Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Построена система однородных решений осесимметричной смешанной задачи теории упругости для бесконечного цилиндра, одна часть поверхности которого свободна от напряжений, а другая находится в условиях скользящей заделки. Получены асимптотические формулы, определяющие концентрацию напряжений и форму свободной поверхности у линии раздела граничных условий. Система может быть использована для удовлетворения условий на торцах полубесконечного или конечного цилиндра.

Рассмотрены три контактные задачи о полубесконечном цилиндре, частично обжатом без трения абсолютно жесткой обоймой. При этом условия на боковой поверхности удовлетворяются точно. Коэффициенты в рядах по однородным решениям определяются из нормальных систем алгебраических уравнений.

1. Рассмотрим систему однородных решений, каждое из которых удовлетворяет смешанным условиям на поверхности цилиндра единичного радиуса

$$\tau_{rz} = u = 0 \qquad \text{при } r = 1, \ z \geqslant 0 \tag{1.1}$$

$$\tau_{rz} = \sigma_r = 0 \qquad \text{при } r = 1, \ z < 0 \tag{1.2}$$

и имеет конечную энергию упругих напряжений у линии раздела этих условий при $r = 1$

$$\sigma_r \sim O(z^{\alpha_1 - 1}) \ \text{при } z \to +0, \qquad u \sim O(z^{\alpha_2}) \ \text{при } z \to -0$$
$$(\alpha_1, \ \alpha_2 > 0) \tag{1.3}$$

Начнем с построения подсистемы решений, неограниченно возрастающих при $z \to \infty$. В формулах Папковича — Нейбера [1]

$$u(z, r) = F_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial r}(rF_1 + zF_2 + F_3) \tag{1.4}$$

$$w(z, r) = F_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial z}(rF_1 + zF_2 + F_3)$$

положим

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = A_k e^{a_k z} J_0(a_k r), \qquad F_3 = B_k e^{a_k z} J_0(a_k r)$$
$$(k = 1, 2, \ldots)$$

где A_k и B_k — произвольные вещественные постоянные, a_k — положительные нули функции Бесселя $J_1(\nu)$.

Полученное решение, которое обозначим индексом $k1$, удовлетворит условию (1.1)

$$u^{k1}(z,r) = m_1 a_k e^{a_k z}(A_k z + B_k) J_1(a_k r)$$

$$\tau_{rz}^{k1}(z,r) = 2Gm_1 a_k e^{a_k z}[A_k(a_k z - m_2) + B_k a_k] J_1(a_k r) \tag{1.5}$$

$$\sigma_r^{k1}(z,r) = 2Gm_1 a_k e^{a_k z}\{A_k[2\sigma J_0(a_k r) + [a_k J_0(a_k r) -$$
$$- r^{-1}J_1(a_k r)]z] + B_k[m_2^{-1}(a_k - \sigma a_k - \sigma)J_0(a_k r) - r^{-1}J_1(a_k r)]\}$$

Здесь

$$m_1 = [4(1-\sigma)]^{-1}, \quad m_2 = 1 - 2\sigma, \quad m_3 = [2(1+\sigma)]^{-1}, \quad m_4 = 2(1-\sigma)$$

Чтобы удовлетворить условию (1.2), найдем и добавим к (1.5) решение следующей задачи:

$$\tau_{rz} = 0 \quad \text{при } r = 1, \ -\infty < z < \infty \tag{1.6}$$

$$u = 0 \quad \text{при } r = 1, \ z \geqslant 0; \qquad \sigma_r = -\sigma_r^{k1}(z,1) \quad \text{при } r = 1, \ z < 0 \tag{1.7}$$

Положим в формулах (1.4)

$$F_2 = 0, \qquad F_1 = \partial F_4/\partial r, \qquad F_3 = 4(1-\sigma)(F_4 - F_5) \tag{1.8}$$
$$\left(\Delta F_4 = \Delta F_5 = 0, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

и применим к ним двустороннее преобразование Лапласа. Интегрируя по частям и считая, что перемещения при $z \to \infty$ ограничены, при $z \to -\infty$ убывает как $e^{\alpha z}$ $(\alpha > 0)$, а параметр ν находится в полосе $0 < \operatorname{Re}\nu < \alpha$, получим

$$u(\nu, r) = \int_{-\infty}^{\infty} u(z,r)e^{-\nu z}dz = C_k(\nu)[\varepsilon'(\nu) + \rho'(\nu)] \tag{1.9}$$

$$w(\nu, r) = \int_{-\infty}^{\infty} w(z,r)e^{-\nu z}dz = C_k(\nu)\nu[\varepsilon(\nu) - \rho(\nu)] \tag{1.10}$$

$$\varepsilon(\nu) = \nu[J_0(\nu)J_0(\nu r) + rJ_1(\nu)J_1(\nu r)], \quad \rho(\nu) = m_4 J_1(\nu) J_0(\nu r)$$

Здесь штрих означает производную по r, при вычислении функций $\varepsilon(\nu)$ и $\rho(\nu)$ использовано условие (1.6).

