Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. Б. Колмановский, В. Р. Носов

(Москва)

Установлены достаточные условия устойчивости тривиальных решений нелинейных уравнений нейтрального типа первого порядка с произвольным (конечным или бесконечным) запаздыванием.

1. Рассматриваются условия устойчивости тривиальных решений уравнений вида

$$x^{\cdot}(t) = -\int_0^\infty x(t-s)\,dK_0(s) + \sum_{n=1}^\infty a_n x^{\cdot}(t-h_n) + \tag{1.1}$$

$$+\int_0^\infty x^{\cdot}(t-s)\lambda(s)\,ds + b(t,\ x(t+\tau)), \qquad t > 0$$

Вопрос об устойчивости решений некоторых уравнений вида (1.1) исследовался в ряде работ. В статье [1] получены условия устойчивости решений этих уравнений при $b\ (t,\ x\ (t+\tau)) \equiv 0,\ \lambda\ (s) \equiv 0,\ a_n \equiv 0$. В работах [2, 3] для уравнений запаздывающего типа при $a_n \equiv 0,\ \lambda\ (s) \equiv 0$ получены достаточные условия устойчивости путем построения функционалов Ляпунова.

Применение второго метода Ляпунова к уравнениям нейтрального типа приводит к специфическим трудностям, связанным с зависимостью правых частей этих уравнений от производной решений. В [4] сформулированы общие теоремы второго метода Ляпунова для уравнений вида

$$x^{\cdot}\ (t) = f\ (t,\ x\ (t - \tau\ (t)), \qquad x^{\cdot}\ (t - \tau\ (t))$$

В данной работе найдены условия устойчивости тривиальных решений уравнений (1.1) при помощи метода функционалов Ляпунова, развитого для систем с запаздыванием Н. Н. Красовским [5].

Отметим, однако, что построенные ниже функционалы не являются функционалами Ляпунова в строгом смысле слова, поскольку они лишь знакопостоянны, а не знакоопределенны. Применение таких знакопостоянных функционалов, позволяющее обойти отмеченные выше трудности, присущие уравнениям нейтрального типа, сводит исследование вопроса об устойчивости уравнения (1.1) к решению двух вспомогательных задач.

Первая — построение неотрицательного функционала с определенно-отрицательной производной вдоль траекторий системы (1.1).

Вторая — исследование на устойчивость решения $x(t) \equiv 0$ следующего неравенства:

$$\left| x(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x(t-h_n) - \int_0^{\infty} x(t-s)\lambda(s)\,ds \right| \leqslant c_0 \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем c_i означают некоторые положительные постоянные.

Заметим еще, что ряд особенностей рассматриваемой задачи связан с тем, что отклонения аргумента могут быть бесконечными.

2. Ниже предполагается, что коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют следующим требованиям.

Ядро $K_0(s)$ имеет ограниченное изменение на полуоси $[0, \infty)$ и соответствующий интеграл в (1.1) понимается в смысле Стильтьеса. Функция $\lambda(s)$ ограничена и интегрируема по Риману на $[0, \infty]$.

Наконец, все постоянные

$$h_n \geqslant 0, \qquad |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots < \infty$$

Обозначим

$$K_1(s) = \int_0^s \lambda(s_1)\,ds_1 + \sum_{h_n \leqslant s} a_n, \qquad K_1(0) = 0$$

где суммирование распространяется на те значения n, для которых $h_n \leqslant s$, и положим

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n y(-h_n) + \int_0^{\infty} y(-s)\lambda(s)\,ds = \int_0^{\infty} y(-s)\,dK_1(s) \tag{2.1}$$

для любой ограниченной и интегрируемой по Риману функции $y(s)$, $s \leqslant 0$. Подчеркнем, что символ в правой части (2.1) не есть, вообще говоря, интеграл Стильтьеса, так как при сделанных предположениях относительно $y(s)$ этот интеграл может и не существовать.

