

## ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИНОК ИЗ НЕОГУКОВСКОГО МАТЕРИАЛА ПРИ АФФИННОЙ НАЧАЛЬНОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Л. М. Зубов

(Ленинград)

Строятся двумерные уравнения, описывающие изгибную бифуркацию равновесия пластинок из несжимаемого неогукковского материала при однородной начальной деформации. Выводятся трехмерные уравнения нейтрального равновесия для неогукковского материала. Устанавливается вариационный принцип, эквивалентный дифференциальным уравнениям нейтрального равновесия и аналогичный принципу Э. Рейсснера в классической теории упругости. Путем аппроксимации изменения по толщине неизвестных функций из вариационного принципа выводятся двумерные уравнения выпучивания плиты. Рассмотрены примеры выпучивания равномерно сжатой круглой пластинки и прямоугольной плиты при комбинированном нагружении. Получено точное решение трехмерных уравнений нейтрального равновесия для круглого цилиндра, сжатого по боковой поверхности, при наличии осевой симметрии. Это решение сравнивается с результатом двумерной теории.

**1. Уравнения нейтрального равновесия для неогукковского материала.** Удельная потенциальная энергия деформации для неогукковского материала задается выражением

$$W = c_1 (I_1 - 3), \quad c_1 = \text{const}$$

Неогукковский материал несжимаем, т. е. при его деформации должно выполняться условие

$$I_3 (G^\times) = 1 \quad (1.1)$$

В этих формулах  $I_1$ ,  $I_3$  — первый и третий инварианты тензора  $G^\times$  — меры деформации Коши [1,2]. Из закона состояния изотропного упругого тела в форме Фингера [1] получим представление тензора напряжений для неогукковского материала

$$T = 2c_1 \nabla R^T \cdot \nabla R + 2c_{-1} E \quad (1.2)$$

Здесь  $R$  — радиус-вектор точки деформированного тела,  $\nabla$  — оператор в метрике недеформированного состояния,  $E$  — единичный тензор. В (1.2) величина  $c_{-1}$  является неопределенной функцией инвариантов деформации и при решении конкретных задач должна быть найдена из уравнений равновесия и условия несжимаемости. Далее, по формуле [2]

$$D = \sqrt{I_3} (\nabla R^T)^{-1} \cdot T$$

где  $D$  — тензор напряжений Пиола, имеем для неогукковского материала

$$D = 2c_1 \nabla R + 2c_{-1} (\nabla R^T)^{-1} \quad (1.3)$$

Уравнения нейтрального равновесия упругого тела при мертвых внешних силах записываются в метрике недеформированного состояния следующим образом [2]:

$$\nabla \cdot D^{\circ} = 0 \quad \text{в объеме } V; \quad n \cdot D^{\circ} = 0 \quad \text{на } o_1, \quad w = 0 \quad \text{на } o_2$$

$$D^{\circ} = \left\{ \frac{d}{d\eta} D(R^{\circ} + \eta w) \right\}_{\eta=0} \quad (1.4)$$

Здесь  $R^{\circ}$  — радиус-вектор точки тела, отвечающий начальному, исследуемому на устойчивость состоянию равновесия,  $o_1$  — часть поверхности недеформированного тела, на которой заданы внешние силы,  $o_2$  — часть поверхности, на которой заданы перемещения. Для неогукковского материала по (1.3) получим

$$\frac{1}{2}c_1^{-1}D^{\circ} = \nabla w + p(\nabla R^{\circ T})^{-1} + m(\nabla R^{\circ T})^{-1} \cdot \nabla w^T \cdot (\nabla R^{\circ T})^{-1} \quad (1.5)$$

$$p = (c_{-1})^{\circ} / c_1, \quad m = -c_{-1}^{\circ} / c_1$$

Заметим, что  $p$ , как и вектор дополнительного перемещения  $w$ , неизвестная функция координат. Дополнительным уравнением для ее определения наряду с уравнениями равновесия (1.4) служит условие несжимаемости

$$I_3^{\circ} = 0, \quad \text{или} \quad (\nabla R^{\circ})^{-1} \cdot \nabla w = 0 \quad (1.6)$$

В случае аффинной начальной деформации, удобно ввести повернутый вектор перемещений  $w' = w \cdot A^{\circ T}$  и тензор  $D' = D^{\circ} \cdot A^{\circ T}$ . Здесь  $A^{\circ} = G^{x_0^{-1/2}} \cdot \nabla R^{\circ}$  — тензор поворота главных осей начальной деформации. Тогда вместо (1.5), (1.6), будем иметь

$$\frac{1}{2}c_1^{-1}D' = \nabla w' + pG^{x_0^{-1/2}} + mG^{x_0^{-1/2}} \cdot \nabla w'^T \cdot G^{x_0^{-1/2}} \quad (1.7)$$

$$\nabla \cdot G^{x_0^{-1/2}} \cdot w' = 0 \quad (1.8)$$

Так как при аффинной начальной деформации тензор  $A^{\circ}$  постоянный, то уравнения (1.4), очевидно, эквивалентны уравнениям

$$\nabla \cdot D' = 0 \quad \text{в } V, \quad n \cdot D' = 0 \quad \text{на } o_1, \quad w' = 0 \quad \text{на } o_2$$

Подставляя сюда (1.7), получим дифференциальные уравнения нейтрального равновесия в перемещениях для неогукковского материала при аффинной начальной деформации

$$\nabla^2 w' + G^{x_0^{-1/2}} \cdot \nabla p = 0 \quad (1.9)$$

При этом было учтено, что вследствие условия несжимаемости (1.8)

$$\nabla \cdot G^{x_0^{-1/2}} \cdot \nabla w'^T \cdot G^{x_0^{-1/2}} = \nabla \cdot G^{x_0^{-1/2}} (\nabla \cdot G^{x_0^{-1/2}} \cdot w') = 0$$

В дальнейшем рассматривается только аффинная начальная деформация. Чтобы избежать загромождения записи, будем опускать штрих и вектор  $w'$  и тензор  $D'$ , условившись понимать под  $w$  и  $D^{\circ}$  соответственно вектор  $w^{\circ} A^{\circ T}$  и тензор  $D^{\circ} \cdot A^{\circ T}$ . Кроме того, будем опускать значок градус у величин, относящихся к начальному напряженно-деформированному состоянию.

