояние между точками мембраны (струны) и магнита в положении равновесия, Δ_0 — любая постоянная.

Тем же путем составляется уравнение изгиба тонкой ферромагнитной пластинки

$$\Delta \Delta v - \frac{1}{(1-v)^2} = 0 \quad (2.8)$$

Его одномерный аналог

$$v^{IV} - \frac{1}{(1-v)^2} = 0 \quad (2.9)$$

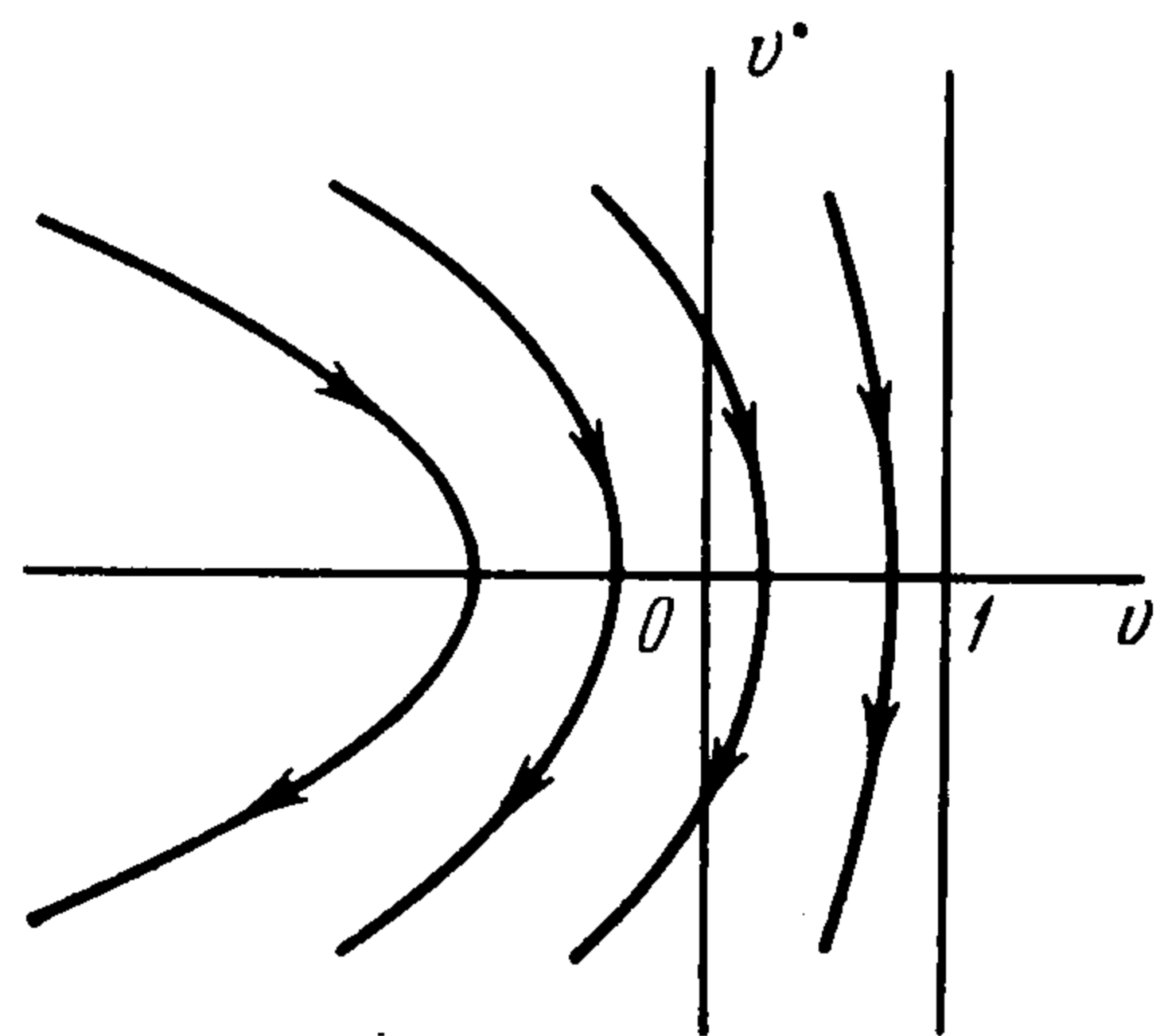
описывает изгиб балки. При неплоской поверхности магнита эти уравнения трансформируются к виду, аналогичному (2.7). Можно выписать и уравнения для пластинки переменной толщины и неоднородной балки. При этом, если нижняя поверхность пластинки или балки неплоская, то в (2.8) и (2.9) изменяется как первый (упругий), так и второй (магнитный) члены. Вообще нагрузка вида (2.3) может быть приложена к телам разной формы, что порождает много нелинейных краевых задач, относящихся к равно-

весью идеально ферромагнитных упругих тел. В случаях, когда на тело кроме электромагнитных сил действует некоторая заданная нагрузка, возникают задачи о «взаимодействии» этих двух факторов. Сделав в (2.7) замену $v_* = 1 - f + v$, получим уравнение

$$\Delta v_* + \frac{1}{(1 - v_*)^2} = -\Delta f \quad (2.10)$$

откуда следует, что искривление магнита в определенном смысле эквивалентно приложению заданной внешней нагрузки.

Очевидно, что уравнения типа (2.5) — (2.9) можно получить из вариационного принципа $\delta(\Pi - W_0) = 0$, где Π — потенциальная энергия. Он полезен, в частности, при исследовании устойчивости.



Фиг. 2

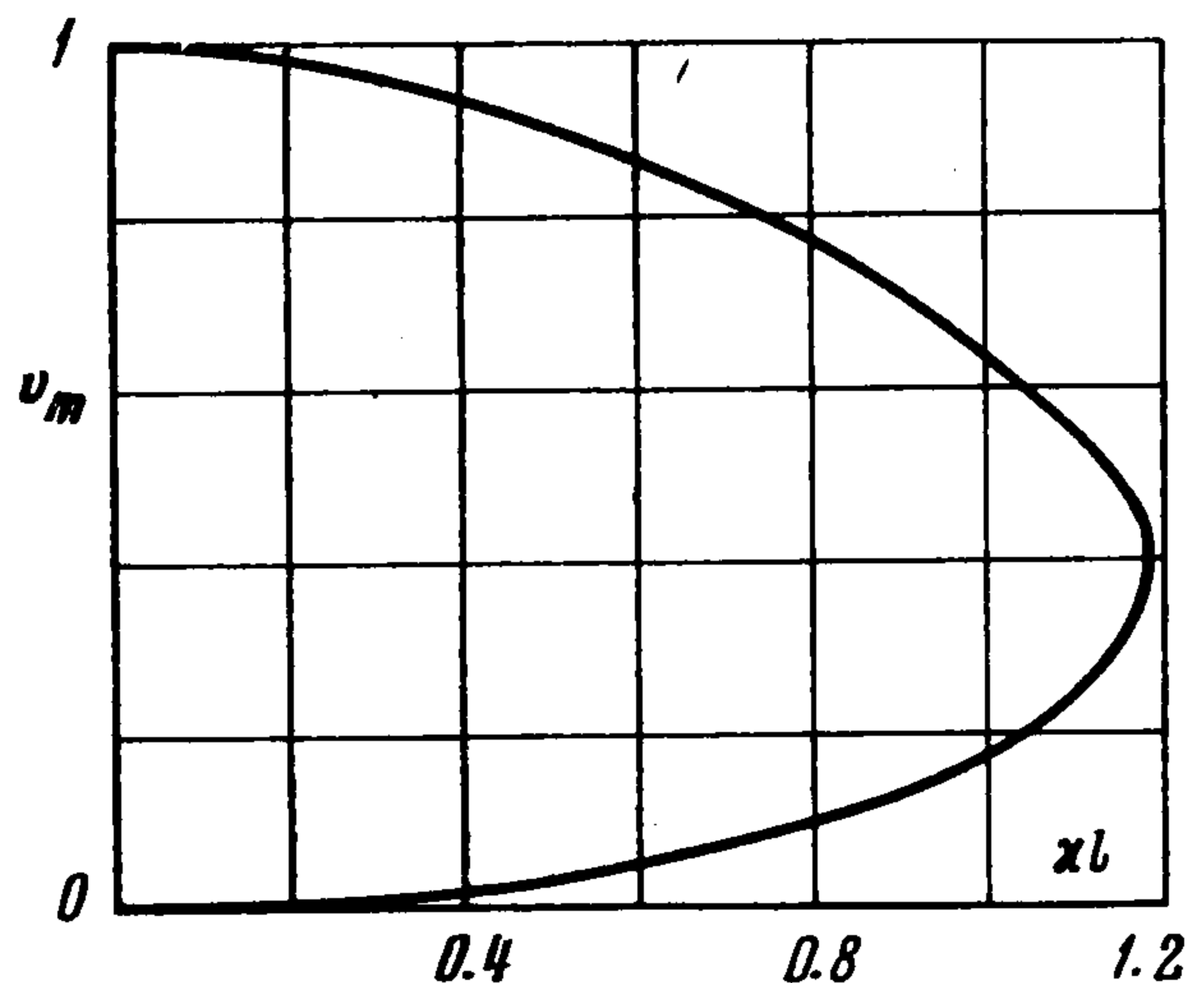
§ 3. Изгиб ферромагнитной струны-плоская. Кривая равновесий и их устойчивость. Рассмотрим закрепленную струну. Граничные условия в безразмерных переменных будут $v(0) = v(\kappa l) = 0$. Уравнение (2.6) допускает первый интеграл $v'^2 + (1 - v)^{-1} = \text{const}$, откуда следует, что интегральные кривые на плоскости v, v' симметричны относительно оси v (фиг. 2). Поэтому форма струны должна быть симметричной относительно оси, проходящей через ее середину; в середине достигается максимальное перемещение v_m . Постоянная в первом интеграле равна $(1 - v_m)^{-1}$. Дальнейшее интегрирование с учетом условия $v(0) = 0$ дает