Обозначим через Q прямое произведение полуоси $[0, \infty)$ и пространства $C(-\infty, 0]$ непрерывных ограниченных на полуоси $(-\infty, 0]$ функций $\varphi(\tau)$ аргумента τ, меняющегося в пределах $-\infty < \tau \leqslant 0$.

Метрика в Q определяется формулой

$$\rho\,((t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2)) = |t_1 - t_2| + \sup\nolimits_{\tau \leqslant 0} |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)|$$
$$\varphi_1, \varphi_2 \in C(-\infty, 0], \qquad t_1, t_2 \geqslant 0$$

Функционал $b(t, \varphi(\tau))$ определен и непрерывен на пространстве Q и удовлетворяет для любых $\varphi, \psi \in C(-\infty, 0]$ условиям

$$b(t, 0) \equiv 0, \; |b(t, \varphi) - b(t, \psi)|^2 \leqslant \int_0^{\infty} |\varphi(-s) - \psi(-s)|^2\,dK_2(s) \tag{2.2}$$

где функция $K_2(s)$ монотонно не убывает. Положим

$$\alpha_{ij} = \int_0^{\infty} s^i\,|dK_j(s)| \qquad (i = 0, 1, \ldots, j = 0, 1, 2, 3, 4)$$

Ниже постоянно предполагается, что

$$\alpha_{00} < \infty, \quad \alpha_{01} < 1, \quad \alpha_{02} < \infty \tag{2.3}$$

Решение $x(t)$ уравнения (1.1) при $t > 0$ определяется начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t), \; x^{\cdot}(t) = \psi(t), \; t \leqslant 0 \tag{2.4}$$

В дальнейшем ограничимся лишь начальными данными, удовлетворяющими требованиям A):

$\varphi(t)$, $t \leqslant 0$ — непрерывная ограниченная функция, $\psi(t)$ — функция ограниченная на $(-\infty, 0]$,

интегрируемая по Риману на каждом конечном интервале и $\psi(t) = \varphi^{\cdot}(t)$ почти всюду.

Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость решения $x(t)$ задачи (1.1), (2.4) от начальных условий, будем обозначать его символом $x(t, \varphi, \psi)$. При сделанных предположениях (2.2) — (2.4) при помощи метода последовательных приближений (аналогично доказательству теоремы 2 из [6]) легко доказать существование и единственность функции $x^{\cdot}(t)$, ограниченной и интегрируемой по Риману на каждом конечном интервале, равной $\psi(t)$ при $t \leqslant 0$ и такой, что функции

$$x^{\cdot}(t), \qquad x(t) = \varphi(0) + \int_0^t x^{\cdot}(s)\, ds$$

будут решением задачи (1.1), (2.4).

3. *Определение* 1. Тривиальное решение уравнения (1.1) назовем

1) устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при всех $t \geqslant 0$ $|x(\varphi, \psi, t)| < \varepsilon$, как только выполнены условия A) и

$$\|\varphi\| = \sup |\varphi(\tau)| < \delta(\varepsilon) \qquad (\tau \leqslant 0)$$

2) асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и

$$\lim_{t\to\infty} x(\varphi, \psi, t) = 0$$

Докажем теперь простую лемму об устойчивости тривиального решения неравенства (1.2), необходимую в дальнейшем.

Лемма 1. Пусть функция $x(t) = \varphi(t)$ при $t \leqslant 0$ ($\varphi(t) \in C(-\infty, 0]$), а при $t > 0$ удовлетворяет неравенству (1.2), и пусть выполнено условие (2.3). Тогда справедлива оценка

$$|x(t)|(1 - \alpha_{01}) \leqslant c_0 + \alpha_{01}\|\varphi\|, \qquad t \geqslant 0$$

Доказательство. Введем функцию

$$\rho(t) = \max |x(s)|, \; 0 \leqslant s \leqslant t$$

Из (1. 2) следует соотношение

$$|x(t)| \leqslant c_0 + \alpha_{01}(\rho(t) + \|\varphi\|)$$

Отсюда вытекает, что

$$\rho(t)(1 - \alpha_{01}) \leqslant c_0 + \alpha_{01}\|\varphi\|$$

Лемма 1 доказана.

