Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С РАЗНОСТНЫМИ И СУММАЦИОННЫМИ ЯДРАМИ

Г. Я. Попов

(Одесса)

Предлагается приближенный способ решения линейных интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности аргументов (разностные ядра), от суммы аргументов (суммационные ядра), а также с ядрами представляющими суперпозицию из названных (разностно-суммационные ядра). Рассмотрен случай одного и двух конечных интервалов, а также полубесконечного и бесконечного интервалов. Предлагаемый приближенный способ основан на сведении названных интегральных уравнений к бесконечным системам алгебраических уравнений. В заключение указываются ряд задач теории упругости, к которым может быть применен предлагаемый способ решения интегральных уравнений.

§ 1. Конечный интервал. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-1}^{1} k(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1.1}$$

в предположении, что

$$k(x) = k(-x), \qquad \int_0^2 |k(x)|^2\,dx = K^2 < \infty \tag{1.2}$$

и что λ не собственное число.

Промежуток (—1,1) выбран для сокращения записи. Общность при этом не ущемляется, так как любой конечный промежуток можно привести к указанному заменой, не меняющей свойств (1.2) ядра.

Сущность излагаемого способа применительно к случаю конечного интервала заключается в представлении ядерной функции $k(x)$ в виде ряда по ортонормированной системе вида

$$C_0^+(x) = 2^{-1/2}, \qquad C_m^+(x) = \cos(m\pi x/2) \quad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.3}$$

$$k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_m^+(x) \quad 0 \leqslant x \leqslant 2, \qquad a_m = \int_0^2 k(x)\,C_m^+(x)\,dx$$

с последующим рассмотрением четного $\varphi_+(x)$ и нечетного $\varphi_-(x)$ решений уравнения (1.1).

Представляя правую часть в виде суммы четной и нечетной функций, т. е. $f = f_+ + f_-$, из (1.1) устанавливаем

$$\varphi_\pm(x) + \lambda \int_0^1 K_\pm(x, y)\,\varphi_\pm(y)\,dy = f_\pm(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{1.4}$$

$$K_\pm(x, y) = k(x-y) \pm k(x+y) \tag{1.5}$$

Воспользовавшись (1.3), для этих ядер получаем такие билинейные разложения

$$K_{\pm}(x, y) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} a_m C_m^{\pm}(x) C_m^{\pm}(y), \qquad C_m^{-}(x) = \sin \frac{m\pi n}{2} \tag{1.6}$$

Подстановка (1.6) в уравнения (1.4) приводит к следующим формулам для их решения:

$$\varphi_{\pm}(x) = f_{\pm}(x) - 2\lambda \sum_{m=0}^{\infty} a_m C^{\pm}{}_m(x)\, \varphi^{\pm}{}_m \quad , \quad \varphi^{\pm}{}_m = \int_0^1 C^{\pm}{}_m(x)\, \varphi_{\pm}(x)\, dx \tag{1.7}$$

При этом коэффициенты $\varphi_m^{\pm}$ следует находить из бесконечных систем

$$\varphi_m^{\pm} + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} a_m b_{nm}^{\pm} \varphi^{\pm}{}_m = f^{\pm}{}_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad f_n{}^{\pm} = \int_0^1 C^{\pm}{}_m(x) f(x)\, dx \tag{1.8}$$

$$b_{nm}^{\pm} = 2 \int_0^1 C^{\pm}{}_m(x)\, C^{\pm}{}_n(x)\, dx = b_{n-m} \pm b_{n+m}, \qquad b_k = \frac{2 \sin k\pi/2}{\pi k} \tag{1.9}$$

Перейдем к исследованию полученных бесконечных систем. Применяя способ доказательства полной регулярности, изложенный в § 1 работы [1], можно установить для бесконечных систем (1.8) такое условие полной регулярности

$$\sqrt{2}\,\lambda K \leqslant 1 - \varepsilon \qquad \left(K^2 = \int_0^2 |k(x)|^2 dx = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|^2\right) \tag{1.10}$$

где ε — фиксированное малое число

Теперь покажем, что системы (1.8) для любого λ квазивполне регулярны, если имеет место такая асимптотика

$$a_m = O(1 / m), \qquad m \to \infty \tag{1.11}$$

Необходимо показать, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 0, \qquad S_n = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m b_{nm}^{\pm}| \tag{1.12}$$

В соответствии с формулой (1.9) имеем

$$S_n \leqslant S_n{}^{+} + S_n{}^{-}, \qquad S_n{}^{\pm} = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \, |b_{n\pm m}| \tag{1.13}$$

Оценим сначала $S_n{}^{-}$. Для этого делаем замену $m - n = k$ и представляем $S_n{}^{-}$ в виде

$$S_n{}^{-} = S_n{}^{(1)} + S_n{}^{(2)}, \qquad S_n{}^{(1)} = \sum_{k=}^{\infty} |a_{n+k}| \, |b_k|, \qquad S_n{}^{(2)} = \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \, |b_{n-m}| \tag{1.14}$$

Выберем $n > N_0$, где N_0 настолько большое фиксированное число, что в соответствии с (1.11)

$$|a_m| \leqslant Am^{-1} \quad (m > N_0,\ A > 0)$$

Тогда

$$S_n^{(2)} \leqslant \sum_{m=0}^{N_0-1} |a_m||b_{n-m}| - \frac{2A}{\pi}\left(\sum_{m=1}^{N_0-1} \frac{1}{m(n-m)} - S_n^{(3)}\right), \qquad S_n^{(3)} = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m(n-m)}$$

Наконец, воспользовавшись тождеством и асимптотическим соотношением [2]

$$\frac{1}{m(n-m)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n-m}\right), \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = O(\ln n), \quad n \to \infty$$

заключаем, что $S_n^{(3)} = O(n^{-1} \ln n)$ и, следовательно

$$S_n^{(2)} = O(n^{-1} \ln n), \quad n \to \infty \tag{1.15}$$

Для оценки суммы $S_n^{(1)}$ выберем опять $n > N_0$; тогда

$$S_n^{(1)} \leqslant |a_n| + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(n+k)}$$

Если теперь учесть известные [2] соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+p)(k+q)} = \frac{\psi(q+1) - \psi(p+1)}{q-p}, \qquad \psi(z) = O(\ln z), \quad z \to \infty \tag{1.16}$$

для ψ-функции Эйлера, то обнаружим, что

$$S_n^{(1)} = O(n^{-1} \ln n), \quad n \to \infty$$

Аналогичные рассуждения показывают, что подобная асимптотика имеет место и для S_n^{+} и, следовательно, в силу (1.15), (1.14) и (1.13) справедливо (1.12), т. е. системы (1.8) квазивполне регулярны.