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{1/2(1 - v_m)} \int_0^v \left(\frac{1 - z}{v_m - z} \right)^{1/2} dz = \\ &= \sqrt{1/2 v_m (1 - v_m)} - \sqrt{1/2 (1 - v_m) (1 - v) (v_m - v)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - v_m)^{3/2} \ln \frac{(1 + \sqrt{v_m})(\sqrt{1 - v} - \sqrt{v_m - v})}{(1 - \sqrt{v_m})(\sqrt{1 - v} + \sqrt{v_m - v})} \quad 0 \leq v \leq v_m, 0 \leq \tau \leq 1/2 \kappa l \end{aligned} \quad (3.1)$$

При $\kappa l/2 \leq \tau \leq \kappa l$ зависимость $v(\tau)$ определяется равенством $v(\tau) = v(\kappa l - \tau)$. Форма струны найдена теперь с точностью до постоянной v_m . Для ее определения нужно использовать второе граничное условие или эквивалентное ему соотношение $v(\kappa l/2) = v_m$. Полагая в (3.1) $\tau = \kappa l/2$, $v = v_m$, получим

$$\begin{aligned} \kappa l &= F(v_m) \equiv \sqrt{2 v_m (1 - v_m)} + \\ &+ \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - v_m)^{3/2} \ln \frac{1 + \sqrt{v_m}}{1 - \sqrt{v_m}} \quad (3.2) \end{aligned}$$

Этим определена зависимость максимального прогиба v_m от единственного безразмерного параметра κl . Построив (фиг. 3) кривую $v_m = v_m(\kappa l)$, называемую кривой равновесия, находим, что при одном значении параметра струна может иметь либо две формы равновесия, либо одну форму (соответствующая точка на кривой равновесия называется предельной), либо не иметь равновесия вовсе. Примечательно, что существует серия форм (верхняя ветвь), стремящихся при $\kappa \rightarrow 0$ не к недеформированному состоянию, а к форме равновесия струны, нагруженной в середине сосредоточенной силой.



Фиг. 3

Исследуем устойчивость равновесий. Поступим как в [1], гл. VIII, т. е. несмотря на то, что число степеней свободы бесконечно, примем следующие два положения. Форму равновесия будем считать устойчивой, если она сообщает функционалу

$$V = \Pi - W_0 = \int_0^{\kappa l} \left(\frac{1}{2} v'^2 - \frac{1}{1-v} \right) d\tau \quad (3.3)$$

минимум на классе функций $v(\tau)$, $0 \leq \tau \leq \kappa l$, таких, что $v(0) = v(\kappa l) = 0$ и $v' \in L_2$. Принимаем также выводы Пуанкаре о смене устойчивости на кривых равновесия, изложенные, например, в [1], гл. VIII, стр. 102. Найдем вторую вариацию V

$$\delta^2 V = \int_0^{\kappa l} \left[\frac{1}{2} \zeta'^2 - \frac{1}{(1-v)^3} \zeta^2 \right] d\tau \quad (3.4)$$

Здесь ζ — функция указанного класса. Имеем также

$$\delta^2 V > \int_0^{\kappa l} \left[\frac{1}{2} \zeta'^2 - \frac{1}{(1-v_m)^3} \zeta^2 \right] d\tau \quad (3.5)$$

при всех ζ . Рассмотрим равновесия нижней ветви. Для них $v_m = 0$ при $\kappa l = 0$. Поэтому существует такое $(\kappa l)_*$, что при $0 < \kappa l < (\kappa l)_*$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{[1-v_m(\kappa l)]^3} < \frac{\pi^2}{2(\kappa l)^2} \quad (3.6)$$

При тех же значениях параметра κl

$$\delta^2 V > \frac{1}{2} \int_0^{\kappa l} \zeta'^2 d\tau - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{(\kappa l)^2} \int_0^{\kappa l} \zeta^2 d\tau \quad (3.7)$$

Но известно (см. например, [2], гл. VII, стр. 257), что правая часть (3.7) неотрицательна при всех ζ из данного класса. Поэтому при $0 \leq \kappa l < (\kappa l)_*$ будет $\delta^2 V > 0$; равновесия нижней ветви при этих значениях κl устойчивы. Следовательно, устойчива вся нижняя ветвь. В предельной точке устойчивость исчезает; верхняя ветвь неустойчива.

Те же выводы об устойчивости получаются, если исследовать устойчивость равновесий, примыкающих к недеформированному состоянию, разыскивая частоты малых колебаний около этих равновесий в виде рядов по степеням κ . Физически устойчивость равновесий, достаточно близких к недеформированному состоянию, очевидна.

Укажем теперь два случая, когда можно учесть неидеальность ферромагнетика. Пусть струна и магнит соединены, согласно фиг. 1, магнитопроводом длины $l_1 \gg l$ с проницаемостью μ_1 . В предположениях § 2 вдоль струны $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi = \text{const}$, но $\varphi \neq I$; в магнитопроводе $B = B_1 = \text{const}$. Имеем $\varphi + B_1 l_1 / \mu = I$. Второе соотношение между φ и B_1 получается из условия, что магнитный поток Φ через «нижнюю» поверхность струны равен потоку в магнитопроводе. Из (2.3) находим

$$\Phi = \mu_0 \varphi b \int_0^l \frac{dx}{\Delta_0 - u(x, \varphi)} = B_1 S_1 \quad (3.8)$$

Здесь S_1 — сечение магнитопровода, а $u(x, \varphi)$ определяется из (3.1) и (3.2), где нужно положить $\kappa = \mu_0 b \varphi^2 / 2 T_1 \Delta_0^3$. Из полученных двух уравнений относительно φ и B_1 они, вообще говоря, могут быть найдены. Данный случай соответствует оценке $\mu_0 / \mu_1 = O(S_1 \Delta_0 / l_1 l b)$; если это отношение меньше на порядок, то φ и u можно брать при $\mu_1 = \infty$, а B_1 определять из (3.8). Если же μ_0 / μ_1 на порядок больше, то φ найдется из (3.8), где следует положить $B_1 = I \mu_1 / l_1$, и будет мало по сравнению с I .

Во втором случае учитывается поле в самой струне, но не в остальном ферромагнетике. Тогда $\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi(x)$. Согласно § 2, считаем, что в струне $B = B_2(x)$.

Пусть S_2 — сечение струны. Имеем (фиг. 1)

$$\Phi(x) + \frac{1}{\mu_1} \int_x^l B_2(y) dy = I \quad (3.9)$$

$$B_2(x) = \frac{1}{S_2} \Phi(x) = \frac{b\mu_0}{S_2} \int_0^x \frac{\Phi(y)}{\Delta_0 - u(y)} dy \quad (3.10)$$

Здесь $\Phi(x)$ — магнитный поток через часть нижней поверхности струны, заключенную между левым концом и сечением с координатой x . Подставив (3.10) в (3.9) и присоединяя уравнение

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \Phi^2(x)}{[\Delta_0 - u(x)]^2} = 0 \quad (3.11)$$

придем к системе, состоящей из двух уравнений, — интегрального и дифференциального относительно скалярного потенциала $\Phi(x)$ и перемещения $u(x)$. Такое рассмотрение соответствует оценке $\mu_0/\mu_1 = O(\Delta_0 S_2 / bl^2)$. Если это отношение на порядок меньше, то Φ и u можно считать равными их значениям при $\mu_1 = \infty$, а B_2 определять из (3.10). Если же μ_0/μ_1 на порядок больше, то почти все силовые линии поля будут входить в струну у ее правого края $x = l$, а производная $\Phi'(x)$ в этой области будет весьма велика, что противоречит предположениям § 2.

