

ДВИЖЕНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ГИРОСТАТА С САМОВОЗБУЖДЕНИЕМ

Б. А. Смольников, М. В. Степанова

(Ленинград)

Рассматривается частный случай движения гиростата с самовозбуждением, когда вязанный с корпусом силовой момент действует вдоль одной из главных осей инерции простата, проекция же гиростатического момента (момента относительного количества движения внутренних маховиков) на эту ось равна нулю. Значения момента сил моментов количеств движения маховиков, считающиеся постоянными, играют роль параметров задачи. Исследована зависимость годографа вектора угловой скорости простата от значений этих параметров и определены границы областей параметров, отвечающих различным типам движений.

Подобная задача для твердого тела без внутренних вращений рассматривалась Раммелем [1, 2]. Данная работа является некоторым обобщением этого известного случая.

1. Исходные соотношения. Движение гиростата, обладающего постоянным гиростатическим моментом h , под действием внешнего момента m описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} A_1 \dot{\omega}_1 + (A_3 - A_2) \omega_2 \omega_3 + \omega_2 h_3 - \omega_3 h_2 &= m_1 \\ A_2 \dot{\omega}_2 - (A_3 - A_1) \omega_3 \omega_1 + \omega_3 h_1 - \omega_1 h_3 &= m_2 \\ A_3 \dot{\omega}_3 + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 + \omega_1 h_2 - \omega_2 h_1 &= m_3 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — моменты инерции гиростата относительно его главных центральных осей x_1, x_2, x_3 , причем для определенности принимается $A_1 < A_2 < A_3$; $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости гиростата на оси x_1, x_2, x_3 ; h_1, h_2, h_3 — проекции гиростатического момента и m_1, m_2, m_3 — проекции внешнего момента на те же оси.

К виду (1.1) систему уравнений движения гиростата можно привести и в том случае, когда постоянными будут не относительные, а абсолютные скорости маховиков, т. е. когда на валу маховиков не действует никаких моментов [3].

Уравнения (1.1) будучи существенно нелинейными не допускают построения точного решения при произвольном m . Однако построение решения оказывается возможным, если вектор m направлен вдоль одной из главных осей гиростата, а проекция вектора h на эту ось отсутствует. При этом необходимо различать действует ли момент m по оси максимального (минимального) момента инерции или по оси промежуточного момента инерции. В первых двух случаях уравнения движения гиростата приводятся совершенно идентичной форме, в последнем же случае их вид оказывается несколько иным.

2. Действие момента вдоль оси максимального момента инерции. Пусть осью действия внешнего момента m является ось x_3 (ось наибольшего момента инерции корпуса) и, следовательно, $h_3 = 0, m_1 = m_2 = 0$.

Тогда, вводя переменную

$$u = \left[\frac{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_1 A_2} \right]^{1/2} \int \omega_3 dt \quad (2.1)$$

запишем уравнения (1.1) следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_1}{du} + \left[\frac{A_2(A_3 - A_2)}{A_1(A_3 - A_1)} \right]^{1/2} \omega_2 &= h_2 \left[\frac{A_2}{A_1(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]^{1/2} \\ \frac{d\omega_2}{du} - \left[\frac{A_1(A_3 - A_1)}{A_2(A_3 - A_2)} \right]^{1/2} \omega_1 &= -h_1 \left[\frac{A_1}{A_2(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$A_3 \left[\frac{A_1 A_2}{(A_3 - A_2)(A_3 - A_1)} \right]^{1/2} \frac{d^2 u}{dt^2} + (A_2 - A_1) \omega_1 \omega_2 + \omega_1 h_2 - \omega_2 h_1 = m_3$$

Решение первых двух уравнений представим в виде (2.3)

$$\omega_1 = -\Omega \left(\frac{A_3 - A_2}{A_1} \right)^{1/2} \sin u + \frac{h_1}{A_3 - A_1}, \quad \omega_2 = \Omega \left(\frac{A_3 - A_1}{A_2} \right)^{1/2} \cos u + \frac{h_2}{A_3 - A_2}$$

Здесь Ω — постоянная интегрирования (вторая постоянная интегрирования содержится аддитивно в u), причем положим $\Omega > 0$.

