Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О МЕТОДЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В ПЛОСКИХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. М. Александров, В. А. Кучеров

(Ростов-на-Дону)

В последние годы при исследовании сложных смешанных задач теории упругости большое распространение наряду с асимптотическими методами [1] получил метод ортогональных полиномов [2–12]. Суть его состоит в следующем. Смешанная задача сводится к решению интегрального уравнения первого рода, рассматривается та или иная область изменения безразмерных параметров, входящих в ядро интегрального уравнения, выделяется главная (особая) часть ядра, которая соответствует выбранной области изменения параметров. Находятся собственные функции интегрального оператора, соответствующего главной части ядра; в большинстве известных в настоящее время случаев собственными функциями оказывается какая-либо система классических ортогональных полиномов. Известная функция, входящая в правую часть интегрального уравнения, и решение раскладываются в ряды по этим полиномам. Регулярная часть ядра раскладывается в двойной ряд. После этого интегральное уравнение легко сводится к бесконечной алгебраической системе. При соответствующем урезании [1] бесконечной системы матрица получаемой конечной системы оказывается почти треугольной, что позволяет достаточно легко довести решаемую задачу до числа.

В §§ 1, 2 данной работы даются обоснование метода ортогональных полиномов и числовой пример для интегрального уравнения

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f(x) \quad (|x| \leqslant 1), \qquad K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u)}{u} \cos ut\, du \tag{0.1}$$

$$|1 - L(u)| \leqslant e^{-\nu u} \sum_{i=0}^{s} B_i u^i \quad (0 < u < \infty), \qquad L(u) \sim Au \quad (u \to 0) \tag{0.2}$$

где ν, B_i, A — положительные постоянные; при $0 < u < \infty$ функция $L(u)$ ограничена. Схема метода ортогональных полиномов для уравнений типа (0.1), (0.2) по существу изложена в работах [2, 4, 5, 9, 12].

В § 3 приведена схема метода ортогональных полиномов для интегрального уравнения

$$-\int_k^1 \varphi(\xi) \ln \frac{|\xi^2 - x^2|}{\lambda^2} d\xi = \pi f(x) + \int_k^1 \varphi(\xi) G\left(\frac{\xi}{\lambda}, \frac{x}{\lambda}, \frac{k}{\lambda}\right) d\xi \quad (k \leqslant x \leqslant 1) \tag{0.3}$$

Здесь и выше $\lambda \in (0, \infty)$ и $k \in (0, 1)$ — безразмерные параметры, G — достаточно гладкая и симметричная относительно ξ, x функция. Уравнения типа (0.3) возникают при исследовании четных по x, плоских смешанных задач теории упругости с двумя участками контакта.

---

[1] Подробнее об этом см. ниже.

§ 1. Заметим, что ядро $K(t)$ вида (0.1) может быть представлено в виде [1]

$$K(t) = -\ln|t| - F(t), \quad F(t) = \int_0^\infty \frac{[1 - L(u)]\cos ut - e^{-u}}{u}\,du \tag{1.1}$$

Используя (0.2), можно сказать, что функция $F(t)$ при $0 \leqslant |t| < \infty$ непрерывна со всеми производными.

На основании (1.1) перепишем интегральное уравнение (0.1) в виде

$$-\int_{-1}^{1} \varphi_*(\xi) \ln\frac{|\xi - x|}{\lambda}\,d\xi = \pi f_*(x) + \int_{-1}^{1} \varphi_*(\xi) F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.2}$$

$$f_*(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \varphi_0(\xi)\left[F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) - F(0)\right] d\xi, \quad \varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_*(\xi) \tag{1.3}$$

где $\varphi_0(\xi)$ определяется из уравнения

$$-\int_{-1}^{1} \varphi_0(\xi) \ln\frac{|\xi - x|}{\lambda}\,d\xi = \pi f(x) + F(0) P_0 \quad (|x| \leqslant 1), \qquad P_0 = \int_{-1}^{1} \varphi_0(\xi)\,d\xi \tag{1.4}$$