2. Вариационная формулировка задачи о бифуркации равновесия для неогуковского материала при аффинной начальной деформации. Рассмотрим следующий функционал над вектором  $w$  и тензором  $D^*$ , которые рассматриваются как независимые функции координат:

$$\Phi = \iiint_v \left\{ \partial_{sk} \cdot \partial_s u_k - \frac{1}{4c_1} \left[ \frac{\sqrt{G_s G_k}}{G_s G_k - m^2} \left( \frac{G_s G_k}{2} \partial_{sk} \cdot \cdot^2 + \frac{\sqrt{G_s G_k}}{2} \partial_{ks} \cdot \cdot^2 - m \partial_{sk} \cdot \partial_{ks} \cdot \right) - \left( \sum_{n=1}^3 \frac{1}{G_n + m} \right)^{-1} \left( \sum_{n=1}^3 \frac{\sqrt{G_n} \partial_{nn} \cdot}{G_n + m} \right)^2 \right] \right\} d\tau \quad (2.1)$$

$$D^* = \partial_{sk} \cdot e_s e_k, \quad w = u_k e_k, \quad \partial_s \cdot = \frac{\partial}{\partial x_s}$$

Здесь интегрирование производится по объему тела в недеформированном состоянии;  $G_s$  — главные значения тензора  $G^*$  в исходном напряженном состоянии;  $\partial_{sk} \cdot$  — компоненты тензора  $D^*$  в базисе главных направлений  $e_k$  тензора  $G^*$  в начальном напряженном состоянии;  $u_k$  — компоненты вектора  $w$  в базисе  $e_k$ ;  $x_s$  — декартовы координаты недеформированного тела, оси которых направлены по единичным векторам  $e_s$ . В (2.1) подразумевается суммирование по индексам  $s, k = 1, 2, 3$ .

Покажем, что среди всех дважды непрерывно дифференцируемых по координатам функций  $w$ , удовлетворяющих условию  $w = 0$  на  $\sigma_2$ , и всех непрерывно дифференцируемых тензоров  $D^*$  те и только те сообщают функционалу  $\Phi$  стационарное значение, которые удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \cdot D^* = 0, \quad \nabla \cdot G^{*-1/2} \cdot w = 0, \quad \frac{1}{2c_1} D^* = \nabla w + m G^{*-1/2} \cdot \nabla w^T \cdot G^{*-1/2} + p G^{*-1/2} \quad (2.2)$$

где  $p$  — некоторая непрерывно-дифференцируемая функция координат, и граничным условиям на  $\sigma_1$

$$n \cdot D^* = 0$$

Вычислим вариацию функционала  $\Phi$

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & \iiint_v \left\{ \partial_{sk} \cdot \partial_s \delta u_k + \frac{1}{2} \partial_s u_k \delta \partial_{sk} \cdot + \frac{1}{2} \partial_k u_s \delta \partial_{ks} \cdot - \right. \\ & - \frac{1}{4c_1} \left[ \frac{\sqrt{G_s G_k}}{G_s G_k - m^2} (\sqrt{G_s G_k} \partial_{sk} \cdot \delta \partial_{sk} \cdot + \sqrt{G_s G_k} \partial_{ks} \cdot \delta \partial_{ks} \cdot - \right. \\ & \quad \left. - m \partial_{sk} \cdot \delta \partial_{ks} \cdot - m \partial_{ks} \cdot \delta \partial_{sk} \cdot) - \right. \\ & \left. - 2 \left( \sum_{n=1}^3 \frac{1}{G_n + m} \right)^{-1} \sum_{n=1}^3 \frac{\sqrt{G_n} \partial_{nn} \cdot}{G_n + m} \sum_{n=1}^3 \frac{\sqrt{G_n} \delta \partial_{nn} \cdot}{G_n + m} \right] \right\} d\tau \end{aligned}$$

Так как по условию вариации  $\delta u_k$  произвольны, приходим после интегрирования по частям к уравнениям

$$\partial_s \partial_{sk} \cdot = 0 \quad \text{в } v^*, \quad n_s \partial_{sk} \cdot = 0 \quad \text{на } \sigma_1 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

Далее, приравнивания нулю коэффициенты при вариациях  $\delta\partial_{sk}^{\cdot}$  и  $\delta\partial_{ks}^{\cdot}$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_s u_k - \frac{1}{4c_1} \left[ \frac{\sqrt{G_s G_k}}{G_s G_k - m^2} (\sqrt{G_s G_k} \partial_{sk}^{\cdot} - m \partial_{ks}^{\cdot}) \right] &= 0 \\ \frac{1}{2} \partial_k u_s - \frac{1}{4c_1} \left[ \frac{\sqrt{G_s G_k}}{G_s G_k - m^2} (\sqrt{G_s G_k} \partial_{ks}^{\cdot} - m \partial_{sk}^{\cdot}) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

( $s \neq k$ , не суммировать по  $s, k$ )

$$\partial_s u_s = \frac{1}{4c_1} \left[ \frac{G_s}{G_s + m} \partial_{ss}^{\cdot} - 2 \left( \sum_{n=1}^3 \frac{1}{G_n + m} \right)^{-1} \sum_{n=1}^3 \frac{\sqrt{G_n} \partial_{nn}^{\cdot}}{G_n + m} \frac{\sqrt{G_s}}{G_s + m} \right] \quad (2.5)$$