Введем безразмерное время τ соотношением

$$d\tau = \Omega \left[\frac{(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_1 A_2 A_3} \right]^{1/2} dt \quad (2.4)$$

Последнее уравнение системы (2.2) представим в следующем виде:

$$\frac{d^2 u}{d\tau^2} - \sin u \cos u + \alpha \sin u + \beta \cos u = \kappa \quad (2.5)$$

$$\alpha = -\frac{h_2}{\Omega} \frac{\sqrt{A_2(A_3 - A_1)}}{(A_2 - A_1)(A_3 - A_2)}, \quad \beta = -\frac{h_1}{\Omega} \frac{\sqrt{A_1(A_3 - A_2)}}{(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)} \quad (2.6)$$

$$\kappa = -\frac{m_3}{\Omega^2 (A_2 - A_1)} \left[\frac{A_1 A_2}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]^{1/2}$$

Таким образом задача сводится к исследованию нелинейного уравнения (2.5), зависящего от трех параметров α , β и κ .

Характеризуя движение гиростата движением фазовой точки в пространстве $\omega_1 \omega_2 \omega_3$, можно видеть, что фазовые траектории располагаются на эллиптическом цилиндре

$$\frac{[\omega_1 - h_1 / (A_3 - A_1)]^2}{\Omega^2 (A_3 - A_2) / A_1} + \frac{[\omega_2 - h_2 / (A_3 - A_2)]^2}{\Omega^2 (A_3 - A_1) / A_2} = 1 \quad (2.7)$$

и, следовательно, компоненты ω_1 и ω_2 остаются ограниченными. Рассмотрим поведение компоненты

$$\omega_3 = \Omega \left(\frac{A_2 - A_1}{A_3} \right)^{1/2} \frac{du}{d\tau} \quad (2.8)$$

Построив интеграл уравнения (2.5)

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{d\tau} \right)^2 - \frac{1}{4} \cos 2u + \alpha \cos u - \beta \sin u = \kappa u + \gamma \quad (2.9)$$

(где γ — константа интегрирования) найдем для ω_3 следующее выражение

$$\omega_3 = \Omega \sqrt{2(\gamma + \kappa u + 1/4 \cos 2u - \alpha \cos u + \beta \sin u) (A_2 - A_1) / A_3} \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) вместе с (2.3) дает параметрическое представление фазовой траектории в пространстве $\omega_1\omega_2\omega_3$. Зависимость u от τ дается квадратурой

$$\int \frac{du}{\sqrt{\gamma + \kappa u + \frac{1}{4} \cos 2u - \alpha \cos u + \beta \sin u}} = \tau \sqrt{2} \quad (2.11)$$

которая при $\kappa \neq 0$ не выражается через известные функции.

Чтобы выявить характер фазовой траектории в осях $\omega_1\omega_2\omega_3$, достаточно изучить поведение фазовых кривых, описываемых уравнением (2.9), на плоскости uu' ($u' = du/d\tau$), представляющей собой развертку эллиптического цилиндра (2.7). Структура фазовой картины на этой плоскости зависит, очевидно от потенциальной функции в интеграле (2.9)

$$U(u) = -\frac{1}{4} \cos 2u + \alpha \cos u - \beta \sin u - \kappa u \quad (2.12)$$

В зависимости от значений параметров α , β и κ функция $U(u)$ может иметь четыре, два или нуль экстремумов на интервале 2π . Положение их дается уравнением $dU/du = 0$, а положение точек слияния двух соседних экстремумов в точку перегиба — уравнением $d^2U(u)/du^2 = 0$. Таким образом совокупность уравнений

$$\begin{aligned} \sin u \cos u - \alpha \sin u - \beta \cos u &= \kappa \\ \cos 2u - \alpha \cos u + \beta \sin u &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

определяет в пространстве параметров α , β , κ поверхность, разделяющую ее на области с различным количеством экстремумов потенциальной функции $U(u)$.

Выражая из (2.13) α и β , нетрудно получить уравнение этой поверхности в параметрической форме

$$\alpha = \cos^3 u - \kappa \sin u, \quad \beta = \sin^3 u - \kappa \cos u \quad (2.14)$$

Рассматривая сечения этой поверхности плоскостями $\kappa = \text{const}$ как уравнения семейства кривых на плоскости $\alpha\beta$, можно видеть, что при $\kappa = 0$ кривая раздела представляет собой астроиду

$$\alpha^{2/3} + \beta^{2/3} = 1 \quad (2.15)$$

Значениям α и β , лежащим внутри этой астоиды, отвечают четыре действительных корня уравнения $dU/du = 0$, а вне астоиды — два корня. При $\kappa \neq 0$ кривая (2.14) представляет собой, как нетрудно показать, эквидистанту астоиды, то есть кривую, «параллельную» астоиде (2.15), причем величина $|\kappa|$ численно равна «расстоянию» между соответствующими точками астоиды и эквидистанты.