Теорема 1.1. Если $f'(x) \in L_{(4/3+0)}(-1, 1)$, то решение интегрального уравнения (1.4) существует, единственно, принадлежит $L_{(4/3-0)}(-1, 1)$ и имеет вид

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1 - x^2}}\left[P_0 - \int_{-1}^{1} \frac{f'(t)\sqrt{1 - t^2}}{t - x}\,dt\right], \quad P_0 = \frac{1}{\ln 2\lambda - F(0)} \int_{-1}^{1} \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{1 - t^2}} \tag{1.5}$$

Если к тому же при $\lambda \in (0, \infty)$ существует в $L_1(-1, 1)$ решение интегрального уравнения (1.2), (1.3), то оно имеет вид

$$\varphi_*(x) = \Phi_*(x)(1 - x^2)^{-1/2} \tag{1.6}$$

причем функция $\Phi_*(x)$ непрерывна со всеми производными при $x \in [-1, 1]$.

Доказательство теоремы фактически содержится в работах [1,5,12,13].

Дальше будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1.1 и функция $f(x)$ — четная (четный случай интегрального уравнения (0.1)). Решение для нечетного случая, как показано в работах [14, 15], может быть получено из специального четного решения дифференцированием.

Будем искать функцию $\Phi_*(x)$, входящую в соотношение (1.6), в виде следующего ряда по полиномам Чебышева:

$$\Phi_*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k T_{2k}(x) \quad (|x| \leqslant 1) \tag{1.7}$$

В силу свойств функции $\Phi_*(x)$, указанной в теореме 1.1, ряд (1.7) равномерно сходится [16].

Функцию $f_*(x)$ вида (1.3) также разложим в ряд

$$f_*(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_{k_*} T_{2k}(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.8}$$

На основании указанных выше свойств функций $\varphi_0(x)$ и $F(t)$ не представляет труда показать, что функция $f_*(x)$ непрерывна со всеми производными. Поэтому ряд (1.8) также равномерно сходится к $f_*(x)$.

Наконец, разложим в двойной ряд по полиномам Чебышева функцию $F(t)$ $(0 \leqslant |t| < \infty)$. Будем иметь

$$F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [C_{mn}(\lambda) T_{2m}(x) T_{2n}(\xi) + \ldots] \tag{1.9}$$

В соотношении (1.9) не выписаны слагаемые, содержащие полиномы Чебышева с нечетными индексами: в дальнейшем они не понадобятся.

Воспользовавшись известным свойством ортогональности полиномов Чебышева, получим

$$C_{mn}(\lambda) = \frac{\beta_{mn}}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi F\left(\frac{\cos\psi - \cos\varphi}{\lambda}\right) \cos 2m\varphi \cos 2n\psi \, d\varphi d\psi \tag{1.10}$$

$$\beta_{00} = 1, \quad \beta_{m0} = \beta_{0n} = 2, \quad \beta_{mn} = 4$$

Лемма 1.1. При всех значениях $0 \leqslant |t| = |\xi - x| \lambda^{-1} \leqslant 2\lambda^{-1} < \infty$ ряд (1.9) равномерно сходится к $F(t)$ по совокупности переменных ξ, x. Для коэффициентов ряда $C_{mn}(\lambda)$ имеют место оценки

$$|C_{mn}(\lambda)| \leqslant \beta_{mn} \max |F(t)| \tag{1.11}$$

$$|C_{mn}(\lambda)| \leqslant d\lambda^{-3} [(n^2 - 1) n]^{-1} \qquad (d = \text{const}, \ n \geqslant 2) \tag{1.12}$$

$$|C_{mn}(\lambda)| \leqslant D\lambda^{-6} [(m^2 - 1)(n^2 - 1) mn]^{-1} \qquad (D = \text{const}, \ m \geqslant 2, \ n \geqslant 2) \tag{1.13}$$

$$|C_{mn}(\lambda)| \leqslant \frac{\beta_{mn}}{(2m)!\,(2n)!} \left(\frac{1}{2\lambda\nu}\right)^{2m+2n} \sum_{i=0}^{s} B_i \frac{(2m + 2n + i - 1)!}{\nu^i} \qquad (m + n \geqslant 1) \tag{1.14}$$

$$C_{mn}(\lambda) \sim 0, \quad (m \neq n), \qquad C_{00}(\lambda) \sim \ln 2\lambda$$

$$C_{mm}(\lambda) \sim m^{-1} \quad (m \geqslant 1) \quad \text{при } \lambda \to 0 \tag{1.15}$$