(не суммировать по  $s$ )

Рассматривая (2.4) как систему уравнений для определения  $\partial_{sk}^{\cdot}$ , находим из нее:

$$\frac{1}{2c_1} \partial_{sk}^{\cdot} = \partial_s u_k + \frac{m}{\sqrt{G_s G_k}} \partial_k u_s \quad (s \neq k, \text{ не суммировать по } s, k) \quad (2.6)$$

Систему (2.5) относительно диагональных компонент тензора  $D$  перепишем в виде

$$\frac{\sqrt{G_s}}{G_s + m} \partial_{ss}^{\cdot} - \frac{1}{G_s + m} \left( \sum_{n=1}^3 \frac{1}{G_n + m} \right)^{-1} \sum_{k=1}^3 \frac{\sqrt{G_k} \partial_{kk}^{\cdot}}{G_k + m} = 2c_1 \frac{\partial_s u_s}{\sqrt{G_s}} \quad (2.7)$$

(не суммировать по  $s = 1, 2, 3$ )

Складывая три уравнения системы (2.7), видим, что сумма левых частей дает тождественно нуль. Таким образом, приходим к условию несжимаемости

$$\sum_{s=1}^3 \frac{\partial_s u_s}{\sqrt{G_s}} = 0 \quad (2.8)$$

При выполнении этого условия решение системы (2.7) существует, но не единственно и имеет вид

$$\frac{1}{2c_1} \partial_{ss}^{\cdot} = \frac{G_s + m}{G_s} \partial_s u_s + \frac{p}{\sqrt{G_s}} \quad (\text{не суммировать по } s) \quad (2.9)$$

Здесь  $p$  — неопределенная функция координат. Объединяя формулы (2.6) и (2.9), имеем

$$\frac{1}{2c_1} \partial_{sk}^{\cdot} = \partial_s u_k + \frac{m}{\sqrt{G_s G_k}} \partial_k u_s + p \delta_{sk} \frac{1}{\sqrt{G_s}} \quad (\text{не суммировать по } s, k = 1, 2, 3) \quad (2.10)$$

Так как уравнения (2.3), (2.8) и (2.10) совпадают с (2.2), то наше утверждение доказано.

**3. Вывод двумерных уравнений выпучивания плиты.** Предполагая, что начальная деформация в пластинке представляет собой плоское аффинное преобразование, сопровождаемое равномерным растяжением по оси  $z$ , из уравнений нейтрального равновесия (1.8), (1.9) заключаем, что формы бифуркации распадаются на два независимых типа: симметричные относительно срединной плоскости  $z = 0$  и антисимметричные, т. е. изгибные. Для изгибных форм выпучивания зададимся, аналогично работе [3], следую-

щей аппроксимацией вектора перемещений  $\mathbf{w}$  и тензора  $\mathbf{D}$  от координаты  $z$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{w}_1 z + w_0 \mathbf{i}_3, & \mathbf{w}_1 &= u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 \\ \partial_{sk} \cdot &= \frac{12}{h^3} M_{sk} z & (s, k = 1, 2), & \quad \partial_{33} \cdot = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \partial_{13} \cdot &= \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] V_{13} + \frac{1}{h} V_{13}', & \partial_{31} \cdot &= \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] V_{31} \\ \partial_{23} \cdot &= \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] V_{23} + \frac{1}{h} V_{23}', & \partial_{32} \cdot &= \frac{3}{2h} \left[ 1 - \left( \frac{2z}{h} \right)^2 \right] V_{32} \end{aligned}$$

Введем двумерные векторы

$$V_{13} \mathbf{e}_1 + V_{23} \mathbf{e}_2 = \mathbf{V}_1, \quad V_{13}' \mathbf{e}_1 + V_{23}' \mathbf{e}_2 = \mathbf{V}_3, \quad V_{31} \mathbf{e}_1 + V_{32} \mathbf{e}_2 = \mathbf{V}_2$$

Тогда

$$\mathbf{M} = M_{sk} \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k = \int_{-h/2}^{h/2} \partial_{sk} \cdot \mathbf{e}_s \mathbf{e}_k z dz \quad (s, k = 1, 2)$$

$$\mathbf{V}_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \partial_{3s} \cdot \mathbf{e}_s dz, \quad \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3 = \int_{-h/2}^{h/2} \partial_{s3} \cdot \mathbf{e}_s dz$$

Здесь  $h$  — толщина плиты в недеформированном состоянии. Пользуясь вариационным принципом, сформулированным в п. 2, определим функции двух переменных  $(x, y)$   $w_0$ ,  $\mathbf{w}_1$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{V}_3$  из условия стационарности функционала (2.1). Подставим (3.1) в (2.1), проинтегрируем по  $z$  и вычислим вариацию