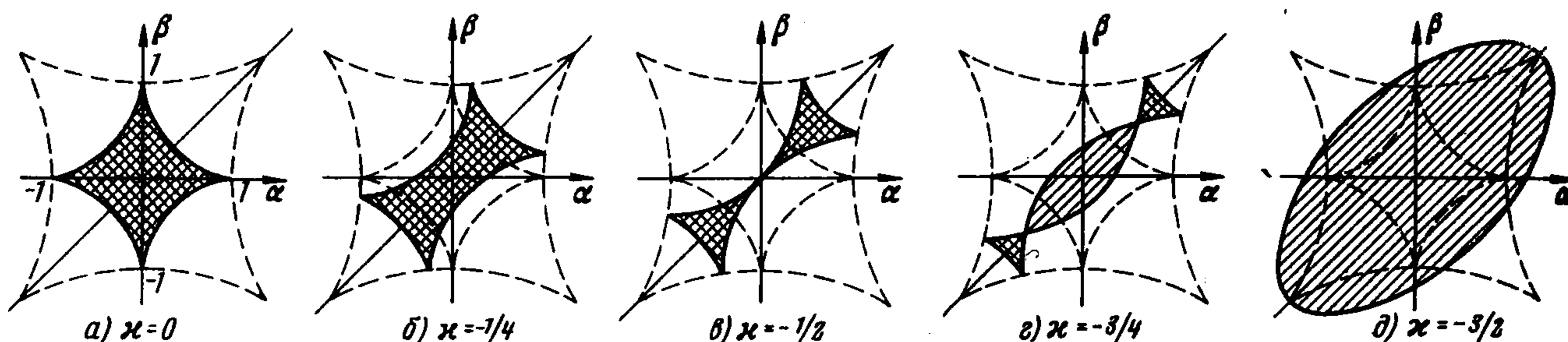
На фиг. 1 показан ряд кривых, задаваемых уравнением (2.14) при различных значениях $\kappa < 0$. Видно, что с увеличением $|\kappa|$ вершины эквидистанты смещаются симметрично по отношению к биссектрисе первого и третьего квадрантов. Эти вершины, положение которых определяется из соотношений

$$d\alpha/du = d\beta/du = 0, \quad \sin u \cos u = -\frac{1}{3}\kappa \quad (2.16)$$