Вычислим функцию $C_k(\nu)$. Для этого введем обозначения

$$u^-(\nu) = \int_{-\infty}^{0} u(z,1)e^{-\nu z}dz, \quad \sigma^-(\nu) = \int_{-\infty}^{0} \sigma_r(z,1)e^{-\nu z}dz$$

$$\sigma^+(\nu) = \int_{0}^{\infty} \sigma_r(z,1)e^{-\nu z}dz$$

и составим из условий (1.7) систему уравнений

$$-m_4\nu J_1^2(\nu)C_k(\nu) = u^-(\nu), \qquad 2G\nu R(\nu)C_k(\nu) = \sigma^-(\nu) + \sigma^+(\nu) \tag{1.11}$$

в которой, согласно (1.5)

$$\sigma^-(\nu) = 2Gm_1a_k(a_k - \nu)^{-1}\{A_k[a_k(a_k-\nu)^{-1}J_0(a_k) - 2\sigma J_0(a_k)] + \\ + B_km_2^{-1}(\sigma a_k + \sigma - a_k)J_0(a_k)\} \tag{1.12}$$

$$R(\nu) = \nu^2J_0^2(\nu) + (\nu^2 - m_4)J_1^2(\nu) \tag{1.13}$$

Исключив из (1.11) функцию $C_k(\nu)$, получим уравнение Винера — Хопфа

$$K(\nu)u^-(\nu) = \sigma^+(\nu) + \sigma^-(\nu), \qquad K(\nu) = 4Gm_1R(\nu)J_1^{-2}(\nu) \tag{1.14}$$

Функцию $K(\nu)$ представим в виде

$$K(\nu) = K(0)K^-(\nu)[K^+(\nu)]^{-1} \tag{1.15}$$

$$K(0) = \frac{2G(1+\sigma)}{(1-\sigma)}, \quad K^+(\nu) = \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1+\nu/a_n)^2}{(1+\nu/b_n)(1+\nu/\bar{b}_n)}$$

$$K^-(\nu) = \frac{1}{K^+(-\nu)} \tag{1.16}$$

Здесь b_n и $\bar{b}_n$ — пара комплексно сопряженных нулей функции $R(\nu)$ ($\operatorname{Re} b_n > 0$, $\operatorname{Im} b_n > 0$). Обоснование факторизации (1.16) сделано в работе Б. И. Когана [2], там же получена оценка

$$K^-(\nu) = \sqrt{-\nu[2+2\sigma]^{-1}} + O(1) \quad \text{при } \nu\to\infty, \ \operatorname{Re}\nu < 0 \tag{1.17}$$

Учитывая (1.15), перепишем уравнение (1.14) в виде

$$K(0)K^-(\nu)u^-(\nu) = \sigma^+(\nu)K^+(\nu) + \sigma^-(\nu)K^+(\nu) \tag{1.18}$$

и вычтем из обеих частей (1.18) функцию

$$N_k(\nu) = K^+(a_k)[\sigma^-(\nu) + 2A_kGm_1a_k^2(a_k-\nu)^{-1}J_0(a_k)T(a_k)] \tag{1.19}$$

$$T(a_k) = \sum_{p=1}^{\infty}[(b_p + a_k)^{-1} + (\bar{b}_p + a_k)^{-1} - 2(a_p + a_k)^{-1}]$$

Левая и правая части полученного уравнения будут регулярны в соответствующих полуплоскостях с общей полосой $0 < \operatorname{Re}\nu < \alpha$. На основе формул (1.16), (1.19) условия (1.3) и оценки (1.17) нетрудно доказать обычным путем [3], опираясь на теорему Лиувилля, что имеют место тождества

$$K(0)K^-(\nu)u^-(\nu) - N_k(\nu) = \sigma^+(\nu)K^+(\nu) + \sigma^-(\nu)K^+(\nu) - N_k(\nu) = 0 \tag{1.20}$$

Отсюда и из уравнений (1.11) получим

$$C_k(\nu) = -\frac{N_k(\nu)}{2G\nu R(\nu)K^+(\nu)} = -\frac{N_k(\nu)}{m_1K(0)\nu J_1^2(\nu)} \tag{1.21}$$

Решение задачи (1.6), (1.7) дается формулами обращения

$$\begin{aligned} u^{k2}(z,r) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L C_k(\nu)[\varepsilon'(\nu) + \rho'(\nu)]e^{\nu z}d\nu \\ w^{k2}(z,r) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L C_k(\nu)\nu[\varepsilon(\nu) - \rho(\nu)]e^{\nu z}d\nu \end{aligned} \tag{1.22}$$

где контур L лежит в полосе $0 < \operatorname{Re}\nu < \alpha$.

Складывая выражения (1.5) и (1.22), получим решение исходной задачи

$$u^{(k)}(z,r)=m_1a_ke^{a_kz}(A_kz+B_k)J_1(a_kr)+\frac{1}{2\pi i}\int_L C_k(\nu)[\varepsilon'(\nu)+\rho'(\nu)]e^{\nu z}d\nu$$

$$w^{(k)}(z,r)=-m_1e^{a_kz}[A_k(a_kz+4\sigma-3)+B_ka_k]J_0(a_kr)+ \qquad (1.23)$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_L C_k(\nu)\nu[\varepsilon(\nu)-\rho(\nu)]e^{\nu z}d\nu$$

$$\sigma_z^{(k)}(z,r)=2Gm_1a_ke^{a_kz}[A_k(m_4-a_kz)+B_km_2^{-1}(\sigma a_k+\sigma-1)]J_0(a_kr)+$$
$$+\frac{G}{\pi i}\int_L C_k(\nu)\nu^2[\varepsilon(\nu)-4m_1\rho(\nu)]e^{\nu z}d\nu$$

$$\tau_{rz}^{(k)}(z,r)=2Gm_1a_ke^{a_kz}[A_k(a_kz-m_2)+B_ka_k]J_1(a_kr)+$$
$$+\frac{G}{\pi i}\int_L C_k(\nu)\nu\varepsilon'(\nu)e^{\nu z}d\nu$$

$$\sigma_r^{(k)}(z,r)=2Gm_1a_ke^{a_kz}\{A_k[2\sigma J_0(a_kr)+[a_kJ_0(a_kr)-r^{-1}J_1(a_kr)]z]+$$
$$+B_k[m_2^{-1}(a_k-\sigma a_k-\sigma)J_0(a_kr)-r^{-1}J_1(a_kr)]\}+$$
$$+\frac{G}{\pi i}\int_L C_k(\nu)[r^{-1}\varepsilon'(\nu)+r^{-1}\rho'(\nu)+\nu^2\varepsilon(\nu)]e^{\nu z}d\nu$$