Оценка (1.11) сразу следует из формулы (1.10). Оценки (1.12) и (1.13) получаются из (1.10) интегрированием по частям. Равномерная сходимость ряда (1.9) вытекает из оценки (1.13).

Для доказательства оценок (1.14), (1.15) подставим выражение (1.1) функции $F(t)$ в формулу (1.10). Интегрируя, представим коэффициенты $C_{mn}(\lambda)$ в виде

$$C_{00}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{[1 - L(u)] J_0^2(u/\lambda) - e^{-u}}{u} du \qquad (J_k(x) - \text{функция Бесселя})$$

$$C_{mn}(\lambda) = (-1)^{m+n} \beta_{mn} \int_0^\infty [1 - L(u)] J_{2m}\left(\frac{u}{\lambda}\right) J_{2n}\left(\frac{u}{\lambda}\right) \frac{du}{u} \qquad (m+n \geqslant 1) \tag{1.16}$$

На основании (1.16) с учетом оценок (0.2) и

$$|J_{2s}(x)| \leqslant \frac{1}{(2s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \qquad (x>0,\ s\geqslant 0) \tag{1.17}$$

получим (1.15) и (1.16).

Заметим, что при $\lambda > 2 / \nu$ для коэффициентов $C_{mn}(\lambda)$ могут быть также получены равномерно сходящиеся разложения.

Для коэффициентов R_{k*} ряда (1.8) имеет место оценка типа (1.12), а именно

$$|R_{k*}| \leqslant C\,[(k^2-1)k]^{-1} \qquad (C = \mathrm{const},\ k \geqslant 2) \tag{1.18}$$

Кроме того, справедливы формулы [12]

$$R_{k*} = C_{k0}(\lambda) R_0 [\ln 2\lambda - F(0)]^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_{kn}(\lambda) R_n$$

$$R_{0*} = R_0 [C_{00}(\lambda) - F(0)] [\ln 2\lambda - F(0)]^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} nC_{0n}(\lambda) R_n \tag{1.19}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,T_{2n}(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 2R_0\,(n=0) \\ R_n\,(n \neq 0) \end{cases}$$

Получим, наконец, соотношения для определения коэффициентов S_k в (1.7).

Теорема 1.2. Любому решению $\varphi_*(x)$ интегрального уравнения (1.2) из класса $L_1(-1, 1)$ соответствует последовательность чисел S_k, принадлежащая l_1 и удовлетворяющая бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$R_{k*} + S_0 C_{k0}(\lambda) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} S_n C_{kn}(\lambda) = \begin{cases} S_0 \ln 2\lambda & (k=0) \\ S_k (2k)^{-1} & (k=1,2,\ldots) \end{cases} \tag{1.20}$$

и наоборот.

Для доказательства подставим в интегральное уравнение (1.2) функции $\varphi_*(\xi)$, $f_*(x)$ и $F(t)$ в виде (1.6) — (1.9) и вычислим интегралы, используя формулу (2.7) работы [5] и свойство ортогональности полиномов Чебышева. Получим соотношение, в левой и правой частях которого стоят ряды по четным полиномам Чебышева. Приравнивая коэффициенты обеих частей при полиномах одинакового номера, получим бесконечную систему (1.20).

Учитывая тот факт, что функция $\Phi_*(x)$ непрерывна со всеми производными, можно доказать принадлежность последовательности чисел S_k классу l_p, $p \geqslant 1$. Чтобы в этом убедиться, достаточно получить для чисел S_k оценку типа (1.18).