при изменении κ движутся также по астоиде

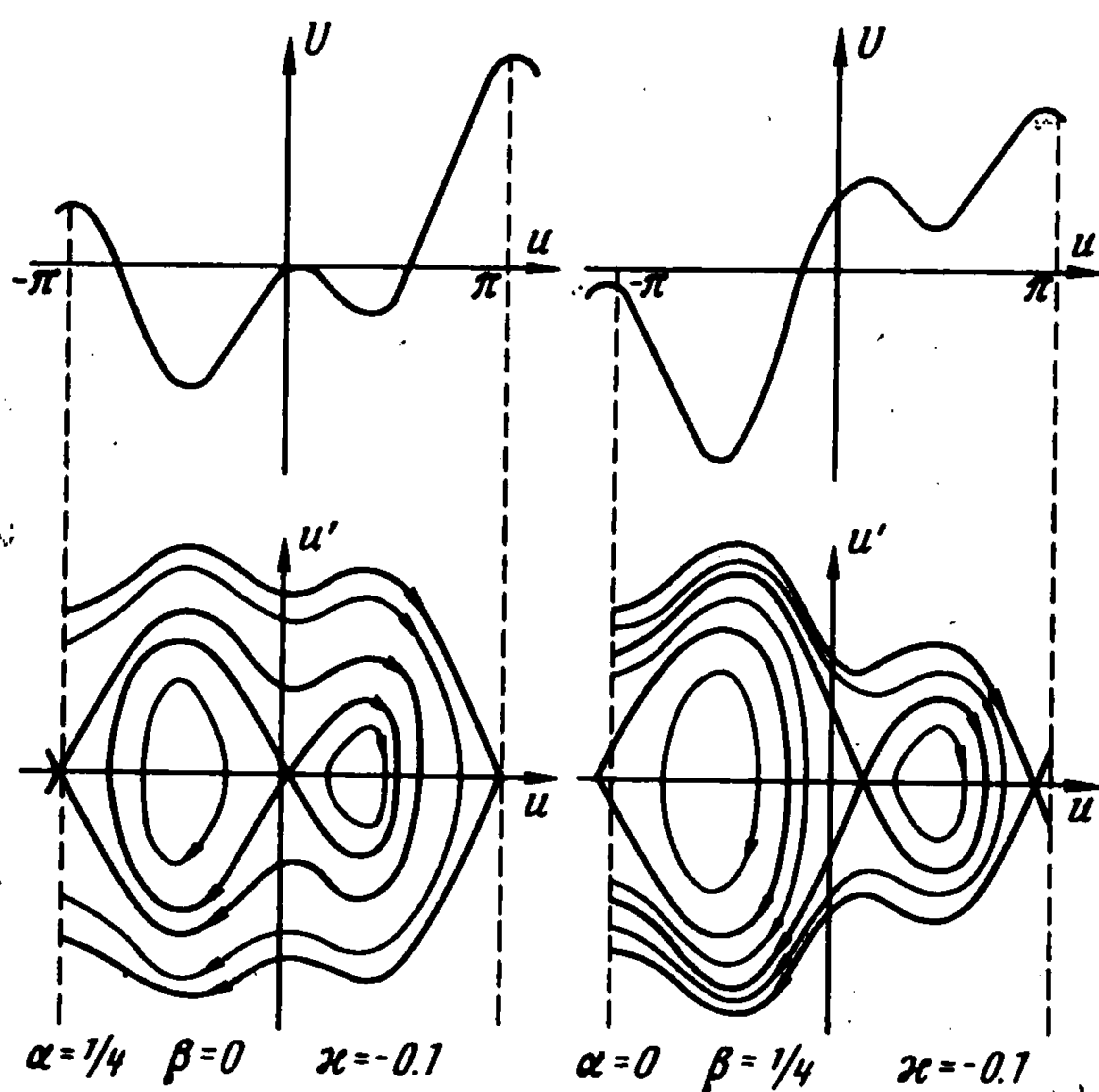
$$\alpha - \beta = (1 + \frac{2}{3}\kappa)^{3/2}, \quad \alpha + \beta = (1 - \frac{2}{3}\kappa)^{3/2} \quad (2.17)$$

Существование вершин, т. е. особых точек, определяемых соотношением (2.16) возможно лишь при $|\kappa| < 3/2$. При больших значениях $|\kappa|$ эквидистанта астроида становится гладкой замкнутой кривой, стремящейся при $|\kappa| \rightarrow \infty$ к окружности с радиусом $|\kappa|$. Из фиг. 1 видно, что с увеличением $|\kappa|$ от 0 до $1/2$ две противоположные стороны эквидистанты сближаются и при $|\kappa| = 1/2$ входят в соприкосновение одна с другой



Фиг. 1

Дальнейшее возрастание $|\kappa|$ ведет к образованию новой области, заключенной между двумя взаимно пересекающимися сторонами эквидистанты, в пределах которой, как



Фиг. 2

можно показать, функция U (и вообще не имеет экстремумов. Область четырех экстремумов при этом распадается на две изолированные подобласти, размеры которых сокращаются с ростом $|\kappa|$ и при $|\kappa| = 3/2$ исчезают полностью. На фиг. 1 области четырех экстремумов покрыты двойной штриховкой, область двух экстремумов оставлена без штриховки и область отсутствия экстремумов покрыта простой штриховкой. В случае $\kappa > 0$ «продольной» осью эквидистанты становится биссектриса второго и четвертого квадрантов плоскости $\alpha\beta$.

Пользуясь приведенным на фиг. 1 разбиением пространства параметров, нетрудно построить картину фазовых траекторий в плоскости uu' для любой совокупности значений параметров α, β, κ .

При анализе движения гиригата под действием связанного момента иногда возникает необходимость определения характера изменения величины его суммарного кинетического момента L . Пользуясь соотношениями (2.3) и (2.10), нетрудно получить для него следующее выражение:

$$\begin{aligned} \dot{L}^2 = & (A_1\omega_1 + h_1)^2 + (A_2\omega_2 + h_2)^2 + A_3^2\omega_3^2 = 2m_3uA_3 \left[\frac{A_1A_2}{(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]^{1/2} + \\ & + \Omega^2 \left[A_1A_2 - \frac{A_3(A_2 - A_1)}{2} - 2\gamma A_3(A_2 - A_1) \right] + A_3^2 \left[\frac{h_1^2}{(A_3 - A_1)^2} + \frac{h_2^2}{(A_3 - A_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

Видно, что квадрат модуля кинетического момента представляет собой линейную функцию u (при $m_3 \neq 0$) и, следовательно, достигает экстремума вместе с u . Фазовая плоскость uu' позволяет судить, таким образом, и об изменении величины кинетического момента. В частности, при помощи этой плоскости легко установить, когда кинетический момент L может иметь вековую составляющую, и когда такая составляющая отсутствует.