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \iint_S \left\{ -(\nabla \cdot \mathbf{M}) \cdot \delta \mathbf{w}_1 - \delta w_0 \partial_1 (V_{13} + V_{13}') - \delta w_0 \partial_2 (V_{23} + V_{23}') + \delta u_1 V_{31} + \right. \\ &+ \delta u_2 V_{32} + \delta M_{sk} \left( \frac{1}{2} \partial_s u_k - \frac{12}{4c_1 h^3} \frac{G_s G_k}{G_s G_k - m^2} M_{sk} + \frac{12m}{4c_1 h^3} \frac{\sqrt{G_s G_k}}{G_s G_k - m^2} M_{ks} \right) + \\ &+ \delta M_{ks} \left( \frac{1}{2} \partial_k u_s - \frac{12}{4c_1 h^3} \frac{G_s G_k}{G_s G_k - m^2} M_{ks} + \frac{12m}{4c_1 h^3} \frac{\sqrt{G_s G_k}}{G_s G_k - m^2} M_{sk} \right) + \\ &+ \sum_{s=1}^2 \delta M_{ss} \left[ \frac{24}{4c_1 h^3} \frac{\sqrt{G_s}}{G_s + m} \left( \sum_{k=1}^3 \frac{1}{G_k + m} \right)^{-1} \sum_{n=1}^2 \frac{\sqrt{G_n} M_{nn}}{G_n + m} \right] + \\ &+ \delta V_{13} \left[ \partial_1 w_0 - \frac{\sqrt{G_1 G_3}}{4c_1 h (G_1 G_3 - m^2)} \left( \frac{12}{5} \sqrt{G_1 G_3} V_{13} + 2 \sqrt{G_1 G_3} V_{13}' - \frac{12}{5} m V_{31} \right) \right] + \\ &+ \delta V_{23} \left[ \partial_2 w_0 - \frac{\sqrt{G_2 G_3}}{4c_1 h (G_2 G_3 - m^2)} \left( \frac{12}{5} \sqrt{G_2 G_3} V_{23} + 2 \sqrt{G_2 G_3} V_{23}' - \frac{12}{5} m V_{32} \right) \right] + \\ &+ \delta V_{13}' \left[ \partial_1 w_0 - \frac{\sqrt{G_1 G_3}}{4c_1 h (G_1 G_3 - m^2)} \left( 2 \sqrt{G_1 G_3} V_{13} + 2 \sqrt{G_1 G_3} V_{13}' - 2m V_{31} \right) \right] + \\ &+ \delta V_{23}' \left[ \partial_2 w_0 - \frac{\sqrt{G_2 G_3}}{4c_1 h (G_2 G_3 - m^2)} \left( 2 \sqrt{G_2 G_3} V_{23}' + 2 \sqrt{G_2 G_3} V_{23} - 2m V_{32} \right) \right] + \\ &+ \delta V_{31} \left[ u_1 - \frac{\sqrt{G_1 G_3}}{4c_1 h (G_1 G_3 - m^2)} \left( \frac{12}{5} \sqrt{G_1 G_3} V_{31} - \frac{12}{5} m V_{13} - 2m V_{13}' \right) \right] + \\ &+ \delta V_{32} \left[ u_2 - \frac{\sqrt{G_2 G_3}}{4c_1 h (G_2 G_3 - m^2)} \left( \frac{12}{5} \sqrt{G_2 G_3} V_{32} - \frac{12}{5} m V_{23} - 2m V_{23}' \right) \right] \} do + \\ &+ \oint_{\gamma} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \delta \mathbf{w}_1 + \mathbf{n} \cdot (\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_3) \delta w_0] ds = 0 \end{aligned}$$

Здесь  $S$  — срединная плоскость плиты,  $\gamma$  — ограничивающий ее контур,  $n$  — нормаль к контуру,  $\nabla$  — двумерный набла-оператор.

Из произвольности вариаций  $\delta M_{sk}$  и  $\delta M_{ks}$  следуют равенства

$$\sqrt{G_s G_k} M_{sk} - m M_{ks} = \frac{c_1 h^3}{6} \frac{G_s G_k - m^2}{\sqrt{G_s G_k}} \partial_s u_k \quad (3.2)$$

$$-m M_{sk} + \sqrt{G_s G_k} M_{ks} = \frac{c_1 h^3}{6} \frac{G_s G_k - m^2}{\sqrt{G_s G_k}} \partial_k u_s$$

( $s \neq k$  не суммировать по  $s, = 1, 2!$ )

$$\frac{\sqrt{G_s}}{G_s + m} M_{ss} - \frac{1}{G_s + m} \left( \sum_{k=1}^2 \frac{1}{G_k + m} \right)^{-1} \sum_{n=1}^2 \frac{\sqrt{G_n} M_{nn}}{G_n + m} = \frac{c_1 h^3}{6} \frac{\partial_s u_s}{\sqrt{G_s}} \quad (3.3)$$

(не суммировать по  $s, k = 1, 2!$ )

Из (3.2) находим:

$$M_{sk} = \frac{c_1 h^3}{6} \left( \partial_s u_k + \frac{m}{\sqrt{G_s G_k}} \partial_k u_s \right) \quad (s \neq k) \quad (3.4)$$

Система (3.3) для диагональных компонент тензора  $M$  допускает единственное решение при любых правых частях, а именно:

$$M_{ss} = \frac{c_1 h^3}{6} \left[ \left( 1 + \frac{m}{\sqrt{G_s}} \right) \partial_s u_s + \frac{G_s + m}{\sqrt{G_s}} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial_k u_k}{\sqrt{G_k}} \right] \quad (3.5)$$

(не суммировать по  $s = 1, 2!$ )

Поэтому в отличие от общего случая п. 2, введенные кинематические величины следует считать независимыми. Объединяя (3.4) и (3.5), получаем

$$M_{sk} = \frac{c_1 h^3}{6} \left[ \partial_s u_k + \frac{m}{\sqrt{G_s G_k}} \partial_k u_s + \delta_{sk} \frac{G_s + m}{\sqrt{G_s}} \sum_{k=1}^2 \frac{\partial_k u_k}{\sqrt{G_k}} \right] \quad (3.6)$$

(не суммировать по  $s, k = 1, 2$ )