Положим для любой $\varphi(\tau) \in C(-\infty, 0]$ (3.1)

$$Z(\varphi(\tau)) = \varphi(0) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(-h_n) - \int_0^{\infty} \varphi(-s)\lambda(s)\,ds = \varphi(0) - \int_0^{\infty} \varphi(-s)\,dK_1(s)$$

Теорема 1. Тривиальное решение уравнения (1.1) асимптотически устойчиво, если выполнены условия (2.2), (2.3) и существует функционал

$$V(\varphi(\tau)) = W(\varphi(\tau)) + Z^2(\varphi(\tau)) \tag{3.2}$$

определенный на пространстве Q, удовлетворяющий локальному условию Липшица (т. е. для любого N существует такое m_N, что $|V(\varphi(\tau)) - V(\psi(\tau))| \leqslant m_N \|\varphi - \psi\|$ при $\|\varphi(\tau)\| \leqslant N$, $\|\psi(\tau)\| \leqslant N$), причем

$$0 \leqslant W(\varphi(\tau)) \leqslant \omega_1(\|\varphi\|) \tag{3.3}$$

а производная функционала (3.2), вычисленная вдоль траекторий системы (1.1), существует и удовлетворяет неравенству

$$\frac{dV(x(t+\tau))}{dt} \leqslant -\omega_2(|x(t)|) \tag{3.4}$$

для почти всех $t \geqslant 0$ (по мере Лебега). В оценках (3.3) и (3.4) функции $\omega_i(r)$ непрерывны и $\omega_i(0) = 0$, $\omega_i(r) > 0$ при $r > 0$,

Доказательство. На основании (3.1) — (3.3) получим, что

$$V(\varphi(\tau)) \leqslant \omega_1(\|\varphi\|) + (1 + \alpha_{01})^2 \|\varphi\|^2 \tag{3.5}$$

Далее, из локального условия Липшица и отмеченной выше ограниченности производной $x^\cdot(t)$ решения $x(t)$ на каждом конечном интервале следует, что функционал $V(x(t+\tau))$ как функция t будет абсолютно непрерывен. Значит, для любых неотрицательных t_1, t_2

$$V(x(t_2+\tau)) - V(x(t_1+\tau)) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dV(x(t+\tau))}{dt}\,dt$$

Поэтому в силу (3.2) — (3.4)

$$Z^2(x(t+\tau)) \leqslant V(x(t+\tau)) \leqslant V(\varphi(\tau))$$

Отсюда и из (3.5), используя лемму 1, убеждаемся в справедливости соотношения

$$|x(t)| \leqslant \frac{1}{1-\alpha_{01}} \left[(\omega_1(\|\varphi\|) + (1+\alpha_{01})^2 \|\varphi\|^2)^{1/2} + \alpha_{01}\|\varphi\|\right]$$

Таким образом, устойчивость тривиального решения уравнения (1.1) установлена.

Для доказательства асимптотической устойчивости достаточно заметить, что для всякого ограниченного решения $x(t)$ задачи (1.1), (2.4) модуль $|x^\cdot(t)|$ в силу леммы 1 также ограничен, а затем повторить рассуждения Н. Н. Красовского ([5], стр. 181).

Теорема 1 доказана.

4. *Теорема* 2. Пусть выполнены условия (2.3) и ядро $K_0(s)$ имеет в нуле скачок величины $a > 0$, причем

$$a(1 - \alpha_{01}) > (1 + \alpha_{01})\left(\int_{+0}^{\infty} |dK_0(s)| + \sqrt{\alpha_{02}}\right) \tag{4.1}$$

$$\alpha_{12} + \alpha_{11} + \alpha_{10} < \infty$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Достаточно показать, что требования теоремы 2 позволяют построить функционал, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Предположим вначале, что $\alpha_{02} = 0$ (это означает, что $b(t, \varphi(\tau)) \equiv 0$) и рассмотрим функционал

$$V_0(x(t+\tau)) = Z^2(x(t+\tau)) + \alpha_{00}\int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-s}^t x^2(s_1)\,ds_1 + \\ + (1+\alpha_{01})\int_{+0}^\infty |dK_0(s)| \int_{t-s}^t x^2(s_1)\,ds_1 \qquad (4.2)$$