Пусть теперь вместо (1.11) будет более общая асимптотика

$$a_m = O(m^{-\alpha}), \qquad m \to \infty, \quad \alpha > 0 \tag{1.17}$$

Чтобы получить квазивполне регулярную бесконечную систему, следует ввести вместо $\varphi_n^{\pm}$ новые неизвестные $\psi_n^{\pm} = (1+n)^{1-\alpha}\varphi_n^{\pm}$. Тогда для последних из (1.8) получим систему

$$\psi_n^{\pm} + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} a^*_m (1+n)^{1-\alpha} b_{nm}^{\pm} \psi^{\pm}_m = (1+n)^{1-\alpha} f^{\pm}_n \tag{1.18}$$

Для коэффициентов $\overset{*}{a}_m = (1+m)^{\alpha-1} a_m$ будет иметь место в силу (1.17) асимптотика (1.11) и стало быть, если $(1+n)^{1-\alpha} f_n^{\pm}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ будут ограничены, то бесконечная система (1.18) будет квазивполне регулярна. При этом асимптотика для S_n при $\alpha < 1$ ухудшится и принимает вид $S_n = O(n^{-\alpha} \ln n)$.

Таким образом, для решения бесконечных систем (1.8) или (1.18) можно принимать метод урезывания, что, очевидно, эквивалентно следующей аппроксимации ядерной функции:

$$k(x) \approx \sum_{m=0}^{N} a_m C_m^+(x) \tag{1.19}$$

При практическом использовании изложенного способа решения уравнения (1.1) важным моментом является вычисление коэффициентов a_m. Формула, содержащаяся в (1.3), может оказаться неудобной. Кроме того, функция $k(x)$ может быть задана в виде таблицы значений. Эти осложнения можно преодолеть, привлекая хорошо разработанные приемы тригонометрической интерполяции [3]. В этом случае коэффициенты аппроксимации (1.19) будут выражаться по известной формуле [3] через дискретные значения функции $k(x)$.

Часто ядерная функция задается в виде

$$k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K(t) \cos xt\, dt \tag{1.20}$$

При этом если плотность $K(t)$ с ростом t стремится к нулю сильнее, чем это фиксируется асимптотикой

$$K(t) = \frac{\gamma}{t} + O(t^{-2}), \qquad t \to \infty \tag{1.21}$$

то функция (1.20) будет непрерывной и для подсчета коэффициентов a_m в (1.19) можно воспользоваться указанной формулой из теории тригонометрической интерполяции, предварительно вычислив нужные значения функции $k(x)$, используя, например, метод Файлона [4].

В случае же, если имеет место асимптотика (1.21), следует выделить особенность у функции $k(x)$, т. е. представить ее в виде

$$\pi k(x) = \ln \left| cth \frac{x\pi}{4} \right| + \int_0^\infty \left[K(t) - \frac{tht}{t} \right] \cos xt dt \tag{1.22}$$

Здесь использован известный интеграл [2]

$$\int_0^\infty \frac{tht}{t} \cos xt dt = \ln \left| cth \frac{x\pi}{4} \right| \tag{1.23}$$

Непрерывную часть функции (1.22) аппроксимируем в виде (1.19) с использованием формул тригонометрической интерполяции [3] для подсчета коэффициентов a_m.

Для коэффициентов Фурье a_m функции (1.23) в результате использования формулы из (1.3) будем иметь разложение

$$a_m = \frac{\operatorname{th} 0.5m\pi}{m} - (-1)^m \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\pi(2k+1)}}{m^2 + (2k+1)^2} \tag{1.24}$$

В случае $m = 0$ результат следует домножить на $2^{-1/2}$. Фигурирующий здесь ряд можно выразить через известные спецфункции. Однако в виду его весьма быстрой сходимости в этом нет нужды. При получении формулы (1.24) использовалось представление функции (1.23) в виде ряда, полученного из ее интегрального представления путем замены $\operatorname{th} t$ его разложением на простые дроби [2].

§ 2. Об оценке погрешности. Приближенность излагаемого способа решения интегрального уравнения (1.1) происходит за счет аппроксимации (1.19), которая, согласно (1.5), эквивалентна следующей:

$$K_{\pm}(x, y) \approx 2 \sum_{m=0}^{N} a_m C_m^{\pm}(x) C_m^{\pm}(y) = K^*_{\pm}(x, y) \tag{2.1}$$

Иными словами, точные интегральные уравнения (1.4) заменяются приближенными. В операторной форме и те и другие можно записать (здесь и всюду в § 2 знаки плюс, минус у символов опускаем) так:

$$\varphi + \lambda K\varphi = f, \qquad \varphi^* + \lambda K^*\varphi^* = f \tag{2.2}$$

Считая, что они заданы в некотором банаховом пространстве, получаем оценку погрешности [5]

$$\|\varphi - \varphi^*\| \leqslant q(1-q)^{-1}\|\varphi^*\| \qquad (\lambda\|R_\lambda^*\|\delta \leqslant q < 1), \qquad \delta = \|K - K^*\| \tag{2.3}$$

Здесь оператор R_λ^* обращает приближенное интегральное уравнение, т. е. $\varphi^* = R_\lambda^* f$. Он задается формулой

$$\varphi^*(x) = f(x) - 2\lambda \sum_{m=0}^{N} a_m \varphi_m C_m(x) \tag{2.4}$$

причем коэффициенты φ_m находятся из следующей системы уравнений:

$$\varphi_n + \lambda \sum_{m=0}^{N} a_m b_{nm} \varphi_m = f_n \tag{2.5}$$

полученной урезанием систем (1.8).