Определим характер концентрации нормальных напряжений около линии раздела граничных условий. Согласно соотношению (1.20), имеем

$$\sigma_r^{(k)}(z,1)=\sigma_r^{k1}(z,1)+\frac{1}{2\pi i}\int_L[\sigma^+(\nu)+\sigma^-(\nu)]e^{\nu z}d\nu=$$
$$=\sigma_r^{k1}(z,1)-\operatorname{Res}\left\{\frac{N_k(a_k)e^{a_kz}}{K^+(a_k)}\right\}+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{N_k(\nu)e^{\nu z}d\nu}{K^+(\nu)}$$

где через L_k обозначен перенесенный вправо за точку $\nu=a_k$ контур L. Рассмотрим последнее выражение. Контур L_k замкнем справа, где подынтегральная функция регулярна, полуокружностью большого радиуса. По лемме Жордана и теореме Коши интеграл при $z<0$ равен нулю и, следовательно, в силу условия (1.2) первые два слагаемые взаимно уничтожаются. Сделаем замену $v=\nu z$, не распространяя ее на L_k. По формулам (1.16), (1.17) и (1.19) получим при $z\to+0$

$$\sigma_r^{(k)}(z,1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{N_k(\nu)e^{\nu z}d\nu}{K^+(\nu)}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{N_k(v/z)e^vdv}{zK^+(v/z)}=$$
$$=\frac{Gm_1E_k}{\pi i\sqrt{2(1+\sigma)z}}\int\frac{e^vdv}{\sqrt{v}}+O(1)$$

где

$$E_k=a_kJ_0(a_k)K^+(a_k)\{A_k[2\sigma-a_kT(a_k)]+B_km_2^{-1}(a_k-\sigma a_k-\sigma)\}$$

Контур L_k замкнем слева полуокружностью большого радиуса и контуром L_*, составленным из двубережного разреза по отрицательной вещественной полуоси и окружности $|v| = {}^1/_2 a_1$. Пользуясь леммой Жордана и теоремой Коши, заменим L_k контуром L_* и по формуле

$$\frac{1}{\Gamma(y)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_*} e^v v^{-y}\, dv \tag{1.24}$$

получим окончательно при $z \to +0$

$$\sigma_r^{(k)}(z, 1) \sim 2Gm_1E_k\,[2\pi(1+\sigma)\,z]^{-1/2} \tag{1.25}$$

Определим форму свободной поверхности деформированного цилиндра у линии $z = 0$, $r = 1$. Согласно условию (1.1) и первой части соотношения (1.20), имеем

$$u^{(k)}(z, 1) = \frac{1}{2\pi i}\int_L u^-(\nu)\, e^{\nu z}\, d\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{N_k(\nu)\, e^{\nu z}\, d\nu}{K(0)\, K^-(\nu)}$$

Положим $v = -\nu z$ $(z < 0)$, за контур интегрирования L_1 в плоскости v возьмем прямую $\operatorname{Re} v = -1$. Подставив вместо функции $K^-(-v/z)$ при малых z ее асимптотику (1.17), а вместо $N_k(\nu)$ — выражение (1.19), получим

$$u^{(k)}(z, 1) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{N_k(-v/z)\, e^{-v}\, dv}{zK(0)\, K^-(-v/z)} = \frac{E_k\sqrt{-2(1+\sigma)z}}{8\pi(1+\sigma)}\int_{L_1}\frac{e^{-v}\, dv}{v^{3/2}} + O(z^{-1})$$

Как и раньше, заменим L_1 контуром L_2, составленным из двубережного разреза по положительной полуоси и окружности $|v| = {}^1/_2$. Пользуясь формулой

$$(e^{2\pi i y} - 1)\,\Gamma(y) = \int_{L_2} e^{-v} v^{y-1}\, dv \tag{1.26}$$

(контуры в интегралах (1.24) и (1.26) обводятся против часовой стрелки), получим при $z \to -0$

$$u^{(k)}(z, 1) \sim -E_k\sqrt{-z\,[2\pi(1+\sigma)]^{-1}} \tag{1.27}$$

Построим теперь подсистему с особенностью в точке $z = -\infty$. Взяв решение в форме (1.4), (1.8) и удовлетворив условию (1.2), получим [4]

$$u^{k3}(z, r) = \Phi^{k3}\{\varepsilon'(\nu) + \rho'(\nu)\}, \qquad w^{k3}(z, r) = \Phi^{k3}\{\nu\,[\varepsilon(\nu) - \rho(\nu)]\} \tag{1.28}$$

$$\Phi^{k3}\{f(\nu)\} = A_k \operatorname{Re}[f(b_k)\, e^{b_k z}] + B_k \operatorname{Im}[f(b_k)\, e^{b_k z}]$$

где $k = -1, -2, \ldots$; $b_{-1}, b_{-2}, \ldots$ — нули функции $R(\nu)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\nu < 0$. Заметим, что по определению и в силу формул (1.13) (1.10) имеют место равенства

$$b_{-k} = -b_k, \quad \varepsilon(-\nu) = -\varepsilon(\nu), \quad \rho(-\nu) = -\rho(\nu) \tag{1.29}$$