Пусть теперь последовательность S_k будет решением бесконечной системы (1.20) и принадлежит l_1. Тогда ряд (1.7) равномерно при $x \in [-1,1]$ сходится к некоторой непрерывной функции $\Phi_*(x)$. Обратным преобразованием бесконечной системы (1.20) в интегральное уравнение (1.2) легко убедиться, что функция $\varphi_*(x) = \Phi_*(x)(1-x^2)^{-1/2}$, принадлежащая $L_1(-1,1)$, является решением (1.2).

§ 2. Перепишем систему (1.20) в более удобном виде

$$S_0(\ln 2\lambda - C_{00}) = R_{0*} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} S_n C_{0n} \tag{2.1}$$

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

$$x_i = S_i (2i)^{-1}, \quad a_{ik} = kC_{ik}, \quad b_i = R_{i*} + S_0 C_{i0}$$

Заметим, что

$$P = \int_{-1}^{1} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{-1}^{1} [\varphi_0(\xi) + \varphi_*(\xi)]\, d\xi = P_0 + P_* \tag{2.3}$$

где P_0 имеет вид (1.5), а P_* в силу соотношений (1.6), (1.7) дается простой формулой

$$P_* = \pi S_0 \tag{2.4}$$

По предположению $\varphi_*(x) \in L_1(-1, 1)$, следовательно, $|S_0| < \infty$. Решив бесконечную систему (2.2), найдем затем S_0 из (2.1).

Теорема 2.1. Бесконечная система (2.2) квази вполне регулярна при $\lambda > 0$. Если существует ее ограниченное решение, то последовательность x_i принадлежит l_p, $p \geqslant 1$. При $\lambda \to 0$ определитель системы стремится к нулю.

Как известно [17], бесконечная система будет квази вполне регулярной, если

$$\begin{aligned} &A_i = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| < \infty && (i = 1, 2, \ldots N) \\ &A_i \leqslant 1 - \theta < 1 && (i = N+1,\ N+2, \ldots) \\ &b_i \leqslant K\theta && (i = N+1,\ N+2, \ldots) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Из оценок (1.11) — (1.13), (1.18) легко следует выполнимость условий (2.5) при $\lambda > 0$.

Пусть теперь найдено ограниченное решение системы (2.2)

$$|x_i| \leqslant X \qquad (X = \text{const}) \tag{2.6}$$

Тогда имеем

$$|x_i| \leqslant X \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}| + |b_i| \tag{2.7}$$

или на основании оценок (1.12), (1.13) и (1.18)

$$|x_i| \leqslant x^* [(i^2 - 1)\, i]^{-1} \qquad (x^* = \text{const},\ i \geqslant 2) \tag{2.8}$$

Отсюда следует, что $\{x_i\} \in l_p$, $p \geqslant 1$.

Из оценок (1.15) сразу следует, что при $\lambda \to 0$ определитель системы (2.2) стремится к нулю.

На основании доказанной теоремы можно заключить, что существование и единственность решения бесконечной системы (2.2) при $\lambda > 0$ сводятся к существованию решения конечной системы первых N уравнений.

При $\lambda \ll 1$ матрица системы (2.2) становится плохо обусловленной. При условии (2.6) ряд в (2.1) абсолютно сходится на основании оценок (2.8) и (1.12).

Теорема 2.2. При $\lambda > \lambda_0$ бесконечная система (2.2) вполне регулярна.