Оценим нормы операторов, вошедших в формулу (2.3). Пусть уравнения (2.2) заданы в L_2. Тогда

$$\|K - K^*\| \leqslant 4 \int_0^2\int_0^2 \Big(\sum_{m=N+1}^{\infty} a_m C_m(x) C_m(y) \Big)^2 dx dy \leqslant 4 \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m^2 \tag{2.6}$$

Следовательно, для вычисления δ можно пользоваться формулой

$$\delta^2/4 = \sum_{m=N+1}^{\infty} a_m^2 = K^2 - \sum_{m=0}^{N} a_m^2 \tag{2.7}$$

При получении оценки (2.6) интервал интегрирования был продлен, что могло усилить неравенство, до двух для того, чтобы воспользоваться ортонормированностью $C_m(x)$. Поступая и далее аналогично и привлекая там, где нужно неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\|R_\lambda^* f\| = \|\varphi^*\| \leqslant \|f\| + 2|\lambda| \Big(\sum_{m=0}^{N} a_m^2 \varphi_m^2\Big)^{1/2}$$

Вычисляя далее φ_m по правилу Крамера и оценивая определитель, содержащийся в числителе, по Адамару с учетом очевидных оценок

$$\sum_{k=0}^{N} f_k^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 = \|f\|^2, \qquad \sum_{k=0}^{N} b_{jk}^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk}^2 = \int_0^1 \Big|2\cos\frac{j\pi x}{2}\Big| dx = 2 \qquad (2.8)$$

получим

$$\|R_\lambda^*\| \leqslant 1 + \frac{2|\lambda|}{|\Delta|}\Big(\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k^2}{A_k} \prod_{k=0}^{N} A_k\Big)^{1/2} \qquad (A_k = 1 + 2\lambda a_k + 2\lambda^2 a_k^2) \qquad (2.9)$$

Здесь Δ — определитель системы (2.5).

Если ядро уравнения (1.1) функция непрерывная, то интегральное уравнение (2.2) можно рассматривать в пространстве непрерывных функций. В этом случае можно будет оценить величину

$$\max \Big| k(x) - \sum_{m=0}^{N} a_m C_m(x) \Big| \leqslant \delta_0 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 2)$$

и тем самым норму оператора

$$\|K - K^*\| = \max_{0 \leqslant x,\, y \leqslant 1} \Big| k(x+y) - \sum_{m=0}^{N} a_m C_m(x+y) + k(x-y) - \sum_{m=0}^{N} a_m C_m(x-y) \Big| \leqslant 2\delta_0$$

Таким образом, в рассматриваемом случае в качестве δ в формуле (2.3) можно взять $2\delta_0$. Для нормы оператора R_λ^* в этом случае вместо (2.9) имеем оценку

$$\|R_\lambda^*\| \leqslant 1 + \frac{2|\lambda|}{|\Delta|} \sum_{k=0}^{N} \frac{|a_k|}{A_k^{1/2}} \Big(\prod_{k=0}^{N} A_k\Big)^{1/2} \qquad (2.10)$$

полученную аналогичным путем. При этом дополнительно к (2.8) следует еще принять во внимание, что

$$\int_0^1 |f(x)^2 dx \leqslant \int_0^1 |\max f(x)|^2 dx = \|f\|^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

Наконец, нередки случаи, когда $k(x)$ не является непрерывной функцией, но обладает свойством

$$\max \Big| \int_0^1 K(x, y)\, dy \Big| = A < \infty \qquad (0 \leqslant x \leqslant 1) \qquad (2.11)$$

Тогда по-прежнему уравнения (2.2) можно [5] рассматривать в пространстве непрерывных функций. В этом случае

$$\|K - K^*\| \leqslant \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} \left| \int_0^1 K(x, y)\, dy - 2 \sum_{m=0}^{N} a_m C_m^{\cdot}(x) \int_0^1 C_m^{\cdot}(y)\, dy \right| = \delta \tag{2.12}$$

а для нормы оператора $\| R_\lambda^* \|$ справедлива оценка (2.10).

Выше предполагалось, что λ не является собственным числом первого уравнения (2.2) и определитель Δ системы (2.5) отличен от нуля. Последнего в принципе всегда можно добиться уменьшением нормы оператора $\|K - K^*\|$ за счет увеличения N. В связи с этим будет полезно отметить, что в случае, когда $\lambda > 0$ и $a_m \geqslant 0$ $(m = 0, 1, 2 \ldots)$, $\Delta \neq 0$ при любом N. Действительно, если $\Delta = 0$, то это эквивалентно тому, что уравнение

$$\varphi^*(x) + \lambda \int_0^1 K^*(x, y)\, \varphi^*(y)\, dy = 0 \tag{2.13}$$

имеет не тривиальное решение $\varphi^*(x) \neq 0$. Но это невозможно, так как умножая (2.13) скалярно на $\varphi^*(x)$, получим

$$\|\varphi^*\|^2 + \lambda(\varphi^*, K^*\varphi^*) = 0$$

причем $(\varphi^*, K^*\varphi^*) > 0$ в силу (2.1) и $a_m > 0$. Таким образом, $\Delta \neq 0$ для любого N в том числе и $N = \infty$. Последнее же означает, что при $a_m \geqslant 0$ интегральные уравнения (1.4) могут иметь только отрицательные собственные числа.

§ 3. Конечный интервал. Некоторые обобщения. Все изложенное выше целиком переносится на интегральные уравнения вида (3.1)

$$\varphi(x) + \lambda \int_{-1}^{1} [k_1(x - y) + k_2(x + y)]\, \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad (k_j(x) = k_j(-x),\ j = 1{,}2)$$

Изложенный способ приближенного решения уравнений (1.1) применим и к уравнениям вида

$$\varphi(x) + \lambda\rho(x) \int_{-1}^{1} [k_1(x - y) + k_2(x + y)]\, \sigma(y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \tag{3.2}$$

$$(k_j(x) = k_j(-x);\ j = 1{,}2;\ \rho(x) = \rho(-x),\ \sigma(x) = \sigma(-x))$$

Однако при этом формула (1.9) для подсчета коэффициентов соответствующей бесконечной системы усложняется.