Прибавим к (1.28) решение смешанной задачи

$$\tau_{rz} = \sigma_r = 0 \quad \text{при } r = 1,\ z < 0$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad u = -u^{k3}(z, 1) \quad \text{при } r = 1,\ z \geqslant 0$$

Это решение по аналогии с решением (1.22) находится методом Винера — Хопфа и имеет вид

$$u^{k4}(z, r) = \Phi^{k4}\{\varepsilon'(\nu) + \rho'(\nu)\}, \qquad w^{k4}(z, r) = \Phi^{k4}\{\nu[\varepsilon(\nu) - \rho(\nu)]\}$$
$$\Phi^{k4}\{f(\nu)\} = A_k \operatorname{Re} H_k[f(\nu)] + B_k \operatorname{Im} H_k[f(\nu)] \tag{1.30}$$
$$H_k[f(\nu)] = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{(1+\sigma) b_k J_1^2(b_k) K^-(b_k) f(\nu) e^{\nu z} d\nu}{\nu R(\nu) K^+(\nu)(\nu - b_k)}$$

В результате получим ($k = -1, -2, \ldots$)

$$u^{(k)}(z, r) = \Phi^{(k)}\{\varepsilon'(\nu) + \rho'(\nu)\}, \qquad w^{(k)}(z, r) = \Phi^{(k)}\{\nu[\varepsilon(\nu) - \rho(\nu)]\}$$
$$\sigma_z^{(k)}(z, r) = \Phi^{(k)}\{2G\nu^2[\varepsilon(\nu) - 4m_1\rho(\nu)]\}, \qquad \tau_{rz}^{(k)}(z, r) = \Phi^{(k)}\{2G\nu\varepsilon'(\nu)\}$$
$$\sigma_r^{(k)}(z, r) = \Phi^{(k)}\{2G[r^{-1}\varepsilon'(\nu) + r^{-1}\rho'(\nu) + \nu^2\varepsilon(\nu)]\} \tag{1.31}$$
$$\Phi^{(k)}\{f(\nu)\} = \Phi^{k3}\{f(\nu)\} + \Phi^{k4}\{f(\nu)\}$$

Повторяя рассуждения, применявшиеся при выводе формул (1.27) и (1.25), найдем соответственно концентрацию напряжений и форму свободной поверхности у линии раздела условий

$$\sigma_r^{(k)}(z, 1) \sim 2G[2(1+\sigma)]^{1/2}(\pi z)^{-1/2}\Phi^{k3}\{K^-(\nu) J_1^2(\nu)\} \quad \text{при } z \to +0 \tag{1.32}$$
$$u^{(k)}(z, 1) \sim -4(1-\sigma)\sqrt{-2\pi^{-1}(1+\sigma)z}\,\Phi^{k3}\{K^-(\nu) J_1^2(\nu)\} \quad \text{при } z \to -0$$

Главный вектор каждого однородного решения подсистем (1.23) и (1.31) равен нулю. Выпишем элементарное решение задачи о растяжении цилиндра [1]

$$\sigma_z = A_0, \quad \tau_{rz} = \sigma_r = \sigma_\varphi = 0, \quad u = -\frac{A_0\sigma r}{2G(1+\sigma)}, \quad w = \frac{A_0 z}{2G(1+\sigma)} + B_0 \tag{1.33}$$

Добавив к нему решение смешанной задачи

$$\tau_{rz} = \sigma_r = 0 \ \text{ при } r = 1,\ z < 0; \quad \tau_{rz} = 0, \ u = \frac{A_0\sigma r}{2G(1+\sigma)} \ \text{ при } r = 1,\ z \geqslant 0 \tag{1.34}$$

получим решение задачи (1.1), (1.2) с ненулевым главным вектором без особенностей в точках $z = \pm\infty$

$$u^{(0)}(z, r) = -\frac{A_0\sigma}{2G(1+\sigma)}\left\{1 + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{[\varepsilon'(\nu) + \rho'(\nu)]e^{\nu z} d\nu}{2(1-\sigma)\nu^2 J_1^2(\nu) K^-(\nu)}\right.$$

$$w^{(0)}(z, r) = \frac{A_0}{2G(1+\sigma)}\left\{z - \frac{\sigma}{2\pi i}\int\limits_L \frac{[\varepsilon(\nu) - \rho(\nu)]e^{\nu z} d\nu}{m_4\nu J_1^2(\nu) K^-(\nu)}\right\} + B_0$$

$$\sigma_r^{(0)}(z, r) = \frac{A_0}{4\pi i(1-\sigma^2)}\int\limits_L \frac{[r^{-1}\varepsilon'(\nu) + r^{-1}\rho'(\nu) + \nu^2\varepsilon(\nu)]e^{\nu z} d\nu}{\nu^2 J_1^2(\nu) K^-(\nu)} \tag{1.35}$$

$$\sigma_z^{(0)}(z, r) = A_0\left\{1 - \frac{\sigma}{4\pi i(1-\sigma^2)}\int\limits_L [\varepsilon(\nu) - 4m_1\rho(\nu)]\frac{e^{\nu z} d\nu}{J_1^2(\nu) K^-(\nu)}\right.$$

$$\tau_{rz}^{(0)}(z, r) = -\frac{A_0\sigma}{4\pi i(1-\sigma^2)}\int\limits_L \frac{\varepsilon'(\nu) e^{\nu z} d\nu}{\nu J_1^2(\nu) K^-(\nu)}$$

$$\sigma_r^{(0)}(z, 1) \sim \frac{A_0\sigma(1+\sigma)^{1/2}}{(1-\sigma)\sqrt{2\pi z}} \ \text{ при } z \to +0, \quad u^{(0)}(z, 1) \sim -\frac{A_0\sigma\sqrt{-2z}}{G\sqrt{\pi(1+\sigma)}} \ \text{ при } z \to -0$$

Для построения системы однородных решений более естественно было бы применить метод Винера — Хопфа прямо к задаче (1.1), (1.2) и потребовать, чтобы в точках $z = \pm\infty$ ее решение имело экспоненциальные особенности, соответствующие распределению нулей a_k и b_k. Однако такая система обладала бы существенным недостатком. При удовлетворении условиям на торцах она порождает не нормальные, а квази или вполне регулярные системы алгебраических уравнений в зависимости от расстояний между торцами и плоскостью $z = 0$.