§ 4. Равновесие ферромагнитной мембраны. Уравнение Эмдена — Фаулера с отрицательной степенью неизвестного в нелинейном члене. Рассмотрим осесимметричные равновесия круглой мембраны. Вместо (2.5) получим уравнение

$$\frac{d^2v}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\rho} + \frac{1}{(1-v)^2} = 0 \quad (4.1)$$

с краевыми условиями $v(\kappa R) = 0$, $-\infty < v(0) < 1$. Здесь $v = v(\rho)$, $\rho = \kappa r$ — безразмерная радиальная координата, R — радиус мембраны. После замены $w = 1 - v$ придем к одной из разновидностей уравнения Эмдена — Фаулера

$$\frac{d^2w}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dw}{d\rho} - w^{-2} = 0 \quad (4.2)$$

Уравнение Эмдена — Фаулера (см., например, [9], гл. VII) изучено лишь в случаях, когда степень неизвестного в нелинейном члене положительна. Поэтому здесь требуется особое исследование. Подстановкой

$$\rho = \kappa R e^{-3\tau/2}, \quad w = (\kappa^2 R^2)^{1/3} \eta e^{-\tau} \quad (4.3)$$

уравнение (4.2) сводится к «автономной» системе второго порядка

$$\eta' = \vartheta, \quad \vartheta' = 2\vartheta - \eta + \eta^{-2} \quad (\eta' = d\eta/d\tau, \vartheta' = d\vartheta/d\tau) \quad (4.4)$$

у которой нужно найти решение такое, что $\eta(0) = (\kappa^2 R^2)^{-1/3}$, а $\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\eta(\tau) e^{-\tau}]$ при $\tau \rightarrow \infty$ ограничен и положителен. Выясним, каково поведение решений системы (4.4) при $\tau \rightarrow \infty$; тем самым будет изучено поведение решений уравнения (4.2) при $\rho \rightarrow 0$ (это основной вопрос в теории уравнения Эмдена — Фаулера).

Рассмотрим фазовые траектории системы (4.4) в той половине фазовой плоскости $O\eta\vartheta$, где $\eta > 0$. Система (4.4) имеет одну особую точку $\vartheta = 0, \eta = 1$. Полагая $\eta - 1 = \zeta$ и линеаризируя (4.4) вблизи особой точки

$$\zeta' = \vartheta, \quad \vartheta' = 2\vartheta - 3\zeta + \dots \quad (4.5)$$

находим, что эта точка — неустойчивый фокус (фиг. 4).

Кривая $2\vartheta - \eta + \eta^{-2} = 0$ и ось $O\eta$ разбивают рассматриваемую полуплоскость на четыре области. В двух из них: 1 и 3, производная

$$\frac{d\vartheta}{d\eta} = \frac{2\vartheta - \eta + \eta^{-2}}{\vartheta} \quad (4.6)$$

положительна и на интегральных кривых, лежащих в этих областях, ϑ возрастает с ростом η ; в областях 2 и 4 с ростом η величина ϑ убывает. Найдем вторую производную

$$d^2\vartheta/d\eta^2 = -\vartheta^{-3} [(1 + 2\eta^{-3}) \vartheta^2 - 2(\eta - \eta^{-2}) \vartheta + (\eta - \eta^{-2})^2] \quad (4.7)$$

Квадратный трехчлен относительно ϑ , стоящий в квадратных скобках в (4.7), при $\eta > 0$ не имеет действительных корней и, следовательно, не меняет знака. Поэтому при $\vartheta > 0$ интегральные кривые выпуклы вверх, при $\vartheta < 0$ — вниз. Ось $O\eta$ линии $\vartheta(\eta)$ при $\eta < 1$ пересекает снизу вверх, при $\eta > 1$ — сверху вниз, имея при этом вертикальную касательную. При $\vartheta > 0$ справедливо неравенство

$$d\vartheta(\eta)/d\eta > d\vartheta_*(\eta)/d\eta \quad (4.8)$$

где $\vartheta_*(\eta)$ определяется линейной системой

$$\eta' = \vartheta_*, \quad \vartheta_*' = 2\vartheta_* - \eta \quad (4.9)$$

Отсюда следует, что интегральная кривая $\vartheta(\eta)$ системы (4.4), начинающаяся в некоторой точке $\eta_0, \vartheta_0 > 0$, при $\tau > 0$ по крайней мере до тех пор пока $\vartheta > 0$ будет лежать выше, чем интегральная кривая системы (4.9), начинающаяся в той же точке. Но линия $\vartheta = \eta$ является интегральной кривой системы (4.9). Поэтому интегральные кривые системы (4.4) пересекают ее снизу вверх. Сказанное позволяет наметить направления интегральных кривых в различных частях фазовой полуплоскости $\eta > 0$ (стрелки на фиг. 4).

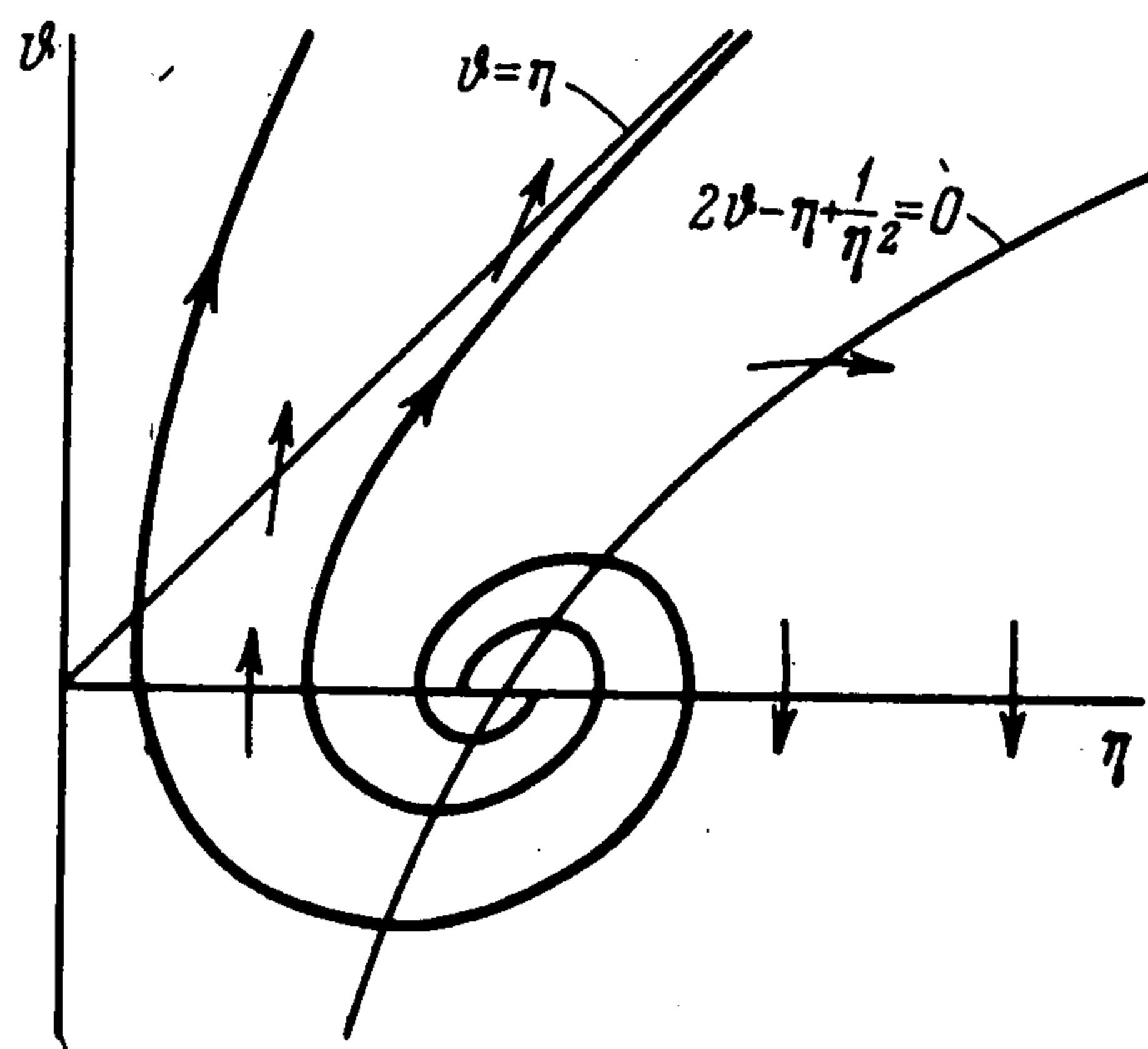
Рассмотрим теперь область $1 < \eta < \infty$, $0 < \vartheta < \eta$ и в ней отрезок некоторой линии $\eta = \eta_* = \text{const}$, на котором $0 \leq \vartheta \leq \eta_*$. Некоторый полуинтервал $[0, \alpha)$ этого отрезка составлен точками интегральных кривых, которые при дальнейшем возрастании τ пересекают ось $O\eta$ сверху вниз. Другой полуинтервал $(\beta, \eta_*]$ заполнен точками кривых, пересекающих далее прямую $\vartheta = \eta$. Точки α и β не могут принадлежать указанным множествам, так как иначе нашлась бы «последняя» траектория, пересекающая ось $O\eta$ или линию $\vartheta = \eta$. Поэтому существует замкнутое множество интегральных кривых, уходящих в бесконечность между линиями $\vartheta = \eta$ и $\vartheta = 0$; эти кривые далее называются «разделяющими». Уходящая в бесконечность полуветвь разделяющей кривой, начиная с некоторой точки, должна лежать выше линии $2\vartheta - \eta + \eta^{-2} = 0$, поэтому на этой полуветви η и ϑ монотонно возрастают. Покажем, что разделяющие кривые имеют прямую $\vartheta = \eta$ своей асимптотой. Интегрируя линейную часть системы (4.4), получим