Для доказательства оценим величины A_i ($i = 1, 2, \ldots$). На основании оценки (1.14) имеем

$$A_i \leqslant 2 \sum_{j=0}^{s} \frac{B_j}{(2i)!\, \nu^j} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2i+2k+j-1)!}{(2k-1)!} \left(\frac{1}{2\lambda\nu}\right)^{2i+2k} \tag{2.9}$$

Можно доказать методом математической индукции, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+r)!}{(2n+1)!} q^{2n} = \frac{(r-1)!}{(1-q^2)^r} \sum_{k=0}^{m} \binom{r}{2k+1} q^{2k} \leqslant \frac{(2r-2)!!}{(1-q^2)^r} \tag{2.10}$$
$$(0 \leqslant q < 1)$$

здесь m — целая часть числа $(r-1)/2$. С учетом (2.10) оценка (2.9) примет вид

$$A_i \leqslant 2 \sum_{j=0}^{s} B_j \frac{(4i+2j)!!\, q^{2i+2}}{\nu^j (2i)!\, (1-q^2)^{2i+j+1}} = A_i^* \quad \left(q = \frac{1}{2\lambda\nu}\right) \tag{2.11}$$

Отсюда видно, что все $A_i < \infty$, если только $q < 1$, $\lambda > {}^1/_2\nu$.

Найдем теперь условие, при котором $A_{i+1}^* < A_i^*$ $(i \geqslant 1)$. На основании (2.11) имеем

$$D_{ij}(q) = \frac{4q^2 (2i+j+1)(2i+j+2)}{(1-q^2)^2 (2i+1)(2i+2)} < 1 \tag{2.12}$$

Заметим, что при любых фиксированных $q < 1$ и $j \geqslant 1$ числа $D_{ij}(q)$ монотонно убывают с ростом i, при $j = 0$ числа $D_{i0}(q) = 4q^2 (1-q^2)^{-2}$.

Таким образом, неравенство (2.12) будет выполнено при всех i и j, если

$$D_{0s}(q) = 3^{-1} q^2 (3+s)(4+s)(1-q^2)^{-2} < 1 \tag{2.13}$$

Отсюда найдем наибольшее q_1 и соответствующее ему λ_1.

Выясним теперь, когда $A_1^* < 1$. На основании (2.11) имеем

$$\sum_{j=0}^{s} B_j \frac{(2j+4)!!\, q^4}{\nu^i (1-q^2)^{j+3}} < 1 \tag{2.14}$$

Отсюда найдем наибольшее q_2 и соответствующее ему λ_2.

Из всего сказанного вытекает, что система (2.2) вполне регулярна при

$$\lambda > \lambda_0 = \sup\left({}^1/_2\nu,\ \lambda_1,\ \lambda_2\right) \tag{2.15}$$

Из доказанной теоремы следует, что бесконечная система (2.2) при $\lambda > \lambda_0$ имеет единственное ограниченное решение, а следовательно, решение в l_p, $p \geqslant 1$ (см. теорему 2.1), которое может быть получено методом последовательных приближений.

Для примера рассмотрим задачу о вдавливании штампа в упругую полосу, лежащую на жестком основании. Силы трения между штампом и полосой, а также полосой и основанием отсутствуют.

Как известно [18], эта задача может быть приведена к решению интегрального уравнения вида (0.1). Функция $L(u)$ дана второй из формул (1.14) работы [18]. Легко убедиться, что она удовлетворяет условиям (0.2), причем

$$s = 1, \quad \nu = 2, \quad B_0 = 2, \quad B_1 = 4 \tag{2.16}$$

В соответствии с (2.16) по описанной выше схеме найдем, что решение указанной задачи существует и единственно в L_1 (—1,1), если $f'(x) \in L_{(4/3+0)}(-1,1)$ и $\lambda > \lambda_0 = 0.883$.

Для нахождения приближенных решений бесконечной системы (2.2) воспользуемся методом редукции.

Заметим, что то или иное урезание ряда (1.9) для $F(t)$ автоматически приводит к соответствующему урезанию бесконечной системы (2.2). Поэтому естественно произвести урезание ряда (1.9) таким образом, чтобы в результате получить удобную для практического решения конечную систему.