Справедливость оценок (3.3) следует из неравенства

$$\int_0^\infty |dK_i(s)| \int_{t-s}^t x^2(s_1)\,ds_1 \leqslant \alpha_{1i}\|x(t+\tau)\|^2 \quad (i=0,1) \qquad (4.3)$$

Вычислим производную функционала (4.2) вдоль траекторий системы (1.1). Так как при почти всех $t \geqslant 0$

$$Z^{\cdot}(x(t+\tau)) = x^{\cdot}(t) - \int_0^\infty x^{\cdot}(t-s)\,dK_1(s) = \\ = -a\,x(t) - \int_{+0}^\infty x(t-s)\,dK_0(s) + b(t, x(t+\tau))$$

то

$$\frac{dV_0(x(t+\tau))}{dt} = -2Z(x(t+\tau))\Big[a\,x(t) + \\ + \int_{+0}^\infty x(t-s)\,dK_0(s) + b(t, x(t+\tau))\Big] - \alpha_{00}\int_0^\infty x^2(t-s)\,|dK_1(s)| - \\ - (1+\alpha_{01})\int_{+0}^\infty x^2(t-s)\,|dK_0(s)| + x^2(t)\Big[\alpha_{00}\cdot\alpha_{01} + (1+\alpha_{01})\int_{+0}^\infty |dK_0(s)|\Big]$$

Отсюда, используя (2.2), (2.3) и неравенство Коши — Буняковского, получаем, что при почти всех $t > 0$

$$\frac{dV_0(x(t+\tau))}{dt} \leqslant 2x^2(t)\Big[-a + a\alpha_{01} + \int_{+0}^\infty |dK_0(s)|\,(1+\alpha_{01})\Big]$$

Значит, функционал (4.2) удовлетворяет требованиям теоремы 1. Тем самым справедливость теоремы 2 установлена для случая $\alpha_{02} = 0$. Если же $\alpha_{02} > 0$, то достаточно рассмотреть функционал

$$V(x(t+\tau)) = V_0(x(t+\tau)) + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{02}}}\int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-s}^t x^2(s_1)\,ds_1 + \\ + \left(\alpha_{01}\sqrt{\alpha_{02}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{02}}}\right)\int_0^\infty dK_2(s) \int_{t-s}^t x^2(t_1)\,dt_1 \qquad (4.4)$$

Как и выше, нетрудно убедиться, что функционал (4.4) удовлетворяет неравенствам (3.3), а для его производной справедлива оценка

$$\frac{dV(x(t+\tau))}{dt} \leqslant 2x^2(t)\left[-a(1-\alpha_{01}) + (1+\alpha_{01})\left(\int_{+0}^\infty |dK_0(s)| + \sqrt{\alpha_{02}}\right)\right]$$

Теорема 2 доказана.

5. *Лемма* 2. Пусть выполнены требования (2.2), (2.3), и условие $\alpha_{01} + \alpha_{10} < 1$. Тогда утверждение теоремы 1 остается в силе, если существует функционал, удовлетворяющий (3.3), (3.4), вида

$$V[\varphi(\tau)] = Z_1^2(\varphi(\tau)) + W[\varphi(\tau)] \tag{5.1}$$

где

$$Z_1(\varphi(\tau)) = \varphi(0) - \int_0^\infty \varphi(-s)\,dK_1(s) - \int_0^\infty dK_0(s)\int_{-s}^0 \varphi(t_1)\,dt_1 \tag{5.2}$$