3. Действие момента вдоль оси промежуточного момента инерции. Если наложить условия $h_2 = 0$, $m_1 = m_3 = 0$, то первое и третье уравнения системы (1.1) после введения переменной

$$v = \left[\frac{(A_2 - A_1)(A_3 - A_2)}{A_1 A_3} \right]^{1/2} \int \omega_2 dt \quad (3.1)$$

примут вид

$$\frac{d\omega_1}{dv} + \left[\frac{A_3(A_3 - A_2)}{A_1(A_2 - A_1)} \right]^{1/2} \omega_3 = -h_3 \left[\frac{A_3}{A_1(A_2 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]^{1/2} \quad (3.2)$$

$$\frac{d\omega_3}{dv} + \left[\frac{A_1(A_2 - A_1)}{A_3(A_3 - A_2)} \right]^{1/2} \omega_1 = h_1 \left[\frac{A_1}{A_3(A_2 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]^{1/2}$$

В отличие от предыдущего случая решение этой системы может иметь различную форму для различных начальных условий, а именно: (3.3)

$$\omega_1 = \Omega \left(\frac{A_3 - A_2}{A_1} \right)^{1/2} \frac{\text{sh } v}{\text{ch } v} + \frac{h_1}{A_2 - A_1}, \quad \omega_3 = -\Omega \left(\frac{A_2 - A_1}{A_3} \right)^{1/2} \frac{\text{ch } v}{\text{sh } v} - \frac{h_3}{A_3 - A_2}$$

где следует брать либо оба верхних, либо оба нижних частных решения. Здесь Ω — постоянная интегрирования ($\Omega \geq 0$), вторая же постоянная интегрирования содержится в v . Кроме общих решений (3.3), система (3.2) имеет два частных решения, не содержащихся в (3.3) (3.4)

$$\omega_1 = \Omega \left(\frac{A_3 - A_2}{A_1} \right)^{1/2} e^{\pm v} + \frac{h_1}{A_2 - A_1}, \quad \omega_3 = -\Omega \left(\frac{A_2 - A_1}{A_3} \right)^{1/2} e^{\pm v} - \frac{h_3}{A_3 - A_2}$$

На плоскости $\omega_1\omega_3$ решения (3.3) описывают два семейства гипербол с взаимно перпендикулярными осями, общие асимптоты которых даются частными решениями (3.4). Знак константы Ω определяет движение по той или иной ветви соответствующей гиперболы или асимптоты. В отличие от предыдущего случая здесь при неограниченном изменении v неограниченно могут меняться и компоненты ω_1 и ω_3 . Чтобы найти область изменения v , преобразуем второе уравнение системы (1.1) посредством перехода к безразмерному времени τ согласно (2.4) к виду

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} + \text{sh } v \text{ ch } v + \alpha \frac{\text{sh } v}{\text{ch } v} + \beta \frac{\text{ch } v}{\text{sh } v} = \kappa \quad (3.5)$$

Здесь верхние функции соответствуют верхним функциям решения (3.3): а нижние — нижним. Параметры α , β , κ выражаются формулами

$$\alpha = \frac{h_3 \sqrt{A_3(A_2 - A_1)}}{\Omega(A_3 - A_1)(A_3 - A_2)}, \quad \beta = \frac{h_1 \sqrt{A_1(A_3 - A_2)}}{\Omega(A_3 - A_1)(A_2 - A_1)} \quad (3.6)$$

$$\kappa = \frac{m_2}{\Omega^2(A_3 - A_1)} \left[\frac{A_1 A_3}{(A_2 - A_1)(A_3 - A_2)} \right]^{1/2}$$

Частным решениям (3.4) отвечает следующий вид уравнения для v

$$d^2v / d\tau^2 \pm e^{\pm 2v} + (\alpha \pm \beta)e^{\pm v} = \kappa \quad (3.7)$$

Тот или иной знак должен выбираться соответственно виду частного решения (3.4).