Как будет проиллюстрировано ниже, при решении некоторых контактных задач приходится сталкиваться с ситуацией, когда разложение (1.3) функции $k(x)$ известно на интервале $(-2{,}2)$, в то время как уравнение (1.1) задано на двух интервалах $(-\alpha, -\beta)$ и (β, α)

$$\varphi(x) + \lambda \left(\int_{-\alpha}^{-\beta} + \int_{\beta}^{\alpha} \right) k(x - y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad (0 \leqslant \beta < \alpha \leqslant 1) \tag{3.3}$$

В этом случае для четного и нечетного вариантов задачи будем иметь такие уравнения

$$\varphi_{\pm}(x) + \lambda \int_{\beta}^{\alpha} K_{\pm}(x, y)\, \psi_{\pm}(y)\, dy = f_{\pm}(x) \tag{3.4}$$

где ядра определяются прежними формулами (1.5) и (1.6), а решения — формулами (1.7) и бесконечными системами (1.8) или (1.18), но при этом

$$f_n^{\pm} = \int_{\beta}^{\alpha} C_n^{\pm}(x) f_{\pm}(x)\, dx, \qquad b_n = \frac{4}{\pi n} \sin \frac{n\pi(\alpha - \beta)}{4} \cos \frac{n\pi(\alpha + \beta)}{4}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.5}$$

Как и выше, можно показать, что соответствующие бесконечные системы будут вполне регулярны, если $\lambda\,(\alpha + \beta)^{1/2} K \leqslant 1 - \varepsilon$. Аналогично доказывается их квазивполне регулярность для любого λ.

Все сказанное относительно уравнения (3.3) целиком переносится на аналогичное уравнение с разностно-суммационным ядром.

Выше всюду предполагалось четность ядерной функции. От этого ограничения можно избавиться, если разлагать ядерную функцию в ряд вида

$$k(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\pi x/2}, \qquad a_m = \frac{1}{2} \int_{-2}^{2} k(x)\, e^{im\pi x/2} \tag{3.6}$$

Однако из-за того, что приходится оперировать с комплексными числами, вычислительный алгоритм несколько усложняется.

Более существенным ограничиванием является требование, чтобы интегральное уравнение было уравнением второго рода. Изложенный способ в чистом виде, очевидно, на уравнения первого рода не переносится. Правда, некоторая его модификация уже использовалась в работе [6] для решения одного интегрального уравнения первого рода с разностным ядром. Однако, по-видимому, она оказалась мало эффективной. Нам представляется, что в случае интегральных уравнений первого рода целесообразно использовать методы, основанные на выделении особенности в ядре, в частности метод ортогональных многочленов [1].

§ 4. Полубесконечный и бесконечный интервал. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) + \lambda \int_{0}^{\infty} k(x - y)\, \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad (0 \leqslant x < \infty) \tag{4.1}$$

Как известно [7], важную роль при решении интегральных уравнений (4.1) играет преобразоание Фурье $K(t)$ ядерной функции $k(x)$, через которое последняя выражается в виде

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{-ixt} dt \tag{4.2}$$

Сведем уравнение (4.1) к бесконечной системе. С этой целью будем строить решение в виде ряда

$$\varphi(x) = 2e^{-x} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m L_m(2x) \tag{4.3}$$

по многочленам Лагерра. Подставим (4.3) в (4.1), после чего обе части равенства проинтегрируем на интервале $(0, \infty)$ с весом $e^{-x}L_n(2x)$. В результате вместо (4.1) будем иметь

$$\varphi_n + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} a_{n-m}\varphi_m = f_n \quad \left(f_n = \int_0^{\infty} e^{-x} f(x) L_n(2x)\,dx\right) \tag{4.4}$$

При этом оказывается, что (4.5)

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{k(x-y)}{e^{x+y}} L_n(2x) L_m(2y)\,dxdy = \frac{a_{n-m}}{2}, \quad a_k = \frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(t)}{1+t^2}\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^k dt$$

Последняя формула получена в результате использования представления (4.2) и формулы 7.414(6) из [2].

Таким образом, интегральное уравнение (4.1) привелось к его дискретному [7] аналогу (4.4), получить точное решение для которого иногда бывает проще, чем для исходного. Однако основным является то обстоятельство, что бесконечная система (4.4) более удобна для приближенного решения. Тем более, что формулу (4.5) можно привести к более удобному для вычислений виду. С этой целью рассмотрим сначала случай, когда $k(x) = k(-x)$. Тогда вместо (4.2) будем иметь

$$K(t) = 2\int_0^{\infty} k(x)\cos xt\,dx, \qquad k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} K(t)\cos xt\,dt \tag{4.6}$$

т. е. $K(t)$ будет вещественной четной функцией, а это позволяет свести интегрирование в (4.5) к полубесконечному интервалу

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{K(t)\left[(1+it)^{2k} + (1-it)^{2k}\right]dt}{(1+t^2)^{k+1}} = a_{-k} \tag{4.7}$$

Последующая замена $t = (\tau^2 - 1)^{1/2}$ и использование формулы 8.440 из [2] для многочленов Чебышева первого рода $T_n(z)$ приводит к результату

$$\frac{\pi a_k}{(-1)^k} = \int_{-1}^{1} K\left(\sqrt{\tau^{-2} - 1}\right)\frac{T_{2k}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \int_0^{\pi} K(\operatorname{tg}\theta)\cos 2k\theta\,d\theta \tag{4.8}$$

Пусть теперь ядро кососимметрично, т. е. $k(x) = k(-x)$. Тогда (4.9)

$$K(t) = iK^*(t), \qquad K^*(t) = 2\int_0^{\infty} k(x)\sin xt\,dx, \qquad k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} K^*(t)\sin xt\,dt$$

т. е. $K^*(t)$ будет вещественной нечетной функцией и вместо (4.8) будем иметь

$$\frac{\pi}{2}\frac{a^k}{(-1)^k} = \int_0^1 K^*\left(\sqrt{\tau^{-2}-1}\right)U_{2k-1}(\tau)\,d\tau = \int_0^{\pi/2} K^*(\operatorname{tg}\theta)\sin 2k\theta\,d\theta$$
$$(a_0 = 0,\ a_k = -a_{-k}) \tag{4.10}$$

Здесь $U_n(z)$ — полином Чебышева второго рода.

В общем случае функцию $k(x)$ уравнения (4.1) надлежит разбить на четную и нечетную составляющие и для подсчета коэффициентов бесконечной системы (4.4) для четной составляющей пользоваться формулами (4.8), а для нечетной — формулами (4.10).