Доказательство этой леммы получается дословным повторением доказательства теоремы 1.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (2.2), (2.3), причем

$$\alpha_{10} + \alpha_{01} < 1$$

$$\beta = \int_0^\infty dK_0(s) > \alpha_{02}^{1/2}\frac{1 + \alpha_{10} + \alpha_{01}}{1 - \alpha_{10} - \alpha_{01}}$$

$$\alpha_{20} + \alpha_{11} + \alpha_{12} < \infty$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Предположим вначале, что $\alpha_{02} > 0$, и введем в рассмотрение функционал

$$V[x(t+\tau)] = Z_1^2(x(t+\tau)) + (\beta + \alpha^{1/2}{}_{02})\int_0^\infty |dK_1(s)|\int_{t-s}^t x^2(t_1)\,dt_1 +$$

$$+ (1 + \alpha_{10} + \alpha_{01})\alpha_{02}^{-1/2}\int_0^\infty dK_2(s)\int_{t-s}^t x^2(t_1)\,dt_1 + (\beta + \alpha^{1/2}{}_{02})\int_0^\infty |dK_0(s)|\int_{t-s}^t dt_1\int_{t_1}^t x^2(t_2)\,dt_2 \tag{5.3}$$

где $Z_1(x(t+\tau))$ определено формулой (5.2). Из (4.3) и условий теоремы 3 вытекает, что функционал (5.3) удовлетворяет оценкам

$$Z_1^2(x(t+\tau)) \leqslant V[x(t+\tau)] \leqslant C_1\|x(t+\tau)\|^2 \tag{5.4}$$

При почти всех $t > 0$ производная

$$Z_1^{\cdot}(x(t+\tau)) = -\beta x(t) + b(t, x(t+\tau))$$

и кроме того на основании (2.2), (2,3) имеют место оценки

$$2b(t, x(t+\tau))\int_0^\infty dK_0(s)\int_{t-s}^t x(t_1)\,dt_1 \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_{10}\alpha_{01}^{-1/2}\int_0^\infty x^2(t-s)\,dK_2(s) + \alpha_{02}^{1/2}\int_0^\infty |dK_0(s)|\int_{t-s}^t x^2(t_1)\,dt_1$$

$$2\beta x(t)\int_0^\infty dK_0(s)\int_{t-s}^t x(t_1)\,dt_1 \leqslant \beta x^2(t)\alpha_{00} + \beta\int_0^\infty |dK_0(s)|\int_{t-s}^t x^2(t_1)\,dt_1$$

Поэтому нетрудно вычислить, что при почти всех $t > 0$

$$\frac{dV[x(t+\tau)]}{dt} \leqslant 2x^2(t)\left[-\beta(1 - \alpha_{01} - \alpha_{10}) + \alpha_{02}^{1/2}(1 + \alpha_{10} + \alpha_{01})\right]$$

Отсюда и из (5.4) на основании леммы 2 при $\alpha_{02} > 0$ вытекает справедливость теоремы 3 в этом случае.

Для доказательства теоремы 3 при $\alpha_{02} = 0$ нужно использовать функционал (5.3), в котором отсутствует третий член, и α_{02} в остальных слагаемых положено равным нулю.

Замечание 1. Если $\lambda(s) \equiv 0$, $a_n \equiv 0$, то теоремы 2, 3 переходят в соответствующие результаты работы [3].

Замечание 2. Модифицируя функционал (5.3), можно получить иные условия устойчивости уравнения (1.1). Приведем некоторые из них. Воспользуемся тем, что произвольная функция $K_0(s)$ с ограниченным изменением представима в виде разности $K_0(s) = K_3(s) - K_4(s)$ двух монотонно неубывающих ограниченных функций. При этом к функционалу (5.3), в котором $K_0(s)$ заменено на $K_3(s)$, β на α_{03} и α_{10} на α_{13}, достаточно добавить выражение

$$(1 + \alpha_{01} + \alpha_{13}) \int_0^\infty dK_4(s) \int_{t-s}^t x^2(t_1)\, dt_1 +$$

$$+ \alpha_{04} \int_0^\infty |dK_1(s)| \int_{t-1}^t x^2(t_1)\, dt_1 + \alpha_{04} \int_0^\infty dK_3(s) \int_{t-s}^t dt_1 \int_{t_1}^t x(t_2)\, dt_2$$