Исходя из сказанного, в ряде (1.9) оставим только члены, для которых $m + n \leqslant r$. Тогда легко убедиться, что получающаяся конечная система линейных алгебраических уравнений будет иметь вид

$$x_i = \sum_{k=1}^{r-i} a_{ik} x_k + b_i^r, \qquad b_i^r = R_{i*}^r + S_0 C_{i0} \qquad (i = 1, 2, \ldots r) \tag{2.17}$$

Соотношение (2.1) также несколько меняет свою форму

$$S_0 (\ln 2\lambda - C_{00}) = R_{0*}^r + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} S_k C_{0k} \tag{2.18}$$

Верхний индекс r у величин R_{i*}^r означает, что в формулах (1.19) суммирование по n необходимо производить до r.

Описанное, довольно необычное, урезание бесконечной системы (2.2) приводит к вопросу о сходимости метода редукции.

Лемма 2.1. Пусть дана последовательность вполне регулярных бесконечных систем

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^r x_k + b_i^r, \qquad |b_i^r| \leqslant C_r \tag{2.19}$$

а также вполне регулярная бесконечная система

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k + b_i, \qquad |b_i| \leqslant C \tag{2.20}$$

Пусть, кроме того

$$\lim a_{ik}^r = a_{ik}, \quad \lim b_i^r = b_i \quad \text{при} \quad r \to \infty \tag{2.21}$$

Тогда, если x_i^r есть решение системы (2.19), а x_i — системы (2.20), то

$$\lim x_i^r = x_i \quad \text{при} \ r \to \infty \tag{2.22}$$

Приведенная лемма есть частный случай теоремы III (гл. I, § 2 работы [17]).

Из леммы следует, что изложенный выше метод редукции будет сходиться, т. е. решение x_i^r урезанной системы (2.17) будет при $r \to \infty$ стремиться к решению бесконечной системы (2.2), если $\lambda > \lambda_0$. При $\lambda_0 > \lambda > 0$ метод редукции, очевидно, также будет сходиться, если разрешима конечная система

$$x_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k + b_i \quad (i=1,2,\ldots N) \tag{2.23}$$

Практическое решение урезанной системы (2.17) производится достаточно просто благодаря тому, что ее коэффициенты образуют почти треугольную матрицу. После определения величин x_i из системы (2.17) найдем S_0 из соотношения (2.18), а затем — приближенное решение интегрального уравнения (0.1) по формулам (1.3), (1.5) — (1.7), (2.2). При этом в (1.7) суммирование по k производится до r.

Заметим, что при заданной точности приближенного решения интегрального уравнения (0.1) и уменьшении параметра λ число уравнений в урезанной системе (2.17) необходимо увеличивать. Это следует из того, что ряд (1.9), как можно показать на основании (1.15), расходится на линии $\xi = x$ при $\lambda \to 0$.

Следует обратить внимание, что если функция $f(x)$ достаточно гладкая, то решение $\varphi(\xi)$ нецелесообразно разбивать на слагаемые $\varphi_0(\xi)$ и $\varphi_*(\xi)$; в этом случае изложенный выше метод нужно применять непосредственно к интегральному уравнению

$$-\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) \ln \frac{|\xi - x|}{\lambda} d\xi = \pi f(x) + \int_{-1}^{1} \varphi(\xi) F\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi \qquad (|x| \leqslant 1) \qquad (2.24)$$

В качестве примера рассматривалась указанная выше задача о вдавливании плоского штампа ($f(x) \equiv 1$) в упругую полосу. Коэффициенты $C_{mn}(\lambda)$ ряда (1.9) подсчитывались на ЭЦВМ и приведены в табл. 1.

Приближенные решения уравнения (0.1) окончательно представлены в виде

$$\varphi(x) = (1 - x^2)^{-1/2} \sum_{i=0}^{r} d_i x^{2i}, \qquad \psi = \lim \varphi(x)(1 - x^2)^{1/2} \quad \text{при } x \to 1 \qquad (2.25)$$

Коэффициенты d_i даны в табл. 2.

В табл. 3 сравниваются некоторые характеристики решения (2.25) с соответствующими данными, полученными асимптотическими методами в работах [13,14,19].