Таким же путем интегральное уравнение

$$\varphi(x)+\lambda\int_0^\infty[k(x-y)+k_1(x+y)]\,\varphi(y)\,dy=f(x) \tag{4.11}$$

приводится к бесконечной системе

$$\varphi_n+\lambda\sum_{m=0}^\infty(a_{n-m}+a_{n+m}^{(1)})\,\varphi_m=f_n \tag{4.12}$$

При этом для вычисления коэффициентов a_k, отвечающих разностному ядру $k(x-y)$, по-прежнему справедливы формулы (4.5) или (4.8), (4.10), а для $a_k^{(1)}$, отвечающих суммационному ядру $k_1(x+y)$, аналогичным путем можно получить следующие формулы:

$$a_k^{(1)}=\frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{K_1(t)(1-it)^k}{(1+it)^{k+2}}\,dt,\qquad k=0,1,2,\ldots$$

$$\frac{\pi a_k^{(1)}}{(-1)^k}=\int_{-1}^1 K_1\left(\sqrt{\tau^{-2}-1}\right)\frac{T_{2k+2}(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}=\int_0^\pi K_1(\operatorname{tg}\theta)\cos(2k+2)\,\theta d\theta \tag{4.13}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{a_k^{(1)}}{(-1)^k}=\int_0^1 K_1^*\left(\sqrt{\tau^{-2}-1}\right)U_{2k+1}(\tau)\,d\tau=\int_0^{\pi/2}K_1^*(\operatorname{tg}\theta)\sin(2k+2)\,\theta d\theta$$

Вторая формула в (4.13) справедлива для четной ядерной функции $k_1(x)$, причем $K_1(t)$ ее косинус-преобразование, а третья — для нечетной функции $k_1(x)$, причем $K_1^*(t)$ ее синус-преобразование.

К частному случаю интегрального уравнения (4.11) приводится уравнение, заданное на бесконечном интервале

$$\varphi(x)+\lambda\int_{-\infty}^\infty[k(x-y)+k_1(x+y)]\,\varphi(y)\,dy=f(x)\qquad\begin{pmatrix}k(x)=k(-x)\\ k_1(x)=k_1(-x)\end{pmatrix} \tag{4.14}$$

если его правую часть и решение разбить на четные и нечетные составляющие, подобно тому как это делалось в случае уравнения (1.1).

В задачах теории упругости иногда правые части интегральных уравнений заданы в виде своих косинус- или синус-преобразований, т. е.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F^+(t)\cos xt\,dt,\qquad f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty F^-(t)\sin xt\,dt \tag{4.15}$$

В таком случае для вычисления коэффициентов f_k, определенных формулой из (4.4), следует содержащиеся в (4.15) тригонометрические функции заменить соответствующими комбинациями экспоненциальных функций. Тогда, используя те же приемы, что и при вычислении коэффициентов a_k получим (4.16)

$$\frac{2\pi f_k}{(-1)^k} = \int_{-1}^{1} F^+\left(\sqrt{\tau^{-2}-1}\right)\frac{T_{2n+1}(\tau)\,d\tau}{\tau\sqrt{1-\tau^2}} = \int_0^{\pi} F^+(\operatorname{tg}\theta)\frac{\cos(2n+1)\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

$$\frac{\pi f_k}{(-1)^k} = \int_0^1 F^-\left(\sqrt{\tau^{-2}-1}\right)\frac{U_{2k}(\tau)\,d\tau}{\tau} = \int_0^{\pi/2} F^-(\operatorname{tg}\theta)\,\frac{\sin(2n+1)\theta}{\cos\theta}\,d\theta$$

Здесь первая формула соответствует первому интегральному представлению (3.15), а вторая — второму.

Выясним теперь условия регулярности полученных бесконечных систем (4.4) и (4.12). При этом будем считать выполненными условия

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| = A < \infty, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{(1)}| = A_1 < \infty \tag{4.17}$$

Тогда нетрудно заменой $m - n = k$, $m + n = l$ оценить соответствующие суммы и получить следующие условия полной регулярности:

$$\lambda A \leqslant 1 - \varepsilon, \quad \lambda(A + A_1) \leqslant 1 - \varepsilon \tag{4.18}$$

для бесконечных систем (4.4) и (4.12) соответственно.

Кроме того, так же легко показывается, что бесконечная система, отвечающая интегральному уравнению (4.11) при $k(x) \equiv 0$ (суммационное ядро), будет квазивполне регулярна для любого λ.

Для приближенного решения полученных бесконечных систем (4.4) и (4.12), а стало быть и уравнений (4.1), (4.11), можно воспользоваться методом урезывания. Указанные здесь достаточные условия (4.18) для его применения могут оказаться обременительными. В этом случае следует обратиться к работе [8], где указаны необходимые и достаточные условия применимости метода урезывания (редукции) к системам вида (4.4).

При практическом использовании предлагаемого здесь приближенного способа решения уравнений (4.1) и (4.11) существенную роль, очевидно, будет играть вычисление коэффициентов бесконечных систем. Не всегда квадратуры, например, в формулах (4.4), (4.5) будут выражаться через достаточно простые функции. В таких случаях следует либо воспользоваться первыми равенствами в формулах (4.8), (4.10), (4.13), (4.16), заменить там полиномы их степенными представлениями, а соответствующие моменты подсчитать численно, либо воспользоваться вторыми равенствами в тех же формулах и применить, как и в предыдущих параграфах, приемы тригонометрической интерполяции [3].

§ 5. Обобщение. Об уравнениях первого рода. Изложенный в § 4 способ легко переносится на системы интегральных уравнений типа (4.1) или (4.11). При этом указанные там формулы для подсчета коэффициентов бесконечных систем сохраняют силу и в этом случае.