Система (1.23), (1.31), (1.35) приводит к нормальным системам Пуанкаре — Коха при произвольном сочетании граничных условий на плоском торце $z = l$, находящемся в области контакта $z > 0$. На другом торце при $l < 0$ условия можно поставить только в сочетаниях τ_{rz}, w или σ_z, u.

Если применять метод коллокаций, то систему однородных решений можно использовать при любых симметричных условиях на торцах, причем торцы могут быть не только плоскими, но и иметь форму поверхности вращения.

2. Пусть участок боковой поверхности бесконечного цилиндра $r = 1$ обжат абсолютно жесткой цилиндрической обоймой. Радиус обоймы равен $1 - \delta$, длина ее $2l$, трение на поверхности контакта отсутствует, напряжения в цилиндре при $z \to \pm\infty$ стремятся к нулю. Учитывая симметрию напряженного состояния, запишем условия на границе соответствующего полубесконечного цилиндра

$$\tau_{rz} = \sigma_r = 0 \qquad \text{при } r = 1,\ z < 0 \tag{2.1}$$

$$\tau_{rz} = 0, \qquad u = -\delta \qquad \text{при } r = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant l \tag{2.2}$$

$$\tau_{rz} = w = 0 \qquad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1,\ z = l \tag{2.3}$$

Решение задачи (2.1) — (2.3) будем искать в виде суммы

$$u = u^*(z, r) + \sum_{k=0}^{\infty} u^{(k)}(z, r), \qquad w = w^*(z, r) + \sum_{k=0}^{\infty} w^{(k)}(z, r) \tag{2.4}$$

Здесь $u^*(z, r)$, $w^*(z, r)$ — решение неоднородной задачи (2.1), (2.2). Последняя есть частный случай задачи (1.34). Положив $A_0 = -2\delta G(1 + \sigma)\sigma^{-1}$ и принимая во внимание (1.33), получим из (1.35) (2.5)

$$u^*(z, r) = \frac{\delta}{2\pi i}\int_L \frac{[\varepsilon'(\nu) + \rho'(\nu)]\, e^{\nu z}\, d\nu}{m_4 \nu^2 J_1^2(\nu) K^-(\nu)}, \qquad w^*(z, r) = \frac{\delta}{2\pi i}\int_L \frac{[\varepsilon(\nu) - \rho(\nu)]\, e^{\nu z}\, d\nu}{m_4 \nu J_1^2(\nu) K^-(\nu)}$$

$$\sigma_r^*(z, 1) \sim -\frac{2\delta G}{1 - \sigma}\left(\frac{1 + \sigma}{2\pi z}\right)^{1/2} \quad \text{при } z \to +0$$

$$u^*(z, 1) \sim -\delta + \delta\sqrt{-2z\pi^{-1}(1 + \sigma)} \quad \text{при } z \to -0 \tag{2.6}$$

Заметим, что в работе [2] формулы (2.6) выписаны с ошибками. Найдем коэффициенты A_k и B_k. Очевидно, $A_0 = 0$. Замкнем контур в формулах (2.5) и (1.23) полуокружностями, проходящими между отрицательными нулями функции $J_1(\nu)$. По лемме Жордана и теореме о вычетах получим

$$w^*(l, r) = \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k^{-1} + 2m_1[l + T(a_k)]\}\, \delta J_0^{-1}(a_k) K^+(a_k)\, e^{-a_k l} J_0(a_k r) +$$

$$+ 8\delta\sigma m_1 [l + T(0)]$$

$$\tau_{rz}^*(l, r) = \sum_{k=1}^{\infty} 4G\delta m_1 a_k J_0^{-1}(a_k) K^+(a_k)[l + T(a_k)] e^{-a_k l} J_0(a_k r) \quad (2.7)$$

$$w^{(k)}(l, r) = -m_1[A_k(a_k l + 4\sigma - 3) + B_k a_k] e^{a_k l} J_0(a_k r) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} d_{kn}[(s_{kn} + p_{kn}) p_{nk} A_k - g_k s_{kn}] e^{-a_n l} J_0(a_n r)$$

$$\tau_{rz}^{(k)}(l, r) = 2Gm_1 a_k[(a_k l - m_2) A_k + B_k a_k] e^{a_k l} J_1(a_k r) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} 2G d_{kn} a_n \{A_k p_{nk}(s_{kn} + p_{kn} - m_4) + g_k(m_4 - s_{kn})\} e^{-a_n l} J_1(a_n r)$$