$$\eta(\tau) = \eta_0 e^\tau + (\vartheta_0 - \eta_0) \tau e^\tau + \int_0^\tau (\tau - \sigma) e^{\tau-\sigma} \eta^{-2}(\sigma) d\sigma$$

$$\vartheta(\tau) = \vartheta_0 e^\tau + (\vartheta_0 - \eta_0) \tau e^\tau + \int_0^\tau (1 + \tau - \sigma) e^{\tau-\sigma} \eta^{-2}(\sigma) d\sigma \quad (4.10)$$

$$\vartheta(\tau) - \eta(\tau) = (\vartheta_0 - \eta_0) e^\tau + \int_0^\tau e^{\tau-\sigma} \eta^{-2}(\sigma) d\sigma \quad (4.11)$$

где η_0, ϑ_0 — начальные данные. Возьмем точку (η_0, ϑ_0) на уходящей в бесконечность



Фиг. 4

части разделяющей кривой, где η и ϑ монотонны. Тогда при $\tau > 0$ будет $\eta(\tau) > \eta_0$ и

$$\vartheta(\tau) < \vartheta_0 e^\tau + (\vartheta_0 - \eta_0) \tau e^\tau + \int_0^\tau (1 + \tau - \sigma) e^{\tau-\sigma} \eta_0^{-2} d\sigma = \vartheta_0 e^\tau + (\vartheta_0 - \eta_0 + \eta_0^{-2}) \tau e^\tau$$

Если коэффициент при τe^τ в последней части соотношения (4.11) отрицателен, то $\vartheta(\tau)$ при некотором значении τ начнет убывать. Так как на рассматриваемой части разделяющей кривой это невозможно, то на ней не существует точка, где $\vartheta - \eta + \eta^{-2} < 0$. Отсюда и из условия $\eta - \vartheta > 0$ следует, что $\eta - \vartheta \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Поэтому прямая $\vartheta = \eta$ будет асимптотой для любой разделяющей кривой. Из (4.6) получается также, что $d\vartheta/d\eta \rightarrow 1$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Покажем далее, что существует только одна разделяющая кривая. Допустим противное и рассмотрим уходящие в бесконечность «монотонные» полуветви двух разделяющих кривых $\vartheta_1(\eta)$ и $\vartheta_2(\eta)$. Пусть $\vartheta_1(\eta_0) > \vartheta_2(\eta_0)$, $\eta_0 > 1$. На рассматриваемых частях интегральных кривых функции $\vartheta_1(\eta)$, $\vartheta_2(\eta)$ существуют при всех $\eta > \eta_0$, положительны и монотонно возрастают, асимптотически стремясь к линии $\vartheta = \eta$. Обозначим $\Delta\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$. Из (4.6) имеем

$$\frac{d}{d\eta} \Delta\vartheta = (\eta - \eta^{-2}) \frac{\Delta\vartheta}{\vartheta_2(\vartheta_2 + \Delta\vartheta)} \quad (4.12)$$

Так как кривые $\vartheta_1(\eta)$ и $\vartheta_2(\eta)$ имеют одну и ту же асимптоту, то уравнение (4.12) при $\Delta\vartheta(\eta_0) = \vartheta_1(\eta_0) - \vartheta_2(\eta_0) > 0$ должно допускать решение $\Delta\vartheta(\eta)$ такое, что $\Delta\vartheta$ существует и положительно при всех $\eta > \eta_0$ и $\Delta\vartheta > 0$ при $\eta \rightarrow \infty$. Но такого решения уравнение (4.12) не имеет. Действительно, если $\Delta\vartheta > 0$, то и $d(\Delta\vartheta)/d\eta > 0$ и положительное решение уравнения (4.12) не может убывать. Таким образом, если $\vartheta(\eta)$ — разделяющая кривая, то интегральная кривая, проходящая при достаточно больших η выше нее, не может быть разделяющей. Следовательно, не существует даже двух разделяющих кривых.

Теперь можно описать поведение интегральных кривых на всей полуплоскости $\eta > 0$. Любая кривая, кроме особой $\eta \equiv 1$ и разделяющей, сделав бесконечное число оборотов около фокуса, пересекает линию $\vartheta = \eta$ и уходит в бесконечность над этой линией «параллельно» ей в том смысле, что $\lim (d\vartheta/d\eta) = 1$ при $\eta \rightarrow \infty$. Разделяющая же кривая, уйдя от фокуса, асимптотически приближается к прямой $\vartheta = \eta$ снизу (фиг. 4).

Основываясь на установленных геометрических свойствах интегральных кривых, выясним, как быстро возрастают функции $\eta(\tau)$ и $\vartheta(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема: на всех интегральных кривых в полуплоскости $\eta > 0$, кроме особого решения $\eta \equiv 1$ и разделяющей кривой, при $\tau \rightarrow \infty$ конечен и положителен $\lim [\eta(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}]$; на разделяющей кривой существует конечный и положительный $\lim [\eta(\tau) e^{-\tau}]$; таковы же свойства $\vartheta(\tau)$. Рассмотрим два решения $\eta_1(\tau)$ и $\eta_2(\tau)$ системы (4.4) с начальными условиями $\eta_{1,2}(0) = \eta_{10,20}$, $\vartheta_{1,2}(0) = \vartheta_{10,20}$ такими, что точки $(\eta_{10}, \vartheta_{10})$ и $(\eta_{20}, \vartheta_{20})$ лежат на одной интегральной кривой. Пусть переход от первой из них ко второй совершается за промежуток τ_{12} , т. е. $\eta_1(\tau_{12}) = \eta_{20}$, $\vartheta_1(\tau_{12}) = \vartheta_{20}$; при этом $\tau_{12} > 0$, если этот переход отвечает возрастанию τ , и $\tau_{12} < 0$, если он отвечает убыванию. Имеем

$$\eta_2(\tau) = \eta_1(\tau + \tau_{12}), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} [f(\tau) \eta_1(\tau)] = \left[\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{f(\tau + \tau_{12})}{f(\tau)} \right] \left[\lim_{\tau \rightarrow \infty} f(\tau) \eta_2(\tau) \right] \quad (4.13)$$

при условии, что указанные пределы существуют. Возьмем интегральную кривую, отличную от разделяющей, и выберем на ней начало отсчета τ в точке, где $\vartheta > \eta$. Так как $\eta(\tau)$ при $\tau > 0$ монотонно возрастает, то на основании (4.10) можно записать

$$\vartheta_0 - \eta_0 < \eta(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau} < \vartheta_0 - \eta_0 + \eta_0 \tau^{-1} + \eta_0^{-2} [1 - \tau^{-1} + \tau^{-1} e^{-\tau}] \quad (4.14)$$

Первое из этих неравенств очевидно, второе получается аналогично (4.11). Отсюда следует, что функция $\eta(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}$ ограничена при $\tau \rightarrow \infty$ сверху и снизу. Вычислим производную

$$[e^{-\tau} \tau^{-1} \eta(\tau)]' = \tau^{-2} \left[\int_0^{\tau} \sigma e^{-\sigma} \eta^{-2}(\sigma) d\sigma - \eta_0 \right] \quad (4.15)$$

Функция в квадратных скобках в правой части (4.15) монотонно возрастающая и, следовательно, не меняет знака при достаточно больших τ . Поэтому функция $\eta(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}$ монотонна на бесконечности, и как монотонная и ограниченная с обеих сторон функция должна иметь предел при $\tau \rightarrow \infty$. Значения этого предела при разных η_0, ϑ_0 связаны соотношением

$$\lim [\eta_1(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}] = \exp(-\tau_{12}) \lim [\eta_2(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}]$$

Отсюда видно, что значения предела всегда положительны. Из соотношений

$$\vartheta(\tau) - \eta(\tau) < (\vartheta_0 - \eta_0 + \eta_0^2) e^{\tau} - \eta_0^{-2}, \quad \vartheta(\tau) - \eta(\tau) > 0 \quad \text{при } \tau \rightarrow \infty \quad (4.16)$$

получается, что

$$\lim [(\vartheta - \eta) \tau^{-1} e^{-\tau}] = 0, \quad \lim [\vartheta(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}]$$

существует и

$$\lim [\vartheta(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}] = \lim [\eta(\tau) \tau^{-1} e^{-\tau}]$$