Рассмотрим такую начальную деформацию, при которой торцы плиты  $z = \pm h/2$  не нагружены. Тогда из (1.3) находим

$$m = -c_{-1} / c_1 = G_3$$

Кроме того, начальная деформация удовлетворяет условию несжимаемости

$$G_1 G_2 G_3 = 1$$

Учитывая это, представим (3.6) в инвариантном виде

$$M \cdot G^{x^{1/2}} = \frac{c_1 h^3}{6} [\nabla G^x \cdot w_2 + G_3 \nabla w_2^T + 2G_3 \nabla \cdot w_2 E_2] \quad (3.7)$$

$$E_2 = e_1 e_1 + e_2 e_2, \quad w_2 = G^{x^{-1/2}} \cdot w_1$$

Далее, приравняв нулю коэффициенты при вариациях векторов  $V_1, V_2, V_3$  и разрешая полученные уравнения, найдем

$$V_2 \cdot G^{x^{1/2}} = \frac{5}{3} c_1 h [G^x \cdot w_2 + \sqrt{G_3} \nabla w_0] \quad (3.8)$$

$$V_1 + V_3 = \frac{1}{3} c_1 h [5 \sqrt{G_3} w_2 + (6E_2 - G_3 G^{x^{-1}}) \cdot \nabla w_0] \quad (3.9)$$

Из произвольности вариаций кинематических величин следуют уравнения равновесия

$$\nabla \cdot M \cdot G^{x^{1/2}} = V_2 \cdot G^{x^{1/2}}, \quad \nabla \cdot (V_1 + V_3) = 0 \quad (3.10)$$

Подставляя соотношения (3.7) — (3.9) в уравнения (3.10), приходим к уравнениям в перемещениях, описывающим бифуркацию равновесия пластины

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}h^2 (\nabla^2 G^x \cdot w_2 + 3G_3 \nabla \nabla \cdot w_2) - G^x \cdot w_2 - \sqrt{G_3} \nabla w_0 = 0 \\ 5 \sqrt{G_3} \nabla \cdot w_2 + \nabla \cdot (6E_2 - G_3 G^{x-1}) \cdot \nabla w_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Различные варианты граничных условий ясны из структуры контурного интеграла в выражении  $\delta\Phi$ . Из системы дифференциальных уравнений (3.11) оказывается возможным получить отдельное дифференциальное уравнение четвертого порядка для прогиба срединной поверхности  $w_0$ .

Умножим первое уравнение (3.11) на  $\sqrt{G_3} G^{x-1}$  и вычислим дивергенцию от левой части

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}h^2 \sqrt{G_3} (\nabla^2 \nabla \cdot w_2 + 3G_3 \nabla \cdot G^{x-1} \cdot \nabla \nabla \cdot w_2) - \\ - \sqrt{G_3} \nabla \cdot w_2 - G_3 \nabla \cdot G^{x-1} \cdot \nabla w_0 = 0 \end{aligned}$$

Подставляя сюда  $\nabla \cdot w_2$  из второго уравнения (3.11), получим искомое уравнение для  $w_0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{10}h^2 (\nabla^2 + 3G_3 \nabla \cdot G^{x-1} \cdot \nabla) \nabla \cdot (6E_2 - G_3 G^{x-1}) \cdot \nabla w_0 - \\ - 6 \nabla \cdot (E_2 - G_3 G^{x-1}) \cdot \nabla w_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Далее нетрудно видеть, что общее решение для  $w_2$  можно представить в следующей форме:

$$5 \sqrt{G_3} w_2 = \nabla \times \psi i_3 + \varphi - (6E_2 - G_3 G^{x-1}) \cdot \nabla w_0$$

Скалярная функция  $\psi$  находится из уравнения

$$\frac{1}{10}h^2 \nabla^2 \psi - \psi = 0$$

В качестве вектора  $\varphi$  достаточно взять какое-либо частное решение уравнений

$$\frac{1}{10}h^2 \nabla^2 \varphi - \varphi = \frac{1}{10}h^2 (\nabla^2 E_2 + 3G_3 G^{x-1} \cdot \nabla \nabla) \cdot (6E_2 - G_3 G^{x-1}) \cdot \nabla w_0 \quad (3.13)$$

$$- 6 (E_2 - G_3 G^{x-1}) \cdot \nabla w_0, \quad \nabla \cdot \varphi = 0 \quad (3.14)$$

Отметим, что вектор, стоящий в правой части (3.13), соленоидальный в силу уравнения (3.12). Например, в случае равномерно сжатой пластинки, когда

$$G^x = G_1 E_2 + G_3 i_3 i_3$$

решение уравнений (3.13), (3.14), будет

$$\varphi = -\frac{1}{10}h^2 (1 + 3G_1^{-3}) (6 - G_1^{-3}) \nabla \nabla^2 w_0 + 6 (1 - G_1^{-3}) \nabla w_0$$

Допустим, что начальная деформация в пластинке весьма мала, и линеаризуем основное дифференциальное уравнение (3.12) относительно начальной деформации. При малых деформациях имеем

$$G^{x-1} = E - 2\varepsilon$$

Здесь  $\varepsilon$  — линейный тензор деформаций, а по условию несжимаемости в линейном приближении

$$G_3 = 1 - 2E_2 \cdot \varepsilon$$

Подставляя в (3.12), получим

$$\nabla^4 w_0 - \frac{1}{2} h^{-2} (12 + \frac{11}{5} h^2 \nabla^2) \nabla \cdot (\varepsilon + E_2 \cdot \cdot \varepsilon E_2) \nabla \cdot w_0 = 0$$

При малых деформациях неогуковской материал следует закону Гука с модулем сдвига  $\mu = 2c_1$  и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,5$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu^{-1} [T - \frac{1}{3} I_1 (T) E]$$

а с учетом отсутствия напряжений на торцах плиты:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \mu^{-1} (T - \frac{1}{3} T \cdot \cdot E_2 E)$$

Если еще для весьма тонкой пластинки пренебречь величиной  $\frac{11}{5} h^2 \nabla^2$  по сравнению с 12, то уравнение для прогиба  $w_0$  примет вид

$$\frac{1}{3} h^3 \mu \nabla^4 w_0 - \nabla \cdot T \cdot \nabla w_0 = 0$$

При  $\nu = 0,5$  цилиндрическая жесткость плиты равна

$$D \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{2\mu(1+\nu)}{12(1-\nu^2)} h^3 = \frac{h^3}{3} \mu$$

Таким образом, при малой начальной деформации основное дифференциальное уравнение выпучивания (3.12) переходит в уравнение классической теории устойчивости пластинки [4].