Таблица 1

mn	$\lambda = 2$	$\lambda = 1$	$\lambda = 1/2$	$\lambda = 1/4$	mn	$\lambda = 1/4$
00	-0.2376	$-0.1064 \cdot 10^{-1}$	0.3946	0.9180	32	$0.4322 \cdot 10^{-1}$
10	$0.5139 \cdot 10^{-1}$	0.1204	0.1556	0.1317	41	$-0.2954 \cdot 10^{-2}$
11	$-0.9356 \cdot 10^{-2}$	$-0.7736 \cdot 10^{-1}$	-0.2848	-0.5268	50	$-0.2633 \cdot 10^{-3}$
20	$-0.6062 \cdot 10^{-3}$	$-0.1965 \cdot 10^{-2}$	$0.1047 \cdot 10^{-1}$	$0.3546 \cdot 10^{-1}$	33	$-0.4656 \cdot 10^{-1}$
21		$0.7912 \cdot 10^{-2}$	$0.5436 \cdot 10^{-1}$	0.1037	42	$-0.1415 \cdot 10^{-2}$
30		$-0.7350 \cdot 10^{-4}$	$-0.4012 \cdot 10^{-2}$	$0.2613 \cdot 10^{-2}$	51	$-0.6880 \cdot 10^{-3}$
22			$-0.1610 \cdot 10^{-1}$	-0.1412	60	$0.1320 \cdot 10^{-4}$
31			$-0.3780 \cdot 10^{-2}$	$0.1055 \cdot 10^{-1}$		
40			$\sim 10^{-8}$	$-0.1460 \cdot 10^{-2}$		

Таблица 2

λ	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
2	0.9652	-0.198	0.0169				
1	1.909	-0.925	0.139	0.00352			
$1/2$	3.937	-2.435	-2.640	1.843	$\sim 10^{-4}$		
$1/4$	8.00	-4.01	-1.80	2.03	-7.47	7.18	-1.72

Таблица 3

λ	2	2[13]	2[19]	1	1[19]	$1/2$	$1/2$[19]	$1/4$	$1/4$[14]
$\varphi(0)$	0.965	0.967	0.968	1.909	1.92	3.937	3.97	8.000	7.991
$\varphi(1/2)$	1.059	1.074	1.05	1.948	1.95	3.955	3.92	7.978	7.941
ψ	0.784	0.809	0.790	1.126	1.12	1.638	1.58	2.263	2.257
P	2.742	2.800	2.75	4.712	4.70	8.70	8.71	16.71	16.71

§ 3. Перейдем к рассмотрению интегрального уравнения (0.3); произведем в нем замену переменных и введем обозначения по формулам

$$x = \sqrt{k'^2u^2 + k^2}, \quad \xi = \sqrt{k'^2v^2 + k^2}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

$$\varphi_+(v) = k'^2 v\,(k'^2v^2 + k^2)^{-1/2}\varphi\left(\sqrt{k'^2v^2 + k^2}\right), \quad f_+(u) = f\left(\sqrt{k'^2u^2 + k^2}\right) \tag{3.1}$$

$$G_+\left(\frac{v}{\mu}, \frac{u}{\mu}, \varepsilon\right) = G\left(\sqrt{\mu^{-2}v^2 + \varepsilon^2}, \sqrt{\mu^{-2}u^2 + \varepsilon^2}, \varepsilon\right) \quad \varepsilon = \frac{k}{\lambda}, \quad \mu = \frac{\lambda}{k'}$$

Будем иметь

$$-\int_0^1 \varphi_+(v) \ln \frac{|v^2 - u^2|}{\mu^2}\, dv = \pi f_+(u) + \int_0^1 \varphi_+(v)\, G_+\left(\frac{v}{\mu}, \frac{u}{\mu}, \varepsilon\right) dv \; (0 \leqslant u \leqslant 1) \tag{3.2}$$