где

$$s_{kn} = p_{kn} + a_n[l + T(a_n)] + m_2, \quad p_{kn} = a_n(a_k + a_n)^{-1}, \quad a_0 = 0$$

$$d_{kn} = p_{nk} K^+(a_n) K^+(a_k) J_0(a_k)[8(1 - \sigma^2) J_0(a_n)]^{-1} \quad (2.8)$$

$$g_k = A_k[2\sigma - a_k T(a_k)] + B_k m_2^{-1}(a_k - a_k\sigma - \sigma)$$

Подставим выражения (2.4), а затем (2.7) в условия (2.3) и поменяем порядки суммирования. Приравнивая коэффициенты при функциях $J_0(a_k r)$, $J_1(a_k r)$ и вводя неизвестные $X_{k1} = A_k e^{a_k l}$, $X_{k2} = B_k e^{a_k l}$ $(k = 0, 1, \ldots)$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$X_{k1} + \sum_{n=1}^{\infty} 4e^{-l(a_k+a_n)} d_{nk}\{[(s_{nk} + p_{nk} - 1 + \sigma) p_{kn} + (1 - \sigma - s_{nk})(T(a_n) +$$

$$+ 2\sigma) a_n] X_{n1} + (1 - \sigma - s_{nk})[a_n - a_n\sigma - \sigma] m_2^{-1} X_{n2}\} =$$

$$= -2\delta e^{-a_k l} J_0^{-1}(a_k) K^+(a_k)\{[T(a_k) + l] 4m_1 + a_k^{-1}\} \quad (2.9)$$

$$X_{k2} + \sum_{n=1}^{\infty} 4e^{-l(a_k+a_n)} d_{nk}\{[[(a_k l + 3\sigma - 2)(s_{nk} + p_{nk}) - (1 - \sigma)(a_k l + 4\sigma - 3)] p_{kn} +$$

$$+ [(1 - \sigma)(a_k l + 4\sigma - 3) - (a_k l + 3\sigma - 2) s_{nk}][T(a_n) + 2\sigma] a_n] X_{n1} +$$

$$+ [(1 - \sigma)(a_k l + 4\sigma - 3) - (a_k l + 3\sigma - 2) s_{nk}][(1 - \sigma) a_n - \sigma] m_2^{-1} X_{n2}\} =$$

$$= -2\delta e^{-a_k l} K^+(a_k) J_0^{-1}(a_k)\{(a_k l - m_2) a_k^{-1} + 4m_1[T(a_k) + l](a_k l + 3\sigma - 2)\}$$

где $k = 1, 2, \ldots$ и формулу для B_0

$$B_0 = -8\delta\sigma[l + T(0)] - 8(1 - \sigma^2)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} m_2 J_0(a_k) K^+(a_k)(A_k - g_k) \quad (2.10)$$

Асимптотика [2]

$$a_k = k\pi + O(k^{-1}), \qquad b_k = k\pi + iO(\ln k) + O(k^{-1}\ln k) \quad (2.11)$$

и формулы (1.17), (1.19) (2.8), дают такие оценки при больших k и n

$$p_{kn} < 1, \; K^+(a_k) = O(k^{-1/2}), \; T(a_k) = O(1), \; s_{nk} = O(k), \; d_{nk} = O(k^{-1}) \quad (2.12)$$

Используя их, получим абсолютно сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} M_1 kn \exp\left[-\pi l(k+n)\right] \tag{2.13}$$

(M_s — постоянные), мажорирующий двойной ряд матрицы системы (2.9). Из тех же оценок следует, что модули свободных членов системы (2.9) ограничены. Таким образом, система (2.9) нормальна [5].

Покажем, что ее бесконечный определитель D отличен от нуля. Допустим $D = 0$. По теореме Кронекера — Капелли 76.7в [5] существует тогда нетривиальное решение однородной системы (2.9), порождаемой условием $\delta = 0$, а это противоречит теореме единственности ограниченного на бесконечности решения задачи теории упругости.

Так как $D \neq 0$, то, согласно теореме 76.5 [5], нормальное решение системы (2.9) существует, единственно и может быть получено по правилу Крамера.

Оценим быстроту убывания коэффициентов A_n, B_n и сходимость рядов (2.4). Систему (2.9) запишем в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{2} a_{kn}{}^{sp} X_{ns} = h_{kp}, \quad p = 1, 2; \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{2.14}$$

Элементы a_{kn}^{sp} и h_{kp} легко определить из (2.9), причем, если $k \neq n$ и $s \neq p$ одновременно

$$|a_{kn}{}^{sp}| < M_2 kn e^{-\pi l(n+k)}, \qquad |h_{kp}| < M_3 k e^{-\pi lk} \tag{2.15}$$

По правилу Крамера $X_{ns} = D_{ns} D^{-1}$, где D_{ns} — определитель, полученный при замене элементов ns-го столбца a_{kn}^{sp} свободными членами h_{kp}. Так как ряд по элементам h_{kp} абсолютно сходится, то D_{ns} — нормальный определитель, и для него в силу теоремы 74.9а [5] существует разложение по элементам любой строки. Пусть A_{nq}^{rs} — алгебраическое дополнение элемента ns-й строки a_{nq}^{rs} в определителе D_{ns}, P — мажоранта Коха для D, $M_4 = \max |h_{kp}|$ по k и p. Определитель $A_n{}^{rs}$ не нормален, но, опираясь на теоремы 73.8в, 73.9а и 71.6в [5], можно показать, что он ограничен: $|A_{nq}^{rs}| < 6M_4P$. Разложим D_{ns} по элементам ns-й строки. Учитывая, что $a_{nn}^{ss} = h_{ns}$, и используя неравенства (2.15), получим

$$|D_{ns}| = \left|\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2} a_{nq}{}^{rs} A_{nq}{}^{rs}\right| < 6M_4P\left|\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=1}^{2} a_{nq}{}^{rs}\right| < M_5 n e^{-\pi ln}$$

Итак, $|X_{ns}| < M_6 n e^{-\pi ln}$ и, значит, ряды (2.4) сходятся не медленнее, чем ряд с общим членом $k^2 e^{-\pi k(2l-z)}$.