В дальнейшем будем рассматривать лишь тот случай, когда в уравнении (3.5) используются верхние выражения, так как второй случай получается отсюда формальной переменной местами параметров α и β .

Записав первый интеграл уравнений (3.5) и (3.7) и учтя (3.1), найдем соответственно

$$\omega_2 = \Omega \sqrt{2(\gamma + \kappa v - 1/4 \operatorname{ch} 2v - \alpha \operatorname{ch} v - \beta \operatorname{sh} v)(A_3 - A_1) / A_2} \quad (3.8)$$

$$\omega_2 = \Omega \sqrt{2[\gamma + \kappa v - 1/2 e^{\pm 2v} \mp (\alpha \pm \beta)e^{\pm v}](A_3 - A_1) / A_2} \quad (3.9)$$

Используя эти выражения, нетрудно показать, что квадрат модуля кинетического момента гиростата L , как и в предыдущем случае, оказывается линейной функцией v .

Ход фазовых траекторий в осях vv' определяется структурой потенциальной функции $U(v)$ (содержащейся в подкоренных выражениях (3.8) и (3.9)). В отличие от предыдущего случая здесь количество экстремумов потенциальной функции может равняться одному или трем в интервале $-\infty \leq v \leq \infty$. Пограничная кривая на плоскости параметров $\alpha\beta$ может быть получена из условий $dU/dv = 0$, $d^2U/dv^2 = 0$, откуда для уравнения (3.5) имеем

$$\alpha = -\operatorname{ch}^3 v - \kappa \operatorname{sh} v, \quad \beta = \operatorname{sh}^3 v + \kappa \operatorname{ch} v \quad (3.10)$$

Общий вид этой кривой при ряде значений κ показан на фиг. 3. При $\kappa = 0$ имеем явное уравнение пограничной кривой

$$\alpha^{2/3} - \beta^{2/3} = 1 \quad (3.11)$$

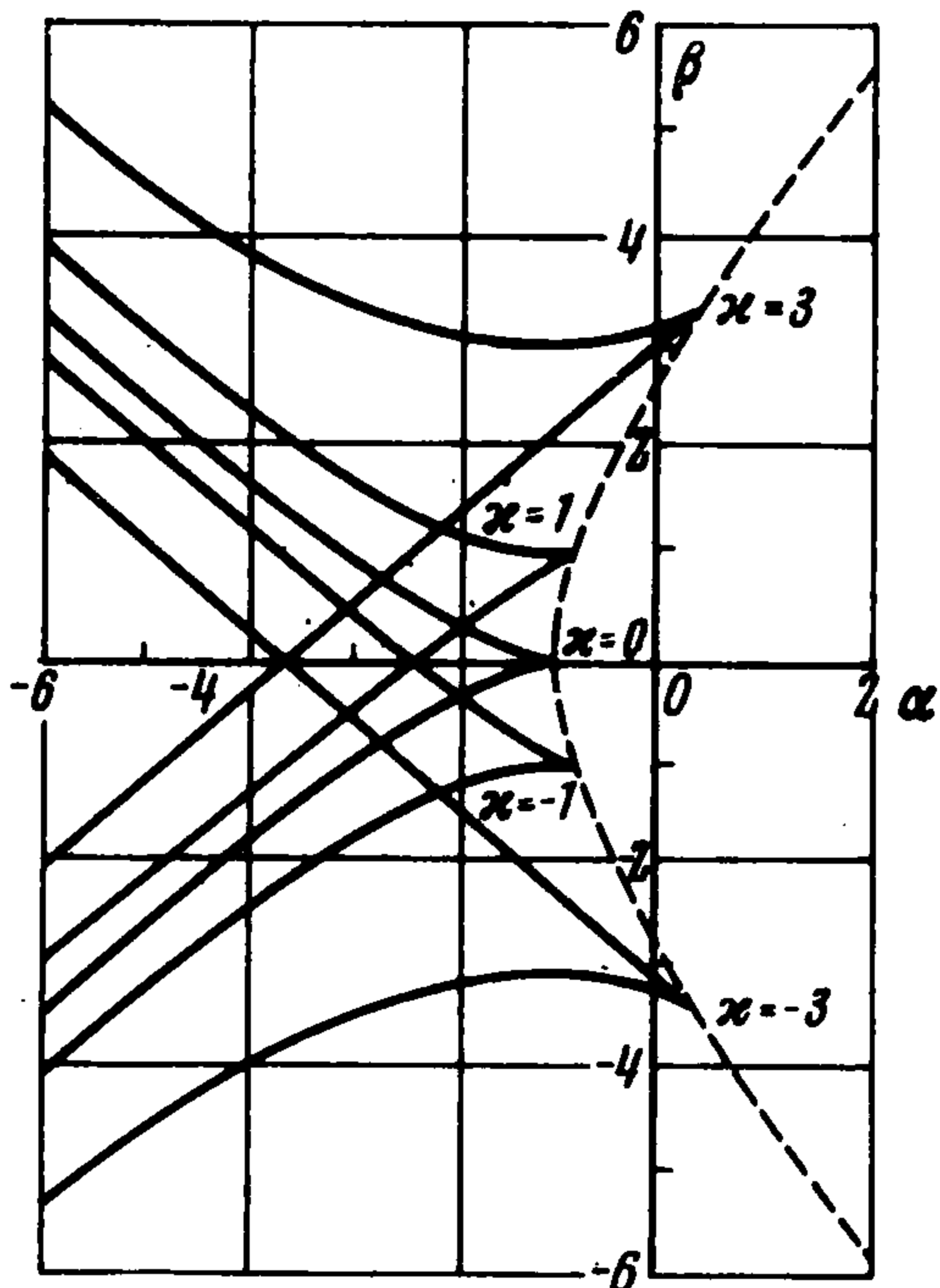
которую можно назвать гиперболической астроидой. Как и обычная гипербола, она имеет две изолированные ветви, из которых уравнениям (3.10) удовлетворяет лишь одна (левая) ветвь. Как видно из графика, в вершине эта кривая имеет точку возврата. При $\kappa \neq 0$, вершина координаты которой легко определяется из условий, аналогичных (2.17)