Рассмотрим теперь разделяющую кривую. Воспользуемся тождеством

$$\eta(\tau) e^{-\tau} = \eta_0 \exp \int_0^{\tau} [\eta'(\sigma) - \eta(\sigma)] \frac{d\sigma}{\eta(\sigma)} \quad (4.17)$$

Отсюда следует, что если $\lim [\eta(\tau) e^{-\tau}]$ существует, то сходится интеграл в правой части соотношения

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\eta(\tau) e^{-\tau}] = \eta_0 \exp \int_0^{\infty} [\vartheta(\sigma) - \eta(\sigma)] \frac{d\sigma}{\eta(\sigma)} \quad (4.18)$$

и, наоборот, если интеграл сходится, то предел существует. Покажем сходимость интеграла. Дифференцируя (4.4), получим при $\eta > 1$

$$\eta'' = \vartheta'' = \vartheta - 2(\eta - \vartheta)(1 - \eta^{-3}) > \vartheta - 2(\eta - \vartheta) \quad (4.19)$$

Выберем начало отсчета τ так, чтобы

$$\eta_0 > 1, \quad \vartheta'(0) > 0, \quad \vartheta_0 - 2(\eta_0 - \vartheta_0) > 0$$

и функции η, ϑ при $\tau > 0$ монотонно возрастали; на разделяющей кривой, как видно из предыдущего, такой выбор возможен. Неравенство (4.19) дает тогда $\vartheta'' > 0$ при $\tau > 0$. Далее находим

$$\begin{aligned} \vartheta'(\tau) &= \int_0^{\tau} \vartheta''(\sigma) d\sigma + \vartheta'(0) > \vartheta'(0) \\ \vartheta(\tau) &= \int_0^{\tau} \vartheta'(\sigma) d\sigma + \vartheta_0 > \vartheta'(0)\tau + \vartheta_0 \\ \eta(\tau) &= \int_0^{\tau} \eta'(\sigma) d\sigma + \eta_0 > \frac{1}{2}\vartheta'(0)\tau^2 + \vartheta_0\tau + \eta_0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Последнее неравенство показывает, что интеграл от $\eta^{-1}(\tau)$ на $[0, \infty)$ сходится. Но так как $(\eta - \eta') = (\eta - \vartheta) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$, то сходится и интеграл в (4.18). Следовательно, на разделяющей кривой существует

$$\lim [\eta(\tau) e^{-\tau}] \quad \text{и} \quad 0 < \lim [\eta(\tau) e^{-\tau}] < \eta_0$$

Очевидно, что

$$\lim [\vartheta(\tau) e^{-\tau}] = \lim [\eta(\tau) e^{-\tau}]$$

Значения пределов при разных начальных условиях связаны соотношениями

$$\lim [\eta_1(\tau) e^{-\tau}] = \exp(-\tau_{12}) \lim [\eta_2(\tau) e^{-\tau}], \quad \eta_1(\tau_{12}) = \eta_2(0)$$

Вернемся к исходной краевой задаче. Как указывалось, одно из краевых условий требует, чтобы $0 < \lim [\eta(\tau) e^{-\tau}] < \infty$. Поэтому искомая функция $\eta(\tau)$ должна быть такой, чтобы $\eta(\tau)$, $\vartheta(\tau)$ давали параметрическое представление разделяющей кривой. Отсчет τ на этой кривой задается вторым условием $\eta(0) = \eta_0 = (\frac{3}{4} \kappa^2 R^2)^{-1/3}$. Таким образом, для каждой точки пересечения прямой $\eta = \text{const} = (\frac{3}{4} \kappa^2 R^2)^{-1/3}$ с разделяющей кривой найдется функция $\eta(\tau)$ с требуемыми свойствами, а значения $\eta(\tau)$ при $0 \leq \tau < \infty$ определяют форму равновесия согласно (4.3).

Функции $\eta(\tau)$ и $\vartheta(\tau)$, употребляемые далее, соответствуют разделяющей кривой. Вычислив при помощи (4.3) производную

$$dw/d\rho = (\frac{3}{2} \kappa R)^{-1/3} (\eta - \vartheta) e^{\tau/2} > 0 \quad (4.21)$$

находим, что w возрастает, а прогиб v убывает при увеличении ρ от нуля до κR . Ранее было установлено, что на монотонной полуветви разделяющей кривой $\eta - \vartheta < \eta^{-2}$; отсюда $0 < (\eta - \vartheta) e^{2\tau} < [\eta e^{-\tau}]^{-2}$. Этим показано, что функция $(\eta - \vartheta) e^{2\tau}$ ограничена на бесконечности и, следовательно, $(\eta - \vartheta) e^{\tau/2} \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$ или $\rho \rightarrow 0$, т. е. мембрана в центре имеет касательную плоскость, параллельную плоскости контура.

Обозначим прогиб в центре через v_m . Из (4.3) имеем

$$v_m = 1 - w_m = 1 - \eta_0^{-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\eta(\tau) e^{-\tau}] \quad (4.22)$$

Построим кривую равновесия $v_m = v_m(\kappa R)$. При этом определится и количество решений. Рассмотрим равновесия, близкие к недеформированному состоянию. Имеем

$$\begin{aligned} & \lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} \{ \eta_0^{-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\eta(\tau) e^{-\tau}] \} = \\ & = \lim_{\tau_{10} \rightarrow \infty} \left\{ \exp \int_0^{\infty} [\eta_1(\tau + \tau_{10}) - \eta_1(\tau + \tau_{10})] \eta_1^{-1}(\tau + \tau_{10}) d\tau \right\} = 1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

где $\eta_1(\tau)$ — функция с любым, но фиксированным начальным значением и $\eta_1(\tau_{10}) = \eta_0$. Отсюда $v_m \rightarrow 0$ при $\eta_0 \rightarrow \infty$ или $\kappa R \rightarrow 0$, как и должно быть для равновесий этой серии.

Обозначим через η_{*i} , $i = 1, 2, \dots$, точки пересечения разделяющей кривой с осью $O\eta$; нумерация их соответствует движению по кривой при уменьшении τ . Рассмотрим две функции $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau)$ с начальными значениями на той полуветви разделяющей кривой, где η и ϑ монотонны.

Пусть

$$\eta_2(0) = \eta_{20} > \eta_1(0) = \eta_{10}, \quad \eta_1(\tau_{12}) = \eta_{20}$$

Решениям $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau)$ соответствуют два значения параметра $(\kappa R)_2 < (\kappa R)_1$. Переходя от η_{10} к η_{20} по монотонной полуветви, где $0 < \vartheta < \eta$, получим

$$\tau_{12} = \int_{\eta_{10}}^{\eta_{20}} \frac{d\eta}{\vartheta(\eta)} > \ln \frac{\eta_{20}}{\eta_{10}} \quad (4.24)$$

Отсюда и из (4.13)

$$w_{m1} = \eta_{10}^{-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\eta_1(\tau) e^{-\tau}] = \eta_{20} \eta_{10}^{-1} w_{m2} \exp(-\tau_{12}) < w_{m2}, \quad v_{m1} > v_{m2} \quad (4.25)$$

Из вида разделяющей кривой следует, что при достаточно малых значениях κR (или больших η_0) она имеет одну и только одну точку пересечения с линией $\eta = \eta_0$.

Поэтому при малых значениях параметра существует единственная форма равновесия (в отличие от струны, фиг. 3). Совокупностью этих форм, примыкающих согласно (4.23) к недеформированному состоянию, начинается серия равновесий, которая существует при

$$0 \leq \kappa R \leq (\kappa R)_{*1} = 2/3 \eta_{*1}^{-3/2}$$

Неравенства (4.25) показывают, что у равновесий этой серии при непрерывном увеличении κR от нуля до $(\kappa R)_{*1}$ максимальный прогиб v_m монотонно увеличивается от нуля до некоторого v_{m*1} . Вычислим производную

$$\begin{aligned} \frac{dv_m}{d(\kappa R)} &= \frac{d\eta_0}{d(\kappa R)} \frac{dv_m}{d\eta_0} = -\eta_0^{5/2} \left[-\frac{d}{d\eta_0} \exp \int_0^\infty \frac{\vartheta(\tau) - \eta(\tau)}{\eta(\tau)} d\tau \right] = \\ &= \eta_0^{5/2} \left[\frac{d}{d\tau_{10}} \exp \int_{\tau_{10}}^\infty \frac{\vartheta_1(\tau) - \eta_1(\tau)}{\eta_1(\tau)} d\tau \right] \frac{d\tau_{10}}{d\eta_0} = (1 - v_m) \eta_0^{5/2} \frac{\eta_0 - \vartheta_0}{\vartheta_0} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Здесь $\eta_1(\tau)$ и τ_{10} введены, как в (4.23). Из неравенства $\eta - \vartheta < \eta^{-2}$ следует $dv_m/d(\kappa R) = 0$ при $\kappa R = 0$. Кривая равновесия имеет при $\kappa R = 0$ горизонтальную, а при $\kappa R = (\kappa R)_{*1}$ — вертикальную касательные. При $\kappa R > (\kappa R)_{*1}$ равновесие невозможно.