Заметим, что уравнение (3.2) является по существу четным вариантом интегрального уравнения типа (2.24). Решение (3.2) ищем в виде

$$\varphi_+(v) = \varphi_0(v) + \varphi_1(v) \tag{3.3}$$

где $\varphi_0(v)$ определяется из уравнения (1.4) и имеет вид (1.5), если в указанных формулах заменить x, λ, $f(x)$ и $F(0)$ соответственно на u, μ, $f_+(u)$ и $G_+(0)$. Тогда функция $\varphi_1(v)$ найдется из уравнения (3.2), в котором вместо $f_+(u)$ нужно взять

$$f_1(u) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \varphi_0(v) \left[2G_+(0) - G_+\left(\frac{v}{\mu}, \frac{u}{\mu}, \varepsilon\right)\right] dv \tag{3.4}$$

Будем искать $\varphi_1(v)$ в виде

$$\varphi_1(v) = \Phi_1(v)(1 - v^2)^{-1/2}, \qquad \Phi_1(v) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i T_{2i}(v) \tag{3.5}$$

Функции $G_+(v/\mu, u/\mu, \varepsilon)$ и $f_1(u)$ также разложим в ряды (3.6)

$$G_+\left(\frac{v}{\mu}, \frac{u}{\mu}, \varepsilon\right) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e_{mn}(\mu, \varepsilon)\, T_{2m}(u)\, T_{2n}(v), \quad f_1(u) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{i1} T_{2i}(u)$$

Для коэффициентов $e_{mn}(\mu, \varepsilon)$ и R_{i1} имеют место формулы, аналогичные (1.10) и (1.19).

Подставляя (3.5), (3.6) в интегральное уравнение для $\varphi_1(v)$ и выполняя все необходимые операции, приходим к бесконечной системе относительно q_i

$$R_{i1} + q_0 e_{i0}(\mu, \varepsilon) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} q_n e_{in}(\mu, \varepsilon) = \begin{cases} q_0 \ln 2\mu & (i = 0) \\ q_i (2i)^{-1} & (i = 1, 2, \ldots) \end{cases} \tag{3.7}$$

Приближенное решение системы (3.7), как и в (1.20), может быть найдено описанным в § 2 методом редукции.

При соответствующих ограничениях, наложенных на функцию $G(\xi / \lambda, x / \lambda, k / \lambda)$, может быть произведено обоснование метода ортогональных полиномов для уравнения (0.3) подобно тому, как это было проделано выше для уравнения (0.1).

Заметим, что изложенная в работе [12] схема метода ортогональных полиномов для интегрального уравнения (1.3) также может быть строго обоснована.

Авторы благодарят Г. Я. Попова, указавшего на ряд недочетов статьи [12], что послужило толчком к написанию данной работы.

Поступила 30 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР, физ.-матем. н., 1961, т. 14, № 3.
3. Попов Г. Я. Контактная задача теории упругости при наличии круговой области контакта. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.
4. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
5. Александров В. М. О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР, физ.-матем. н., 1964, т. 17, № 2.
6. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
7. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения интегрального уравнения дифракции электромагнитных волн на полосе конечной ширины. Ж. техн. физ., 1965, т. 35, вып. 3.
8. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
9. Лутченко С. А. О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 12.
10. Попов Г. Я. Вдавливание штампа в линейно-деформируемое основание с учетом сил трения. ПММ, 1967, т. 31, вып. 2.
11. Попов Г. Я. Об одном приближенном способе решения контактной задачи о кольцевом штампе. Изв. АН АрмССР, механика, 1967, т. 20, № 2.
12. Александров В. М. О приближенном решении некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
13. Александров В. М. О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
14. Александров В. М., Бабешко В. А., Кучеров В. А. Контактные задачи для упругого слоя малой толщи. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
15. Александров В. М. Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР, механика, 1967, т. 20, № 1.
16. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.—Л., Гостехтеориздат, 1949.
17. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, М., Гостехтеориздат, 1950.
18. Александров В. М., Кучеров В. А. Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу. Инж. ж. МТТ, 1968, вып. 4.
19. Александров В. М., Бабешко В. А. Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, механика, 1965, № 2.