$$\operatorname{sh} 2v = -2/3 \kappa \quad (3.12)$$

начинает смещаться по кривой

$$3(\alpha^2 + \beta^2)^{2/3} = 4 + \beta^2 - \alpha^2 \quad (3.13)$$

(на фиг. 3 она показана пунктирной линией). Области параметров, заключенной [внутри ветви гиперболической астроиды, [соответствуют три экстремума потенциальной функции, вне этой ветви — один экстремум.



Фиг. 3

Для частных решений (3.4) потенциальная функция имеет вид

$$U(v) = 1/2 e^{\pm 2v} \pm (\alpha + \beta)e^{\pm v} + \kappa v \quad (3.14)$$

а ее экстремумы определяются соотношением

$$e^{\pm v} = \pm \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\alpha \pm \beta)^2 \pm \kappa} \quad (3.15)$$

где двойной знак перед корнем имеет обычный смысл, а остальные двойные знаки относятся к тому или другому частному решению (3.3.). Из (3.15) легко установить, при каких значениях параметров α , β и κ функция (3.15) имеет два, один или нуль экстремумов.

Сравнение двух рассмотренных случаев движения гиростата показывает, что когда момент m действует по оси наибольшего или наименьшего момента инерции гиростата, возможен неограниченный рост u , а следовательно, и L . В случае же, когда момент действует вдоль оси промежуточного момента инерции, неограниченный рост L , как правило невозможен. Физически это связано с тем фактом, что вращение несимметричного твердого тела вокруг оси промежуточного момента инерции неустойчиво. Поэтому здесь оказывается невозможным накопление кинетической энергии по одной оси (оси x_2) и происходит обмен ею между движениями по всем трем осям.

4. Случай осевой динамической симметрии гиростата. Если корпус гиростата обладает осевой динамической симметрией, полученные выше соотношения оказываются непригодными и требуется отдельное рассмотрение задачи. Здесь возможны два случая, а именно:

- а) момент m действует вдоль оси динамической симметрии;
- б) момент m действует перпендикулярно к этой оси.

В первом из этих случаев полагая в уравнениях (1.1) $h_3 = 0$, $m_1 = m_2 = 0$, $A_1 = A_2$ (ось симметрии есть ось x_3) и вводя обозначение

$$u = \varepsilon \int \omega_3 dt, \quad \varepsilon = (A_3 - A_1) / A_1 \quad (4.1)$$

получим

$$\omega_1 = \Omega \cos u + h_1 / (A_3 - A_1), \quad \omega_2 = \Omega \sin u + h_2 / (A_3 - A_1) \quad (4.2)$$

$$(A_3 / \varepsilon) d^2 u / dt^2 - \Omega h_1 \sin u - \Omega h_2 \cos u = m_3 \quad (4.3)$$

Отсюда следует, что фазовая точка в пространстве $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ движется по боковой поверхности кругового цилиндра, параллельного оси ω_3 , причем характер движения точки по этой поверхности определяется хорошо известным уравнением математического маятника с постоянным моментом на оси (4.3). Положения равновесия здесь возможны лишь при

$$|m_3| \leq \Omega \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \quad (4.4)$$

К иным соотношениям приводит второй случай, когда в уравнениях движения (1.1) принимается $h_1 = 0$, $m_2 = m_3 = 0$, $A_1 = A_2$.