Рассмотрим теперь уравнения более общего типа, которые применительно к суммационному ядру запишем в виде

$$\varphi(x) + \lambda\int_0^{\infty} \rho(x)\,k(x+y)\,\sigma(y)\,\overline{\varphi(y)}\,dy = f(x) \tag{5.1}$$

Функции здесь могут быть комплекснозначными. Если решение строить по формуле (4.4.), но с комплексными коэффициентами φ_n, то приходим к следующей бесконечной системе:

$$\varphi_n + \lambda \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm}\overline{\varphi_m} = f_n, \qquad \frac{d_{nm}}{2} = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \frac{k(x+y)}{e^{x+y}} \frac{\rho(x)}{\sigma^{-1}(y)} L_n(2x) L_m(2y)\, dxdy \tag{5.2}$$

Для коэффициентов f_n справедлива прежняя формула, содержащаяся в (4.4). Как будет показано ниже, формулу для d_{nm} в конкретных случаях удается существенно упростить.

Все, что изложено в § 4, формально можно перенести и на уравнения первого рода. При этом соответствующие бесконечные системы не будут содержать явно выделенного коэффициента φ_n и будет отсутствовать λ. Для подсчета коэффициентов бесконечных систем будут справедливы прежние формулы. Однако недостатком решения в форме (4.3) будет то, что не выделяется особенность при $x = 0$. Во многих же задачах теории упругости и математической физики решения уравнений

$$\int_0^{\infty} k(x-y)\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{5.3}$$

при $x = 0$ неограничены.

Ниже указывается способ, как привести уравнение (5.3) к бесконечной системе (4.4) и в то же время выделить особенность в решении при $x = 0$. Будем считать, что ядерная функция четная, т. е. имеет место представление (4.7), и при этом

$$K(t) = \frac{\gamma}{t^{1-2\mu}}[1 + O(t^{-1})], \quad t \to \infty \quad (-{}^1/_2 < \mu < {}^1/_2) \tag{5.4}$$

Воспользовавшись интегралом [2] для функции Макдональда

$$\frac{K_\mu(|x|)}{|x|^\mu} = \frac{\Gamma({}^1/_2 - \mu)}{2^\mu \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos xt dt}{(1+t^2)^{{}^1/_2 - \mu}} \tag{5.5}$$

представим ядро уравнения (5.3) в виде

$$k(x) = \frac{2^\mu \gamma K_\mu(|x|)}{\sqrt{\pi}\Gamma({}^1/_2 - \mu)|x|^\lambda} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[K(t) - \frac{\gamma}{(1+t^2)^{{}^1/_2-\mu}}\right]\cos xt dt \tag{5.6}$$

Интегральная добавка в силу асимптотики (5.4) будет непрерывной функцией. Если теперь принять во внимание спектральное соотношение [9,1].

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma({}^1/_2 - \mu)} \int_0^{\infty} \frac{K_\mu(|x-y|)e^{-y}}{|x-y|^\mu y^{{}^1/_2-\mu}} L_m^{\mu-{}^1/_2}(2y)\,dy = \sigma_m e^{-x} L_m^{\mu-{}^1/_2}(2x) \tag{5.7}$$

то в соответствии с методом ортогональных многочленов [1] решение уравнения (5.3) следует строить в виде ряда

$$\varphi(x) = 2\frac{e^{-x}}{x^{1/2-\mu}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varphi_m}{\sigma_m} L_m^{\mu-1/2}(2x) \qquad \left(\sigma_m = \frac{\Gamma(m+\mu+1/2)}{m!}\right) \tag{5.8}$$

При этом для коэффициентов φ_m получаем бесконечную систему (4.4), в которой следует положить

$$\lambda = \frac{1}{\gamma}, \qquad f_n = \frac{1}{\gamma\sigma_n}\int_0^{\infty} \frac{e^{x}}{x^{1/2-\mu}} f(x) L_n^{\mu-1/2}(2x)\,dx \tag{5.9}$$

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[K(t) - \frac{1}{(1+t^2)^{1/2-\mu}}\right]\left(\frac{1-it}{1+it}\right)^k \frac{dt}{(1+t^2)^{\mu+1/2}}, \qquad a_k = a_{-k}$$

$$\frac{\pi}{2}\frac{a_k}{(-1)^k} = \int_0^1 K(\sqrt{\tau^2-1})\,\frac{T_{2k}(\tau)\,d\tau}{\tau^{1-2\mu}\sqrt{1-\tau^2}} = \int_0^{\pi/2}\frac{K(\operatorname{tg}\theta)}{(\cos\theta)^{1-2\mu}}\cos 2k\theta\,d\theta$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\frac{\pi a_0}{2} = \int_0^1 K(\sqrt{\tau^2-1})\,\frac{\tau^{2\mu-1}d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} - \gamma\pi = \int_0^{\pi/2}\frac{K(\operatorname{tg}\theta)}{(\cos\theta)^{1-2\mu}}d\theta - \gamma\pi$$

Формулу для f_n так же, как и выше, можно привести к виду, аналогичному (4.16).

§ 6. **Примеры**. И. Я. Штаерман показал [10], что плоскую контактную задачу теории упругости с учетом поверхностной структуры контактируемых тел можно свести к интегральному уравнению

$$\varphi(x) + \frac{c}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln\frac{1}{|x-y|}\,\varphi(y)\,dy = f(x), \qquad \varphi(x) = p(ax) \tag{6.1}$$

Здесь $p(x)$ — контактное напряжение под штампом, $2a$ — длина участка контакта, c — постоянная Штаермана, $f(x)$ — функция, с точностью до постоянной, определяющая конфигурацию штампа. К этому же уравнению приводится одна смешанная задача теплопроводности [11].

Применительно к уравнению (6.1) коэффициенты a_m бесконечной системы (1.8) имеют вид

$$a_m = 2(m\pi)^{-1}[\operatorname{Si}(m\pi) + \pi/2] \quad (m=1, 2, 3, \ldots), \qquad a_0 = \sqrt{2}(1 - \ln 2)$$

где $\operatorname{Si}(x)$ — интегральный синус. Как видно, в рассматриваемом случае выполняется условие (1.11) и, следовательно, бесконечная система (1.8) будет квазивполне регулярна при любом c. Легко выяснить, что при $c < 1.5$ она будет вполне регулярна, если учесть (1.10), а также

$$K^2 = \int_0^2 \left|\ln\frac{1}{x}\right|^2 dx = 2.188$$

Для проверки эффективности предложенного способа решения интегральных уравнений были проделаны соответствующие вычисления применительно к случаю вдавливания штампа с плоским основанием, т. е. когда в (6.1) $f(x) = B$. При этом постоянная B находилась из условия равновесия штампа. Оказалось, что контактные напряжения при $c = 0{,}1$ во всех приближениях, начиная с $N = 1$, во всех точках интервала рознятся только в третьем знаке, при $c = 1$, начиная с $N = 3$, разница на единицу второго знака. Аналогичные вычисления были проделаны так же на основе метода, предложенного И. Я. Штаерманом [10], а также метода, указанного в последнем параграфе работы [12]. Оказалось, что они уступают предложенному в данной работе как по быстроте сходимости, так и по количеству вычислений.