**4. Осесимметричное выпучивание равномерно сжатой круглой пластинки.** (Пример 1). Пусть  $r, \theta$  — полярные координаты в плоскости недеформированной пластинки, а  $e_i, e_\theta$  — соответствующие им базисные векторы. Решением системы (3.11) при наличии осевой симметрии будет

$$\begin{aligned} w_0 &= C J_0(\alpha r) + D, & v &= w_2 \cdot e_\theta = 0, \\ u &= w_2 \cdot e_r = \frac{1}{5} G_1 (6 - G_1^{-3}) C \alpha J_1(\alpha r) & \alpha^2 &= - \frac{60(1 - G_1^{-3})}{h^2(1 + 3G_1^{-3})(6 - G_1^{-3})} \end{aligned}$$

Здесь  $J_0, J_1$  — функции Бесселя,  $C$  и  $D$  — постоянные интегрирования. Если пластинка закреплена по контуру, то из условия  $u = 0$  при  $r = a$  приходим к уравнению

$$\frac{60(G_1^3 - G_1^6)}{6G_1^6 + 17G_1^3 - 3} = \gamma_n^2 \frac{h^2}{a^2} \quad (4.1)$$

Здесь  $\gamma_n$  — нули функции  $J_1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). При выполнении (4.1), как легко проверить, выполняется также условие

$$e_r \cdot (V_1 + V_3) = 0 \quad \text{при } r = a$$

т. е. это решение пригодно и при условии «скользящей заделки» на краю.

Для сравнения результатов рассмотрим точное решение об осесимметричной бифуркации равновесия круглого цилиндра из неогуковского материала, сжатого по боковой поверхности равномерным давлением. Торцы цилиндра свободны, а боковая поверхность закреплена от поворота, но может скользить по оси  $z$  (оси цилиндра). При малой толщине цилиндра такие краевые условия соответствуют заземленной пластинке. Итак, надо получить решения уравнений (1.8), (1.9), удовлетворяющие условиям

$$i_3 \cdot D^* = 0 \quad (z = \pm \frac{1}{2} h), \quad e_r \cdot D^* \cdot i_3 = 0, \quad u = w \cdot e_r = 0 \quad (r=a) \quad (4.2)$$

Здесь  $D^*$  определено формулой (1.7). В данном случае равномерного сжатия

$$G^* = G_1 E_2 + G_3 i_3 i_3 = \beta^2 E_2 + \beta^{-4} i_3 i_3$$

Следствием уравнений (1.8), (1.9) является

$$\nabla \cdot G^{*-1} \cdot \nabla p = 0 \quad (4.3)$$

Здесь  $\nabla$  — трехмерный оператор Гамильтона.

Для осесимметричных форм бифуркации  $v = w \cdot e_\theta = 0$  и уравнения (1.8), (1.9) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta^2 \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \beta^3 \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (w=w \cdot 1_s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Уравнение (4.3) запишется так:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} + \beta^6 \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (4.5)$$

По (1.7) с учетом того, что

$$\bar{m} = G_3 = \beta^{-4}$$

получим вместо (4.2)

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \beta^3 \frac{\partial w}{\partial r} = 0 \quad (r=a) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\beta^3} \frac{\partial w}{\partial r} = 0, \quad 2 \frac{\partial w}{\partial z} + p \beta^2 = 0 \quad (z = \pm 1/2 h) \quad (4.7)$$

Будем искать только изгибные формы бифуркации, при которых  $u, p$  — нечетные функции  $z$ , а  $w$  — четная функция  $z$ . Тогда решением уравнения (4.5) будет

$$p = B J_0(kr) \operatorname{sh} k \beta^{-3} z \quad (B, k = \text{const})$$

Теперь из первых двух уравнений (4.4) найдем

$$\begin{aligned} w &= \left[ \frac{\beta^5}{(1 - \beta^6) k} B \operatorname{ch} k \beta^{-3} z + A \operatorname{ch} kz \right] J_0(kr) + D \\ u &= \left[ \frac{\beta^5}{(1 - \beta^6) k} B \operatorname{sh} k \beta^{-3} z + A' \operatorname{sh} kz \right] J_1(kr) \end{aligned}$$

Из третьего уравнения (4.4) получаем

$$A' = -\beta^{-3} A$$

Если выбрать постоянную  $k$  так, чтобы  $J_1(ka) = 0$ , то граничные условия (4.6) на боковой поверхности будут удовлетворены. Итак, положим

$$k = k_n = \gamma_n / a \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

Следовательно, для каждого номера  $n$  имеем решение

$$\begin{aligned} u_n &= \left[ \frac{\beta^5}{(1 - \beta^6) k_n} B_n \operatorname{sh} k_n \beta^{-3} z - A_n \beta^3 \operatorname{sh} k_n z \right] J_1(k_n r) \\ w_n &= \left[ \frac{\beta^5}{(1 - \beta^6) k_n} B_n \operatorname{ch} k_n \beta^{-3} z + A_n \operatorname{ch} k_n z \right] J_0(k_n r) + D \\ p_n &= B_n \operatorname{sh} k_n \beta^{-3} z J_0(k_n r) \end{aligned}$$

Далее, удовлетворяя условиям (4.7) на торцевых поверхностях цилиндра, составим систему однородных линейных уравнений относительно постоянных  $A_n, B_n$ , и, приравняв нулю ее определитель, придем к трансцендентному уравнению для критических значений  $\beta$

$$\frac{(1 + \beta^6)^2}{\beta^3} \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} \gamma_n \frac{h}{a} \beta^{-3} \right) = 4 \operatorname{th} \left( \frac{1}{2} \gamma_n \frac{h}{a} \right) \quad (4.8)$$