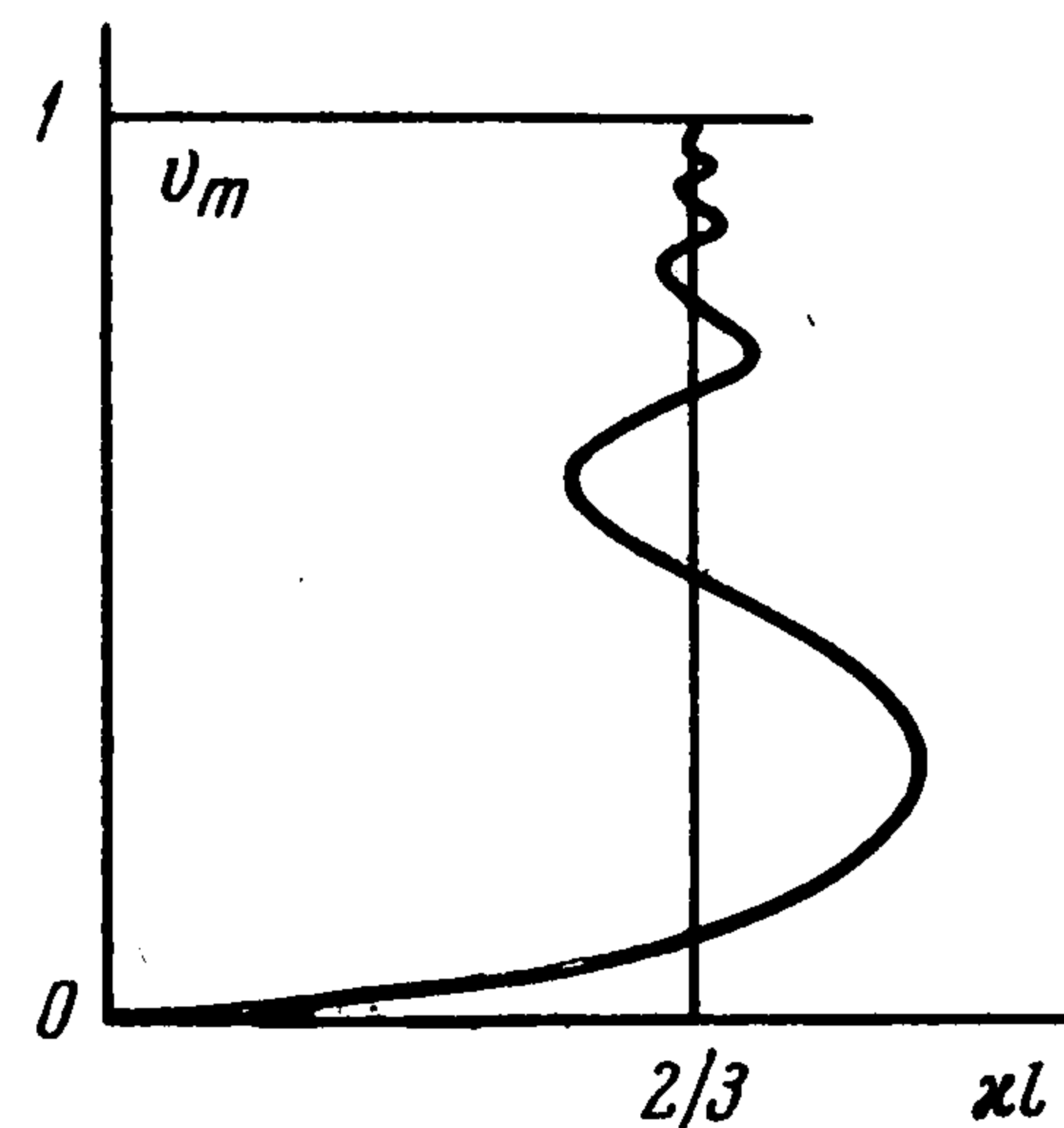
Равновесия указанной серии будут единственны лишь при $\kappa R < (\kappa R)_{*2}$. При $(\kappa R)_{*2} < \kappa R < (\kappa R)_{*1}$ прямая $\eta = \eta_0(\kappa R)$ кроме монотонной полуветви будет пересекать нижний завиток разделяющей кривой, соединяющий точки η_{*1} и η_{*2} . Это даст новый отрезок кривой равновесия. Рассмотрим две функции $\eta_1(\tau)$, $\eta_2(\tau)$ с начальными значениями $\eta_{20} > \eta_{10}$, расположенными на нижнем завитке. Переход от точки с $\eta = \eta_{10}$ к точке с $\eta = \eta_{20}$ соответствует теперь убыванию τ , и если $\eta_1(\tau_{12}) = \eta_{20}$, то $\tau_{12} < 0$. Поэтому

$$w_{m1} = \eta_{20} \eta_{10}^{-1} w_{m2} \exp(-\tau_{12}) > w_{m2}, \quad v_{m1} < v_{m2}$$

т. е. у равновесий этой серии при увеличении параметра максимальный прогиб убывает. В частности, здесь любое $v_m > v_{m*1}$. В крайних точках данного отрезка кривой равновесия $(\kappa R)_{*2}$, $(\kappa R)_{*1}$ касательные к ней вертикальны. Так как зависимость $v_m(\kappa R)$ непрерывна, то при $(\kappa R)_{*1}$ две рассмотренные ветви кривой равновесия смыкаются, а $(\kappa R)_{*1}$ соответствует предельной точке.

Тем же путем показывается, что между $(\kappa R)_{*2}$, $(\kappa R)_{*3}$ лежит еще одна восходящая ветвь кривой равновесия, т. е. такая, где v_m возрастает с ростом κR , между $(\kappa R)_{*4}$, $(\kappa R)_{*5}$ — нисходящая ветвь и т. д., а все значения $(\kappa R)_{*i}$ отвечают предельным точкам. В результате получим кривую равновесия редкого вида, представленного на фиг. 5, где $\kappa l = \kappa R$.

Соответственно бесконечному числу завитков разделяющей кривой кривая равновесия имеет бесконечное число ветвей и бесконечно много раз пересекает прямую $\kappa R = 2/3$, приближаясь к точке $\kappa R = 2/3$, $v_m = 1$. Эта точка отвечает особому решению $\eta \equiv 1$ или $v(\rho) = 1 - (3\rho/2)^{2/3}$; его можно найти сразу из (4.1), если искать решения вида $v = 1 - C\rho^\alpha$, $C, \alpha = \text{const}$. Количество решений, которые допускает рассмотренная краевая задача при заданном значении параметра, таково: если $\kappa R > (\kappa R)_{*1}$, то решений нет; если $\kappa R < (\kappa R)_{*2}$, а также при $\kappa R = (\kappa R)_{*1}$ — одно решение; если $(\kappa R)_{*3} < \kappa R < (\kappa R)_{*1}$ или $\kappa R = (\kappa R)_{*2}$ — два и т. д.; есть промежутки изменения κR , где существует ровно n решений, n — любое число целое; при $\kappa R = 2/3$ будет счетное множество решений.



Фиг. 5

Нетрудно показать, что равновесия, близкие к недеформированному состоянию, устойчивы. Отсюда, как и в § 3, выводим, что все восходящие ветви кривой равновесия отвечают устойчивым формам, нисходящие — неустойчивым. Однако этот вывод справедлив лишь при условии, что несимметричные формы равновесия либо не существуют, либо их ветвь не пересекается с ветвью осесимметричных форм. Эти факты не доказаны. Обращают на себя внимание существенные различия между двумерными и одномерными случаями — мембраной и струной. Они связаны, по-видимому, с тем, что мембрана в отличие от струны не может нести сосредоточенных сил.

§ 5. **Равновесие упругих проводников.** Рассмотрим, согласно § 1, равновесие двух тонких проводников, по которым пропускается ток. Считаем, что проводники взаимодействуют на участке значительной длины, где расстояния между ними сравнимы с перемещениями и малы по сравнению с длиной и радиусами кривизны линий тока. Тогда проводники будут «примерно» параллельны на указанном участке. Размеры поперечных сечений предполагаются того же порядка, что и перемещения (например, для стержней) или меньшими (как для струны). Полагаем $\mu = \mu_0$ во всем пространстве.