Вводя обозначение

$$\varepsilon \int \omega_1 dt = v + D \quad (4.5)$$

где D — некоторая произвольная пока константа, можно представить

выражения для ω_2 и ω_3 в виде

$$\begin{aligned}\omega_3 &= -h_2(v + D) / \varepsilon A_3 + M \\ \omega_2 &= -h_2(v + D)^2 / 2\varepsilon A_3 + (v + D)(M + h_3 / \varepsilon A_1) + N\end{aligned}\quad (4.6)$$

Здесь M и N — константы интегрирования. Из первого уравнения (1.1) получаем уравнение для v

$$\begin{aligned}\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{h_2^2(v + D)^3}{2A_3^2} - \frac{3\varepsilon h_2(v + D)^2}{2A_3} \left(M + \frac{h_3}{\varepsilon A_1} \right) + (v + D) \left[\varepsilon^2 \left(M + \frac{h_3}{\varepsilon A_1} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon h_2}{A_3} \left(N - \frac{h_2}{\varepsilon A_1} \right) \right] + \varepsilon^2 N \left(M + \frac{h_3}{\varepsilon A_1} \right) - \varepsilon \frac{h_2 M}{A_1} = \varepsilon m_1\end{aligned}\quad (4.7)$$

Переходя далее к безразмерному времени

$$d\tau = h_2 / A_3 \sqrt{2} dt \quad (4.8)$$

и выбирая постоянную D таким образом, чтобы в кубическом полиноме в уравнении (4.7) обратился в нуль коэффициент при v^2 , т. е. принимая

$$D = -A_3 (M + h_3 / \varepsilon A_1) / h_2$$

получим

$$d^2v / d\tau^2 + v^3 - 3\lambda v = 2\delta \quad (4.9)$$

Здесь

$$3\lambda = \left(M + \frac{h_3}{\varepsilon A_1} \right) \frac{\varepsilon^2 A_3^2}{h_2^2} + 2 \left(N - \frac{h_2}{\varepsilon A_1} \right) \frac{\varepsilon A_3}{h_2}, \quad \delta = \frac{m_1 \varepsilon A_3^2}{h_2^2} - \frac{h_3 A_3^2}{h_2 A_1^2} \quad (4.10)$$

Видно, что параметр δ не зависит от начальных условий, параметр же λ определяется начальными значениями ω_2 и ω_3 . Уравнение (4.9) имеет интеграл

$$1/2 (dv / d\tau)^2 + 1/4 v^4 - 3/2 \lambda v^2 = 2\delta v + \text{const} \quad (4.11)$$

при помощи которого нетрудно выразить $\omega_1(v)$, а также исследовать характер фазовых траекторий на плоскости vv' . Эту плоскость можно рассматривать как развертку боковой поверхности параболического цилиндра, определяемого выражениями (4.6) в пространстве $\omega_1 \omega_2 \omega_3$. Количество точек равновесия на этой плоскости может быть равным единице или трем. Действуя как и ранее, нетрудно произвести разбиение плоскости параметров $\lambda\delta$ на области с одним и тремя состояниями равновесия. Кривая раздела этих областей есть полукубическая парабола

$$\delta = (\lambda)^{3/2} \quad (4.12)$$

В качественном отношении данный случай близок к режиму движения несимметричного гиростата, рассмотренному в п. 3.

Построенные решения могут быть использованы для анализа процесса ликвидации продольной компоненты угловой скорости гиростата при релейном переключении знака управляющего момента m в соответствии со знаком этой компоненты.

Поступила 19 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Grammel R. Drehzahlabhängige Selbsterrungung des unsymmetrischen Kreisels. Ing.-Arch., 1960, В. 29, d. 3, ss. 153—159.
2. Leimanis E. The General Problem of the Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point. Berlin, Springer, 1965.
3. Смольников Б. А. Движение вокруг центра инерции твердого тела с вращающимися маховиками. ПММ, 1966, вып. 4.