Задачу (2.1) — (2.3) можно решить и при произвольно заданных на торце функциях τ_{rz} и w. Соответствующий пример будет разобран в следующем пункте.

3. Рассмотрим задачу для полубесконечного цилиндра $r = 1$, $-\infty < z \leqslant l$, который нагружен на торце и обжат на участке боковой поверхности $0 \leqslant z \leqslant l$ цилиндрической обоймой радиуса $1 - \delta$. Запишем граничные условия

$$\tau_{rz} = \sigma_r = 0 \quad \text{при } r = 1,\ z < 0 \tag{3.1}$$

$$\tau_{rz} = 0,\ u = -\delta \quad \text{при } r = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant l \tag{3.2}$$

$$\tau_{rz} = f_1(r),\ \sigma_z = f_2(r) \quad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1,\ z = l \tag{3.3}$$

Решение будем искать в форме (2.4) —(2.6). Пусть $f_1(r), f_2(r) \in L_2(0,1)$. Тогда справедливы разложения

$$f_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_1(a_k r), \qquad c_k = 2J_0^{-2}(a_k)\int_0^1 f_1(r) J_1(a_k r)\, r dr \tag{3.4}$$

$$f_2(r) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k J_0(a_k r), \qquad d_k = 2J_0^{-2}(a_k)\int_0^1 f_2(r) J_0(a_k r)\, r dr$$

причем коэффициенты c_k и d_k ограничены. Найдем коэффициенты A_k и B_k. Из условия равновесия $A_0 = d_0$, B_0 остается произвольным. Как и в предыдущем пункте, вычислим при $z = l$ неоднородные и однородные нормальные напряжения

$$\sigma_z^*(l, r) = -\sum_{k=1}^{\infty} 4Gm_1\delta \frac{K^+(a_k)}{J_0(a_k)} \{1 + a_k[l + T(a_k)]\} e^{-a_k l} J_0(a_k r) \tag{3.5}$$

$$\sigma_z^{(k)}(l, r) = 2Gm_1 a_k [A_k(m_4 - a_k l) + B_k m_2^{-1}(\sigma a_k + \sigma - 1)] e^{a_k l} J_0(a_k r) +$$

$$+ 2G\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n l} a_n d_{kn} \{g_k(s_{kn} - m_2) - A_n p_{nk}[s_{kn} + p_{kn} - m_2]\} J_0(a_n r) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$\sigma_z^{(0)}(l, r) = d_0\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} 4Gm_1 \frac{K^+(a_n)}{m_2 J_0(a_n)} \{1 + a_n[l + T(a_n)]\} e^{-a_n l} J_0(a_n r)\right.$$

$$\tau_{rz}^{(0)}(l, r) = -\sum_{n=1}^{\infty} 4d_0\sigma m_1 m_3 a_n \frac{K^+(a_n)}{J_0(a_n)} [l + T(a_n)] e^{-a_n l} J_1(a_n r)$$

Подставим в левые части условий (3.3) напряжения в форме (2.4), для τ_{rz}^* и $\tau_{rz}^{(k)}$ воспользуемся разложениями (2.7), для остальных функций — разложениями (3.5). В правые части (3.3) подставим ряды (3.4). Поменяв порядки суммирования и приравнивая коэффициенты при функциях $J_1(a_k r)$ и $J_0(a_k r)$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений

$$(a_k l - m_2) X_{k1} + a_k X_{k2} + \sum_{n=1}^{\infty} m_1^{-1} e^{-l(a_k + a_n)} d_{nk} [(s_{nk} + p_{nk} - m_4) p_{kn} X_{n1} +$$

$$+ (m_4 - s_{nk}) g_n^*] = G^{-1}\{2(d_0 m_3\sigma - \delta G)[l + T(a_k)] J_0^{-1}(a_k) K^+(a_k) e^{-a_k l} + c_k m_4 a_k^{-1}\}$$

$$(m_4 - a_k l) X_{k1} + m_2^{-1}(\sigma a_k + \sigma - 1) X_{k2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2m_4 e^{-l(a_k + a_n)} d_{nk} [g_n^*(s_{nk} - m_2) -$$

$$- p_{kn}(s_{nk} + p_{nk} - m_2) X_{n1}] = \frac{m_4}{a_k G}\left\{4m_1(G\delta - d_0 m_3\sigma) \times\right.$$

$$\left.\times [1 + a_k(T(a_k) + l)] \frac{K^+(a_k)}{J_0(a_k) e^{a_k l}} - d_0 + d_k\right\}$$

где

$$g_n^* = X_{n1}[2\sigma - a_n T(a_n)] + X_{n2} m_2^{-1}(a_n - \sigma a_n - \sigma)$$

Очевидно, в канонической форме (2.9) эта система имеет матрицу (2.15) и ограниченные свободные члены. Поэтому она и ее решение нормальны, и, следовательно, коэффициенты A_k и B_k убывают как $e^{-\pi k l}$. При $f_1(r) = f_2(r) = 0$ можно повторить рассуждения предыдущего пункта и получить более сильную оценку.