При  $\gamma_n h / a = 1$  значение корня уравнения (4.8) есть  $\beta_* = 0.944$ . Так как  $\gamma_1 = 3.83$ , это значение соответствует первой форме выпучивания пластинки с отношением  $2a / h = 7.66$ . Уравнение (4.1) приближенной двумерной теории дает для  $\gamma_n h / a = 1$ :  $\beta_* = 0.945$ . Классическая теория выпучивания пластинок в этом примере дает

$$\beta_* = 1 - \frac{1}{18} \gamma_n^2 \frac{h^2}{a^2} \quad (\beta_* = 0.944 \text{ при } \gamma_n h / a = 1)$$

Таким образом, в случае достаточно тонкой равномерно сжатой пластинки, как двумерная теория, нелинейная относительно начальной деформации, так и классическая теория выпучивания, дают правильные результаты для критической деформации, соответствующей первой форме выпучивания.

Отметим, что согласно точному решению (4.8) критическое значение начального сжатия, соответствующее бесконечному числу узловых окружностей ( $\gamma_n \rightarrow \infty$ ), определяется уравнением

$$(1 + \beta^6)^2 = 4\beta^3$$

Отсюда  $\beta_\infty = 0.664$ . Одновременно это означает, что сколь угодно толстая плита выпучивается при  $\beta = \beta_\infty$ .

5. Прямоугольная плита при комбинированном начальном нагружении (Пример 2). Пусть начальная деформация в плите такова, что ее главные оси  $e_s$  параллельны сторонам плиты

$$G^x = \lambda_1^2 i_1 i_1 + \lambda_2^2 i_2 i_2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} i_3 i_3$$

Тогда система дифференциальных уравнений (3.11) запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{h^2}{10} \left( \lambda_1^2 + \frac{3}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h^2}{10} \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{h^2}{10} \frac{3}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \lambda_1^2 u - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial w_0}{\partial x} &= 0 \\ \frac{h^2}{10} \left( \lambda_2^2 + \frac{3}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{h^2}{10} \lambda_2^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{10} \frac{3}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \lambda_2^2 v - \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \frac{\partial w_0}{\partial y} &= 0 \\ \frac{5}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( 6 - \frac{1}{\lambda_1^4 \lambda_2^2} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \left( 6 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^4} \right) \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $x, y$  — декартовы координаты в срединной плоскости недеформированной пластинки:  $0 \leq x \leq a$ ;  $0 \leq y \leq b$ ;  $u, v$  — компоненты вектора  $w_2$  по осям  $x, y$ . Предположим, что пластинка шарнирно оперта по всем своим краям, т. е. имеет следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} w_0 = 0, \quad M_{11} = 0, \quad v = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = a \\ w_0 = 0, \quad M_{22} = 0, \quad u = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad y = b \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, основываясь на (3.7), что этим условиям удовлетворяют функции

$$\begin{aligned} u = U \cos \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad v = V \sin \frac{m\pi}{a} x \cos \frac{n\pi}{b} y \\ w_0 = W \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \end{aligned}$$

Здесь  $U, V, W$  не зависят от  $x, y$ , а  $m, n = 1, 2, 3, \dots$ . Подставляя эти выражения в (5.1), приходим к системе однородных линейных уравнений относительно  $U, V, W$ . Вычисление определителя этой системы для квадратной пластинки  $a = b$  приводит к уравнению

$$\begin{aligned} [h_*^2 (m^2 + n^2) + 1] \left\{ -6 \left( \frac{m^2}{\lambda_1^2} + \frac{n^2}{\lambda_2^2} \right) + 6\lambda_1^2 \lambda_2^2 (m^2 + n^2) [h_*^2 (m^2 + n^2) + 1] + \right. \\ \left. + 17h_*^2 (m^2 + n^2) \left( \frac{m^2}{\lambda_1^2} + \frac{n^2}{\lambda_2^2} \right) - 3 \frac{h_*^2}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \left( \frac{m^2}{\lambda_1^2} + \frac{n^2}{\lambda_2^2} \right)^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\left( h_*^2 = \frac{\pi^2 h^2}{10 a^2} \right)$$

Если далее обозначить

$$\left( \frac{m^2}{\lambda_1^2} + \frac{n^2}{\lambda_2^2} \right) \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} = t \quad (5.3)$$

то (5.2) сводится к квадратному уравнению, из которого имеем:

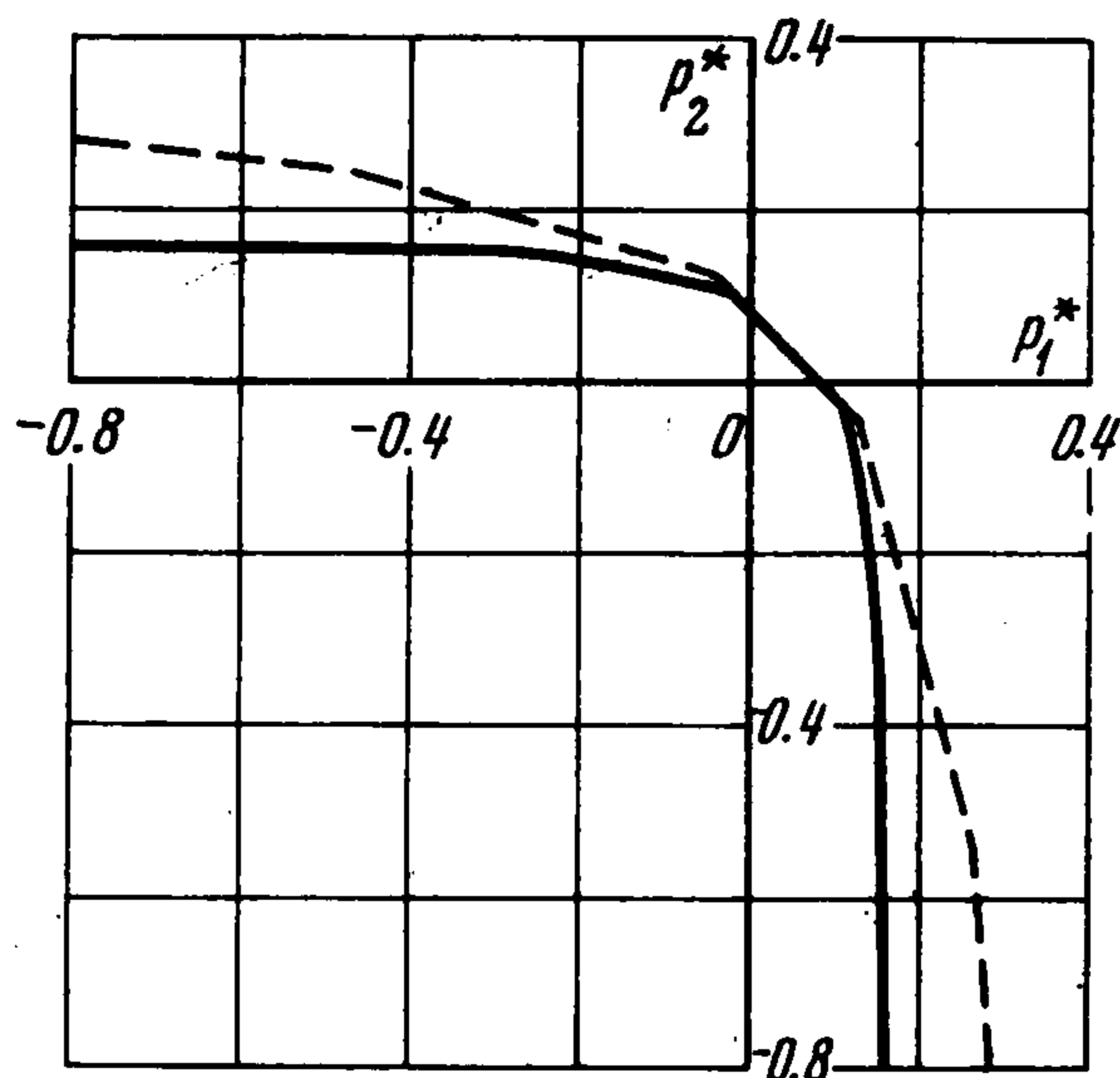
$$t = \frac{1}{6h_*^2} \{- [6 - 17h_*^2(m^2 + n^2)] \pm \sqrt{[6 - 17h_*^2(m^2 + n^2)]^2 + 72h_*^2(m^2 + n^2)[1 + h_*^2(m^2 + n^2)]}\} \quad (5.4)$$

Так как величина  $t$  не может быть отрицательной, корень со знаком минус перед радикалом должен быть отброшен. Второй корень всегда положителен, так что критическое значение  $t$  существует при любой толщине пластинки. Определив для данных  $m, n$  величину, получаем по (5.3) критическое соотношение между параметрами  $\lambda_1, \lambda_2$ .

Давления  $p_1, p_2$ , действующие по граням  $x = 0, x = a$  и  $y = 0, y = b$  в начальном деформированном состоянии и рассчитанные на единицу площади недеформированного тела, выражаются по (1.3) формулами

$$p_1^* = \frac{p_1}{4c_1} = \frac{1}{2\lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - \lambda_1^2 \right), \quad p_2^* = \frac{p_2}{4c_1} = \frac{1}{2\lambda_2} \left( \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} - \lambda_2^2 \right)$$

Для каждого набора целых чисел  $m, n$  критическое соотношение между  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяет некоторую кривую в плоскости параметров нагружения  $p_1^*, p_2^*$ .



Линия, составленная из участков этих кривых, наиболее близко расположенных к началу координат  $p_1^* = 0, p_2^* = 0$ , отделяет область устойчивости от области неустойчивости и называется пограничной.

На фигуре представлена пограничная линия, полученная в результате вычислений по формулам (5.3), (5.4). Штриховая линия отвечает классической теории выпучивания пластинок. При вычислении принято  $h_*^2 = 0.01$ , что примерно соответствует относительной толщине пластинки  $h/a = 0.1$ . Из этих результатов вытекает, что в случае пластины, сжатой в обоих направлениях, обычная теория выпучивания дает для нижней

критической нагрузки результаты, близкие к истинным; если же пластинка в одном направлении растянута, а в другом сжата, то обычная теория дает завышенные результаты для нижней критической нагрузки.

В работах [5,6] для равномерно сжатой прямоугольной пластинки из неогуковского материала и материала Муни получен результат о существовании предельной толщины, превышение которой гарантирует устойчивость пластинки при любом сжимающем давлении. Однако все известные точные решения задач о бифуркации равновесия трехмерных упругих тел говорят о противоположном: сколь угодно толстые пластинки теряют устойчивость при конечной величине начальной деформации.

Поступила 29 I 1970

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. Бифуркация равновесия идеально упругого тела. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
2. Л у р ь е А. И. Теория упругости для полулинейного материала. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
3. З у б о в Л. М. Приближенная теория выпучивания тонких пластинок из полулинейного материала при аффинной начальной деформации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
4. Т и м о ш е н к о С. П. Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.
5. В о л ь в и ч С. И. Устойчивость конечных деформаций пластинки. Сб.: «Проблемы устойчивости в строительной механике», М., Стройиздат, 1965, стр. 203—209.
6. В о л ь в и ч С. И., Ф о к и н Ю. Ф. К теории изгиба пластинок с учетом конечных деформаций. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок (Баку, 1966), М., «Наука», 1966.