Разберем сначала вспомогательную задачу. Пусть дан линейный проводник и точка M , расстояние $r_0 = |\mathbf{r}_0|$ от которой до проводника мало. Напряженность поля в M будет

$$\mathbf{H}(M) = \frac{I}{4\pi} \oint \frac{\boldsymbol{\tau} \times \mathbf{r}}{r^3} ds \quad (5.1)$$

где I — ток, $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной, направленный по току, \mathbf{r} — вектор, соединяющий M с точкой проводника. Отсчитываем s так, чтобы

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= \mathbf{r}_0, & \boldsymbol{\tau}(s) &= \boldsymbol{\tau}_0 & \text{при } s &= 0 \\ -l_1 &\leq s \leq l - l_1, & \mathbf{r}(-l_1) &= \mathbf{r}(l - l_1) \end{aligned}$$

Имеем

$$\mathbf{H}(M) = \frac{I}{4\pi} \int_{-l_1}^{l-l_1} \frac{\boldsymbol{\tau}_0 \times \mathbf{r}_0 + \dots}{(r_0^2 + s^2 + \dots)^{3/2}} ds = \frac{I}{2\pi r_0} \mathbf{b}_0 + \delta\mathbf{H}, \quad \mathbf{b}_0 = \frac{\boldsymbol{\tau}_0 \times \mathbf{r}_0}{r_0} \quad (5.2)$$

Добавка $\delta\mathbf{H}$, соответствующая невыписанным членам под интегралом, такова, что $r_0 |\delta\mathbf{H}| \rightarrow 0$ при $r_0 \rightarrow 0$. Поэтому в подобных случаях будем ее отбрасывать, т. е. вычислять \mathbf{H} в точках вблизи проводников, заменяя замкнутый криволинейный проводник бесконечным прямым проводом, направленным вдоль $\boldsymbol{\tau}_0$ и расположенным на расстоянии r_0 . Однако точность последующего будет ниже, чем в §§ 2, 3, так как $|\delta\mathbf{H}|$ содержит, вообще говоря, члены вида $I k \ln(l/r_0)$, где k — кривизна.

Вычислим нагрузку, действующую на проводники. Предполагая, что сечение меняется достаточно медленно по длине, можем игнорировать непараллельность векторов \mathbf{j} в сечении проводника. У «почти параллельных» проводников плоскость, перпендикулярная к векторам \mathbf{j} , в одном проводнике будет «почти» перпендикулярна к векторам \mathbf{j} , в другом (отличие порядка отношения расстояния между проводниками к их длине). Поэтому при вычислении нагрузки в деформированном состоянии можно не учитывать повороты сечений. Проведем плоскость перпендикулярно токам и обозначим через σ_1, σ_2 образовавшиеся сечения, а через M, N точки в σ_1 и σ_2 . Найдем с принятой точностью напряженность поля, создаваемого токами второго проводника в первом проводнике

$$\mathbf{H}(M) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_2} \frac{\mathbf{j}(N) \times \mathbf{r}(M, N)}{r^2(M, N)} d\sigma_2, \quad \mathbf{r}(M, N) = \overrightarrow{MN} \quad (5.3)$$

Взаимодействие токов, протекающих в одном и том же проводнике, также вызывает некоторые деформации, однако его влияние на изгиб можно не учитывать. Объемные силы, создаваемые полем (5.3) в первом проводнике, будут

$$\mathbf{f}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{j}(M) \times [\mathbf{j}(N) \times \mathbf{r}(M, N)]}{r^2(M, N)} d\sigma_2 = \frac{\gamma \mu_0}{2\pi} \int_{\sigma_2} \frac{j(M) j(N) \mathbf{r}(M, N)}{r^2(M, N)} d\sigma_2 \quad (5.4)$$

где $\gamma = -1$, если векторы $\mathbf{j}(M)$ и $\mathbf{j}(N)$ параллельны и $\gamma = 1$, если они антипараллельны

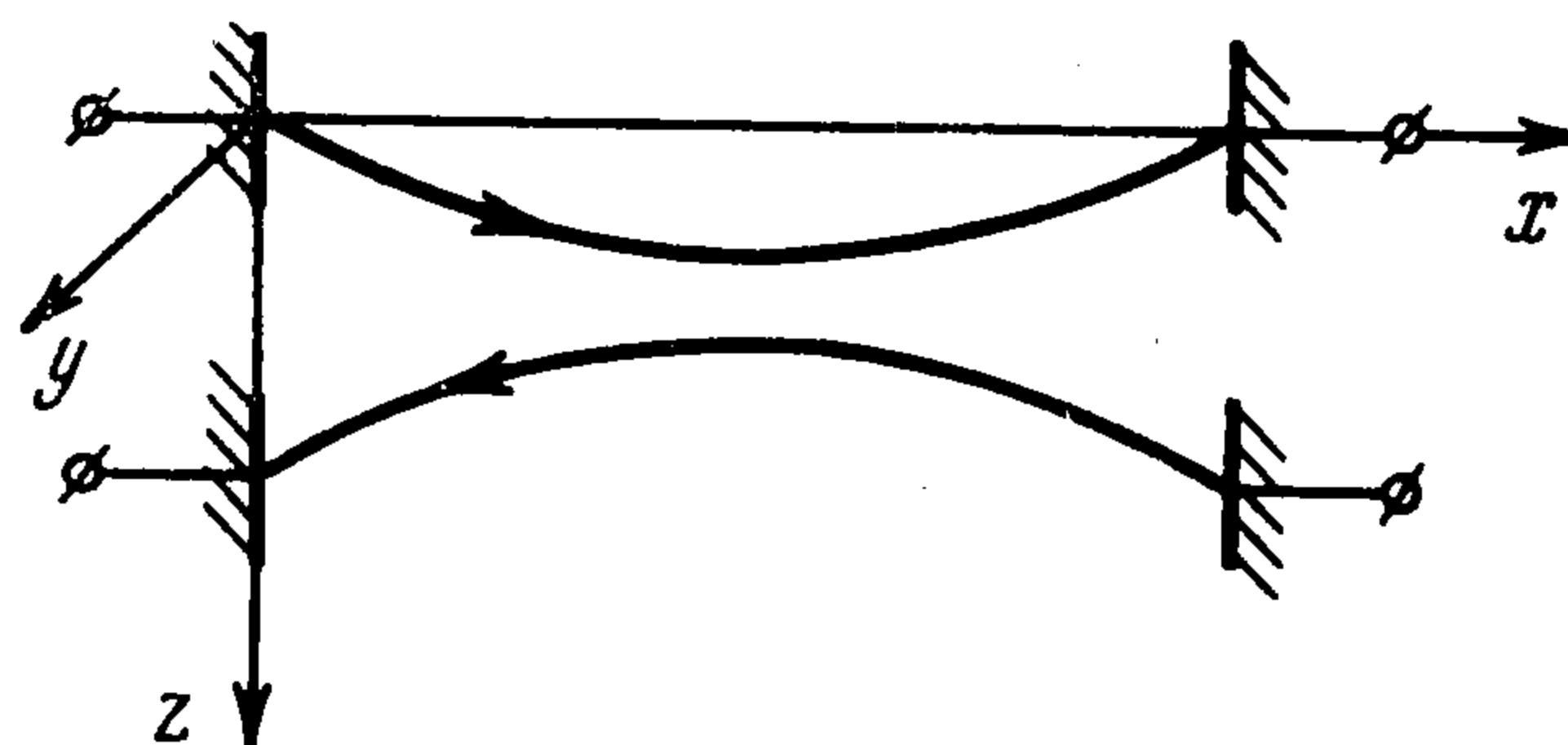
В приближенной теории изгиба существенна лишь погонная нагрузка q , определяемая интегрированием $f(M)$ по сечению

$$q = \frac{\gamma\mu_0}{2\pi} \int_{\sigma_1} \int_{\sigma_2} \frac{j(M)j(N)r(M,N)}{r^2(M,N)} d\sigma_2 d\sigma_1 \quad (5.5)$$

Силы $f(M)$ создают также распределенные изгибающие и крутящие моменты, но их сумма на отрезке длины, сравнимой с длиной проводника, имеет порядок fr_0^3l , в то время как порядок изгибающего момента от нагрузки q будет $fr_0^2l^2$; распределенные моменты поэтому можно не учитывать.

При постоянном сечении и равномерном распределении тока по нему нагрузка будет функцией только перемещений, которые входят в r , но вид ее в отличие от (2.9) зависит от формы сечения.

Чтобы получить уравнения равновесия, следует выписать соответствующие уравнения теории упругости и выразить в них нагрузку через перемещения согласно (5.5). Составим эти уравнения для взаимодействия двух первоначально параллельных струн (фиг. 6), поперечные сечения которых имеют размеры пренебрежимо малые по сравнению с перемещениями и первоначальным расстоянием Δ_0 . Из (5.5) имеем



Фиг. 6

$$\begin{aligned} u_1'' + \frac{\gamma\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{u_2 - u_1 + \Delta_0 i_2}{|u_2 - u_1 + \Delta_0 i_2|^2} &= 0 & \left(u_1' = \frac{du_1}{dx} \right) \\ u_2'' - \frac{\gamma\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \frac{u_2 - u_1 + \Delta_0 i_2}{|u_2 - u_1 + \Delta_0 i_2|^2} &= 0 & \left(\begin{aligned} u_1 &= v_1 i_2 + w_1 i_3 \\ u_2 &= v_2 i_2 + w_2 i_3 \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Здесь I_1, I_2 — токи, u_1 — перемещения точек соответственно первой и второй струны, i_2, i_3 — орты осей Oy и Oz , при этом орт i_2 направлен вниз, а орт i_3 — перпендикулярно к плоскости xy . Складывая уравнения (5.6), находим $u_1'' + u_2'' = 0$.