4. Рассмотрим контактную задачу для полубесконечного цилиндра со свободной боковой поверхностью у торца при следующих граничных условиях:

$$\tau_{rz} = \sigma_r = 0 \qquad \text{при } r = 1, \ l \leqslant z < 0 \tag{4.1}$$

$$\tau_{rz} = 0, \quad u = -\delta \qquad \text{при } r = 1, \ 0 \leqslant z < \infty \tag{4.2}$$

$$\tau_{rz} = f_1(r), \quad w = f_2(r) \ \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1, \ z = l \tag{4.3}$$

Решение запишем в виде

$$u = u^*(z, r) + \sum_{k=-1}^{-\infty} u^{(k)}(z, r), \qquad w = w^*(z, r) + \sum_{k=-1}^{-\infty} w^{(k)}(z, r) \tag{4.4}$$

Используя соотношение обобщенной ортогональности Шиффа [4]

$$\int_0^1 [\varepsilon'(b_k)\rho'(b_n) + \varepsilon'(b_n)\rho'(b_k)]\, r dr = 0 \quad \text{при } k \neq n$$

$$\int_0^1 [\varepsilon'(b_k)\rho'(\bar{b}_n) + \varepsilon'(\bar{b}_n)\rho'(b_k)]\, r dr = 0 \quad \text{при всех } k \text{ и } n$$

разложим функции $f_1(r)$ и $f_2(r)$ в ряды по однородным решениям первой основной задачи теории упругости для бесконечного цилиндра

$$f_1(r) = 2G \sum_{k=1}^{\infty} [c_k\varepsilon'(b_k) + \bar{c}_k\varepsilon'(\bar{b}_k)]$$

$$f_2(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \{c_k[\varepsilon(b_k) - \rho(b_k)] + \bar{c}_k[\varepsilon(\bar{b}_k) - \rho(\bar{b}_k)]\} \tag{4.5}$$

$$c_k = \int_0^1 \{[f_1(r) - 2Gf_2'(r)]\varepsilon'(b_k) + f_1(r)\rho'(b_k)\}\, r dr \left[4G\int_0^1 \rho'(b_k)\varepsilon'(b_k)\, r dr\right]^{-1}$$

В формулах (2.5), (1.30) и (1.31) замкнем контур L справа полуокружностями, проходящими между нулями функции $R(\nu)$. По лемме Жордана и теореме о вычетах получим

$$\tau_{rz}^*(l, r) = \sum_{k=1}^{\infty} 2G[t(b_k)\varepsilon'(b_k) + t(\bar{b}_k)\varepsilon'(\bar{b}_k)]$$

$$\begin{aligned}\tau_{rz}^{(k)}(l, r) = (A_k - iB_k)\, G\Big\{b_k \exp(b_k l)\varepsilon'(b_k) + \sum_{n=1}^{\infty} [T(b_k, b_n)\exp(b_n l)\varepsilon'(b_n) + \\ + T(b_k, \bar{b}_n)\exp(\bar{b}_n l)\varepsilon'(\bar{b}_n)]\Big\} + (A_k + iB_k)\, G\Big\{\bar{b}_k \exp(\bar{b}_k l)\varepsilon'(\bar{b}_k) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} [T(\bar{b}_k, b_n)\exp(b_n l)\varepsilon'(b_n) + T(\bar{b}_k, \bar{b}_n)\exp(\bar{b}_n l)\varepsilon'(\bar{b}_n)]\Big\}\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$t(b_k) = \frac{\delta(1+\sigma)\exp(b_k l)}{(1-\sigma)b_k R^*(b_k)K^+(b_k)}, \qquad T(b_k, b_n) = \frac{2(1+\sigma)K^-(b_k)J_1^2(b_k)}{R^*(b_n)K^+(b_n)(b_n - b_k)}$$

$$R^*(b_k) = 2\{b_k J_0^2(b_k) - m_4 J_1(b_k)[J_0(b_k) - b_k^{-1}J_1(b_k)]\}$$

Подставим ряды (4.4) и (4.5), а затем (4.6) в первое условие (4.3). Учитывая формулы (1.29), поменяем порядки суммирования и приравняем коэффициенты при функциях $\varepsilon'(b_k)$ и $\varepsilon'(\bar{b}_k)$. Вводя неизвестные $Y_{k1} - iY_{k2} = (A_{-k} - iB_{-k}) \exp(-b_k l)$, получим нормальную систему алгебраических уравнений

$$Y_{k1} - \sum_{n=1}^{\infty} \{Y_{n1} \operatorname{Re}[\varphi_n(b_k) + \varphi_n(\bar{b}_k)] + Y_{n2} \operatorname{Im}[\varphi_n(b_k) + \varphi_n(\bar{b}_k)]\} = \operatorname{Re}\psi_k$$

$$Y_{k2} - \sum_{n=1}^{\infty} \{Y_{n1} \operatorname{Im}[\varphi_n(\bar{b}_k) - \varphi_n(b_k)] + Y_{n2} \operatorname{Re}[\varphi_n(b_k) - \varphi_n(\bar{b}_k)]\} = -\operatorname{Im}\psi_k$$

где

$$\varphi_n(b_k) = b_k^{-1} \exp[l(b_k + b_n)]\, T(-b_n, b_k), \quad \psi_k = 2b_k^{-1}[t(b_k) - c_k]$$

Второе условие (4.3) удовлетворяется автоматически. В общем случае $A_k, B_k \sim O(e^{-\pi kl})$, если $f_1(r) = f_2(r) = 0$, что соответствует обжатию бесконечного цилиндра двумя полубесконечными обоймами, $A_k, B_k \sim O(ke^{-2\pi kl})$.

Поступила 10 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Л у р ь е А. И. Пространственные задачи теории упругости. М. Гостехиздат, 1955.
2. К о г а н Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
3. Н о б л Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
4. Н у л л е р Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
5. К а г а н В. Ф. Основания теории определителей. Одесса, 1922.