Подсчитывалась также погрешность по формулам (2.3), (2.7) и (2.9), а также (2.10) и (2.12). В данном случае ядро уравнения удовлетворяет условию (2.11). Оказалось, что эти формулы применительно к уравнению (6.1) дают погрешность с большим запасом.

В работе [13] была рассмотрена задача о вдавливании штампа в торец полубесконечной полосы. Если указанную задачу решать с учетом поверхностной структуры контактируемых тел в постановке И. Я. Штаермана [10], то придем к уравнению

$$\varphi(x)+\frac{c}{\alpha\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\pi(x-y)}{4}\right|\varphi(y)\,dy=f(x),\qquad \varphi(x)=p(lx),\qquad \alpha=\frac{a}{l}\tag{6.2}$$

Здесь $2l$ — ширина полосы. Остальные символы имеют тот же смысл, что и в предыдущей задаче.

Интегральное уравнение (6.2) является частным случаем ($\beta=0$) уравнения (3.3). Согласно 1.442 из [2], имеем разложение

$$\ln\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}=2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(m+{}^1\!/_2)\pi x}{2m+1}\qquad(0\leqslant x\leqslant 2)$$

и, стало быть, коэффициенты a_m в рассматриваемом случае будут определяться простыми формулами

$$a_k=0\quad(k=0,1,2,\ldots),\qquad a_{2k+1}=\frac{2}{2k+1}\quad(k=0,1,2,\ldots)\tag{6.3}$$

Таким образом, здесь тоже выполняется условие (1.11) и, следовательно, соответствующие уравнению (6.2) бесконечные системы (1.8), элементы которых определяются формулами (6.3) и (3.5) при $\beta=0$, будут квазивполне регулярны для любого c. Легко получить и условие полной регулярности, если учесть, что

$$K^2=4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{2}$$

Как показано в работе [14], задачи о кручении штампом упругого полупространства со сферическим включением приводятся к следующим интегральным уравнениям

$$\varphi(s)-\frac{2}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\pi}\varphi(t)\left[\eta(t-s)-\eta(t+s)\right]dt=f(s)\qquad(\alpha_0\leqslant x\leqslant\pi)$$

$$\varphi(s)-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\alpha_0}\varphi(t)\left[\eta(t-s)-\eta(t+s)\right]dt=f(s)\qquad(0\leqslant x\leqslant\alpha_0)\tag{6.4}$$

$$\eta(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n+{}^1\!/_2)u}{\exp[2(n+{}^1\!/_2)\beta_0]+1}\qquad(0\leqslant u\leqslant 2\pi)$$

Здесь $\varphi(s)$ — искомые функции, через которые выражаются напряжения и перемещения полупространства, $f(s)$ — заданные (с точностью до постоянных) функции выражения для которых имеются в данной работе, α_0, β_0 — параметры связанные с радиусом штампа b, с радиусом сферического включения ρ и с расстоянием l от центра последнего до поверхности полупространства зависимостями

$$l=\rho\operatorname{ch}\beta_0,\qquad l\operatorname{ctg}{}^1\!/_2\,\alpha_0=b\operatorname{cth}\beta_0$$

Первое уравнение из (6.4) отвечает случаю, когда по поверхности сферического включения отсутствуют перемещения (абсолютно жесткое включение), второе — случаю сферической полости, по поверхности которой отсутствуют напряжения.

Чтобы свести указанные уравнения к уравнениям (3.4), следует сделать замену $s = \pi x$, $t = \pi y$. Тогда первое уравнение будет отвечать нечетному случаю, т. е. знаку минус в уравнениях (3.4), причем $\alpha = 1$, $\beta = \alpha_0 / \pi$, а второе — четному случаю, причем $\beta = 0$, $\alpha = \alpha_0 / \pi$. Первому интегральному уравнению (6.4) будет отвечать бесконечная система (1.8) со знаком минус. При этом $\lambda = -2$, а коэффициенты f_n, b_n надлежит вычислять по формулам (3.5), полагая $\alpha = 1$, $\beta = \alpha_0 / \pi$. Для коэффициентов a_m в соответствии с разложением из (6.4) будут справедливы простые формулы

$$a_{2k} = 0, \qquad a_{2k+1} = \{\exp[(2k+1)\beta_0] + 1\}^{-1} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{6.5}$$

Второму же интегральному уравнению (6.4) будет отвечать бесконечная система (1.8) со знаком плюс, причем, как и для первого уравнения $\lambda = -2$ и справедливы формулы (6.5). Коэффициенты же f_n, b_n по-прежнему следует вычислять по формулам (3.5), но считать $\beta = 0$, $\alpha = \alpha_0 / \pi$.

В монографии [15] показано, что такие задачи теории упругости, как вдавливание круглого штампа в упругий слой, а также кручение последнего круглым штампом, вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство, а также ряд смешанных задач на кручение усеченного шара, приводятся к уравнениям (1.4).

Приведем несколько примеров уравнений на полубесконечном интервале. В работе [16] показано, что задачу о вдавливании полубесконечного штампа с учетом поверхностной структуры можно свести к уравнению

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^\infty K_0(|x-y|)\,\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{6.6}$$

Учитывая интегральное представление для функции Макдональда (5.5), находим, что в данном случае $K(t) = \pi(1+t^2)^{-1/2}$. Подставляя это выражение в (4.5) и используя формулу 8.381 (1) из [2], получим

$$a_k = \frac{2}{1-4k^2} = a_{-k} \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{6.7}$$

Таким образом, интегральное уравнение (6.6) приводится к бесконечной системе (4.4), для коэффициентов которой справедлива простая формула (6.7). При этом она будет вполне регулярна, если $\lambda < 0.25$, так как в рассматриваемом случае

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\frac{2}{1-4k^2}\right| = 4$$

К интегральному уравнению (6.6) сводится также одна задача из теории электромагнитных волн [17]. В этой работе было получено точное решение уравнения (6.6), которое трудно довести до числа. В монографии [18] указан приближенный способ решения этого же уравнения, который по существу эквивалентен урезыванию полученной для него здесь бесконечной системы.