Из краевых условий $u_1(0) = u_2(0) = 0, u_1(l) = u_2(l) = 0$ следует теперь

$$u_1 \equiv -u_2$$

Введем обозначения

$$\kappa^2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \Delta_0}, \quad \tau = \kappa x, \quad u = \frac{(\Delta_0 - 2v_1)}{\Delta_0}, \quad w = \frac{2w_1}{\Delta_0}$$

Здесь u — безразмерное расстояние до плоскости симметрии. Исключая в (5.6) переменные u_2 , проектируя на оси и переходя к безразмерным координатам, получим

$$u'' - \gamma \frac{u}{u^2 + w^2} = 0, \quad w'' - \gamma \frac{w}{u^2 + w^2} = 0 \quad \left(u' = \frac{du}{d\tau} \right) \quad (5.7)$$

Уравнения (5.7) совпадают с уравнениями движения материальной точки в поле центральных сил, величина которых обратно пропорциональна расстоянию. Движение происходит в плоскости, где u, w — декартовы координаты, а центр притяжения или отталкивания расположен в начале. Орбитой будет проекция струны на эту плоскость. Здесь требуется найти траекторию, которая, начавшись при $\tau = 0$ в точке $u = 1, w = 0$, при $\tau = \kappa l$ приходит снова в ту же точку.

Для притягивающихся струн $\gamma = 1$, чему соответствуют движения под действием отталкивающей силы. Очевидно, что при этом не существуют замкнутые или самопересекающиеся траектории. Поэтому вернуться в исходное положение тело может лишь при движении по прямой, проходящей через центр, при условии, что его скорость первоначально была направлена к центру. Только эти движения и могут соответствовать решениям рассматриваемой краевой задачи. Так как исходная точка $u = 1, w = 0$ лежит на

оси Ou , проходящей через центр, то $w \equiv 0$. Получающееся теперь уравнение для u интегрируется и дает

$$\tau = \sqrt{2} (1 - v_m) \int_{\varphi_1(v)}^{\varphi_1(0)} \exp z^2 dz, \quad 0 \leq \tau \leq \kappa \frac{l}{2} \quad (5.8)$$

$$\varphi_1(v) = [\ln(1 - v) - \ln(1 - v_m)]^{1/2}, \quad v = 2v_1/\Delta_0 = 1 - u$$

Здесь v — безразмерное перемещение, $v_m < 1$ — его максимальное значение, достигающееся в середине струны. При $0 \leq \tau \leq \kappa l/2$ перемещение v монотонно возрастает от нуля до v_m . Соотношение (5.8) и равенство $v(\tau) = v(\kappa l - \tau)$ определяют форму равновесия с точностью до одной постоянной v_m . Для ее определения получается уравнение, аналогичное (3.2)

$$\kappa l = 2 \sqrt{2} (1 - v_m) \int_0^{\psi_1(v_m)} \exp z^2 dz \quad (5.9)$$

где $\psi_1(v_m) = [-\ln(1 - v_m)]^{1/2}$. Это дает кривую равновесия, подобную представленной на фиг. 3; сохраняется и суждение об устойчивости.

Существенно сложнее случай $\gamma = -1$, соответствующий притяжению к центру или отталкиванию струн. Найдем здесь плоские формы равновесия. Им отвечают движения по прямой, проходящей через центр.

При начальной скорости, направленной от центра, тело будет сначала двигаться от центра, затем к центру и вернется в исходное положение (уйти в бесконечность, не возвращаясь, тело не может, так как должно выполняться неравенство $h - \ln u \geq 0$, где h — постоянная энергии). Такому движению (от начала удаления до возвращения) может соответствовать решение исходной краевой задачи, в котором $w \equiv 0$. Интегрируя получающееся уравнение для u , находим

$$\tau = \sqrt{2} (1 - v_m) \int_{\varphi_2(v)}^{\varphi_2(0)} \exp(-z^2) dz, \quad 0 \leq \tau \leq \kappa \frac{l}{2} \quad (5.10)$$

$$\kappa l = 2 \sqrt{2} (1 - v_m) \int_0^{\psi_2(v_m)} \exp(-z^2) dz \quad (5.11)$$

$$\varphi_2(v) = [\ln(1 - v_m) - \ln(1 - v)]^{1/2}, \quad \psi_2(v_m) = [\ln(1 - v_m)]^{1/2}$$

Здесь v_m — максимальное по модулю перемещение, достигающееся в середине струны. В данном случае $v < 0$ при всех $\tau \neq 0$ и $v(\tau)$ монотонно убывает от нуля до v_m при $0 \leq \tau \leq \kappa l/2$. Получающаяся серия форм равновесия существует при всех κl ; зависимость между κl и v_m для нее взаимно однозначная. Эта серия служит продолжением (5.9) по параметру $\gamma \kappa l$, однако этого недостаточно для суждения об устойчивости, поскольку устойчивость может исчезать при ответвлении от нее серий неплоских форм.

Формальным решениям краевой задачи соответствует и группа прямолинейных движений, сопровождающаяся соударениями о центр. Пусть начальная скорость направлена к центру. В последующем движении тело упадет на центр, имея при этом бесконечную скорость. Считая, что такое движение есть предел последовательности движений, в которых тело огибает центр по все более суживающимся траекториям, получим, что после удара тело вернется в исходную точку с прежней, но противоположно направленной скоростью. Этому движению отвечает симметричная форма равновесия с точкой заострения в середине струны. Здесь $v > 0$ при $\tau \neq 0$ и $v(\kappa l/2) = 1$, $v'(\kappa l/2) = \infty$.

Поэтому подобные решения противоречат предположению о малости углов наклона струны и могут рассматриваться лишь как формальные. В то же время они представ-

ляют интерес по двум причинам. Во-первых, у достаточно длинной струны возможны формы равновесия, близкие к данным везде, кроме области вблизи середины. Во-вторых, от этих форм отходят неплоские формы, для исследования устойчивости которых нужно знать исходные решения вблизи точек бифуркации.

Интегрируя (5.7) при $w \equiv 0$ и $u'_0 < 0$, найдем связь между κl (временем движения) и u'_0

$$\kappa l = \sqrt{2} \exp(u_0'^2 / 2) \int_{|u_0'| \sqrt{1/2}}^{\infty} \exp(-z^2) dz \quad (5.12)$$

Соответствующая последовательность форм существует при $0 \leq \kappa l \leq \sqrt{\pi/2}$. При $\kappa l = \sqrt{\pi/2}$ она расщепляется на три последовательности.

Из них одна отвечает следующему движению: удаление от центра, возвращение в исходную точку, падение на центр и снова возвращение в исходное положение. Эти формы несимметричны.

Формы второй последовательности получаются из форм первой зеркальным отражением от середины и соответствуют падению на центр, возвращению, удалению и новому возвращению.

Третья последовательность содержит симметричные формы. Им отвечает удаление от центра, возвращение, падение, возвращение, снова удаление и окончательное возвращение.

Эти серии форм существуют при всех $\kappa l > \sqrt{\pi/2}$. При $\kappa l = \sqrt{2\pi}$ возможно движение, когда тело, начав двигаться с нулевой начальной скоростью, дважды соударяется с центром. Соответствующая форма при $\kappa l > \sqrt{2\pi}$ разветвляется на четыре новых последовательности форм. При $\kappa l = 3\sqrt{\pi/2}$ рождается еще четыре ветви и т. д. Число таких ветвей бесконечно.

При $\kappa l \rightarrow 0$ последовательность форм с заострением смыкается с верхней полуветвью последовательности (5.9), однако их предельные формы отличаются тем, что отталкивающиеся струны переплетены (в точке заострения «верхняя» струна проходит под «нижней»). Последнее понятно, так как движение с соударением есть предельный случай движений, огибающих центр, и следует считать, что при ударе достигается значение $u = -0$, т. е. тело «заходит» за центр.

Неплоские формы здесь не могут быть рассмотрены. Отметим лишь, что они заведомо существуют. Так, элементарно находятся формы, отвечающие круговой орбите. При этом $u = \cos \tau$, $w = \pm \sin \tau$, $\kappa l = 2\pi, 4\pi$ и т. д., а форма струны — винтовая линия, имеющая n витков при $\kappa l = 2\pi n$. Такие формы существуют парами: в виде право- и левозакрученных спиралей, что отвечает двум направлениям вращения тела вокруг центра. Разыскание остальных форм существенно сложнее, чем, например, определение периодических движений в случае ньютонова потенциала. Это видно хотя бы из того, что на место уравнений конических сечений встает невыполнимая квадратура.

Поступила 8 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. А п п е л ь П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. М.—Л., ОНТИ, 1936.
2. Х а р д и Г. Г., Л и т т л ь в у д Д. Е., П о л и а Г. Неравенства. М., Изд-во иностр. лит., 1948.
3. Б е л л м а н Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1954.