К интегральному уравнению

$$\varphi(x) + \frac{\lambda}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(x-y)}{x-y}\,\varphi(y)\,dy = f(x) \tag{6.8}$$

в работе [19] сведена задача о вдавливании круглого штампа в упругое полупространство с учетом сил сцепления. Очевидно, в данном случае

$$k(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty K(t)\cos xt\,dt, \qquad K(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Учитывая последнее на основании формул (4.8), найдем

$$a_k = (-1)^k (2k\pi)^{-1} \sin(\pi k / 2) \qquad (k=0, 1, 2, \ldots) \tag{6.9}$$

Таким образом, интегральное уравнение (6.8) можно привести к бесконечной системе (4.4), коэффициенты которой определяются простой формулой (6.9).

В монографии [20] показано, что основные плоские задачи теории упругости для односвязных тел можно свести к уравнению

$$\varphi(x) + \lambda \int_0^\infty k(x+y)\, y\, \overline{\varphi(y)}\, dy = f(x) \tag{6.10}$$

которое представляет собой частный случай ($\rho = 1$, $\sigma = y$) уравнения (5.1). Стало быть уравнение (6.10) можно свести к бесконечной системе (5.2). Указанная там формула для подсчета ее коэффициентов в рассматриваемом случае существенно упрощается. В самом деле, если учесть, что [2]

$$L_m(y) = L_m^1(y) - L_{m-1}^1(y)$$

а также и то, что в уравнении (6.10) задается [20] не само ядро, а его преобразование Фурье $K(t)$, т. е. учесть (4.2), то сможем записать

$$\begin{aligned} d_{nm} &= (m+1)\, c_{n,m} - m c_{n,m-1}, \\ c_{n,m} &= a_{n+m} \end{aligned} \qquad a_k = \frac{(-1)^k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(t)}{(1+it)^3} \left(\frac{1-it}{1+it}\right)^k dt \tag{6.11}$$

Здесь следует принять $c_{n,-1} = 0$. Кроме того, следует учесть, что при получении второй формулы в (6.11) была использована формула 7.414 (8) из [2]. Полученную формулу для a_k в случае, когда содержащийся в ней интеграл не выражается через простые функции, можно подвергнуть дальнейшему упрощению, основанному на представлении

$$K(t) = K^+(t) + K^-(t), \qquad 2K^{\pm}(t) = K(t) \pm K(-t)$$

Тогда, поступая точно так же, как и в случае интеграла (4.5), получим

$$a_k = a_k^+ + a_k^-$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{a_k^+}{(-1)^k} = \int_0^1 K^+(\sqrt{\tau^{-2}-1}) \frac{\tau T_{2k+3}(\tau)\, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \int_0^{\pi/2} K^+(\operatorname{tg}\theta) \cos\theta \cos(2k+3)\,\theta d\theta$$

$$\frac{\pi}{2} \frac{a_k^-}{(-1)^k} = \int_0^1 K^-(\sqrt{\tau^{-2}-1})\, \tau U_{2k+3}(\tau)\, d\tau = \int_0^{\pi/2} K^-(\operatorname{tg}\theta) \cos\theta \sin(2k+3)\,\theta d\theta$$

В работе [9] задача об изгибе полубесконечной пластинки, лежащей на упругом полупространстве, сведена к интегральному уравнению

$$\int_0^\infty [K_0(|x-y|) + \mu G(x-y)]\, \varphi(y)\, dy = f(x) \qquad \left(G(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-its} ds}{(1+s^2)^2}\right)$$

Используя описанный выше прием сведения уравнения первого рода к бесконечным системам, основанный на выделении особенности в ядре, приходим к бесконечной системе (4.4), причем коэффициенты этой системы имеют простой вид

$$\pi a_k = 12\,(1-4k^2)^{-1}\,(9-4\,k^2)^{-1}$$

Проделанные применительно к этой задаче вычисления показали высокую эффективность предложенного способа. Эти материалы, равно как и более детальное рассмотрение других как упоминавшихся выше задач, так и новых, будут опубликованы позже.

Поступила 26 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
3. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.
4. Трантер К. Д. Интегральные преобразования в математической физике. М., Гостехиздат, 1956.
5. Вулих Б. З. Введение в функциональный анализ, Изд. 2., М., «Наука», 1967.
6. Капица П. Л., Фок В. А., Вайнштейн Л. А. Симметричные электрические колебания идеально проводящего полого цилиндра конечной длины. Ж. техн. физ., 1959, т. 29, вып. 10.
7. Крейн М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Усп. матем. н., 1958, т. 13, вып. 5.
8. Гохберг И. Ц., Фельдман И. А. Проекционные методы решения уравнений Винера — Хопфа. Кишинев, Изд-во АН Молд. ССР, 1967.
9. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ППМ, 1964, т. 28, вып. 3.
10. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехтеориздат, 1949.
11. Поддубный Г. В. Об одной задаче теплопроводности в однородном полупространстве. Инж. физ. ж., 1961, т. 4, № 5.
12. Попов Г. Я. Некоторые свойства классических многочленов и их применение к контактным задачам. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
13. Попов Г. Я. По поводу одной плоской контактной задачи для упругой полуполосы. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
14. Руховец А. Н., Уфлянд Я. С. Смешанные задачи о кручении упругого полупространства со сферическим включением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1
15. Уфлянд С. Я. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, изд. 2. Л., «Наука», 1968.
16. Попов Г. Я. Вдавливание полубесконечного штампа в упругое полупространство. Ж. прикл. и теорет. матем., 1958, № 1.
17. Гринберг Г. А., Фок В. А. К теории береговой рефракции электромагнитных волн. В кн. «Исследования по распространению радиоволн». сб. 2., М., Изд-во АН СССР, 1948.
18. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев, «Наукова думка», 1968.
19. Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А. О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
20. Белоносов С. М. Основные плоские статистические задачи теории упругости для одно- и двусвязных областей. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1962.