При помощи этого нового функционала может быть установлена

Теорема 4. Пусть выполнены условия (2.2), (2.3) и

$$\alpha_{01} + \alpha_{13} < 1$$

$$\alpha_{03} > [\alpha_{04} + \alpha_{02}{}^{1/2}] \frac{1 + \alpha_{01} + \alpha_{13}}{1 - \alpha_{01} - \alpha_{13}}$$

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \alpha_{14} + \alpha_{23} < \infty$$

Тогда тривиальное решение уравнения (1.1) асимптотически устойчиво.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x^{\cdot}(t) = -r_1 \int_0^\infty x(t-s)\, e^{-s} ds + r_2 x^{\cdot}(t-h) \qquad (t>0) \tag{5.5}$$

где r_1, r_2, $h \geqslant 0$ — некоторые постоянные. По теореме 3 тривиальное решение уравнения (5.5) асимптотически устойчиво, если выполнены условия

$$r_1 > 0, \ |r_2| + r_1 < 1$$

6. Незначительно изменяя построенные при доказательстве теорем 2—4 функционалы (4.2), (5.3), можно получить условия устойчивости тривиальных решений уравнений

$$x^{\cdot}(t) = -\int_0^\infty x(t-s)\, d_s R_0(t, s) + \sum_{n=1}^\infty a_n(t)\, x^{\cdot}(t - h_n(t)) +$$

$$+ \int_0^\infty x^{\cdot}(t-s)\, \lambda(t, s)\, ds + b(t, x(t+\tau)) \tag{6.1}$$

Поскольку при этом получаются очень громоздкие функционалы, ограничимся рассмотрением лишь простейших случаев, из которых, однако, легко понять, какие изменения нужно внести в функционалы (4.2), (5.3), чтобы рассмотреть более общие уравнения вида (6.1). Найдем условия устойчивости тривиального решения уравнения

$$x^{\cdot}(t) = -b(t)\, x(t-h) + c x^{\cdot}(t-h), \quad t > 0 \tag{6.2}$$

Решение уравнения (6.2) при $t > 0$ определяется начальными условиями (2.4), а устойчивость понимается в смысле определения 1. Функция $b(t)$ предполагается непрерывной и неотрицательной. С помощью функционала

$$V[x(t-s)] = \Big[x(t) - cx(t-h) - \int_{t-h}^{t} b(s+h)\,x(s)\,ds\Big]^2 +$$

$$+ |c| \int_{t-h}^{t} b(s+2h)\,x^2(s)\,ds + \int_{t-h}^{t} b(t_1+2h)\,dt_1 \int_{t_1}^{t} b(t_2+h)\,x^2(t_2)\,dt_2$$

аналогично доказательству теоремы 3 нетрудно найти, что тривиальное решение уравнения (6.2) асимптотически устойчиво, если выполнены условия

$$\sup_{t\geqslant 0} \Big\{|c| + \int_{t-h}^{t} b(s+h)\,ds\Big\} < 1$$

$$\sup_{t\geqslant 0} \Big\{-2b(t+h) + |c|\,[b(t+h) + b(t+2h)] +$$

$$+ b(t+h) \int_{t-h}^{t} [b(s+h) + b(s+2h)]\,ds\Big\} < 0$$

Поступила 27 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмановский В. Б., Хасьминский Р. З. Об устойчивости линейных систем с запаздыванием. Изв. вузов, Математика, 1966, № 4.
2. Колмановский В. Б. О применении метода Ляпунова к линейным системам с запаздыванием. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
3. Колмановский В. Б. Об устойчивости стохастических систем с запаздыванием. Проблемы передачи информации, 1969, т. 5, № 4.
4. Мисник А. Ф., Носов В. Р. К вопросу об устойчивости дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. В кн: Сб. научн. работ аспирантов, М., Ун-т дружбы народов им. Патриса Лумумбы. Фак. физ.-матем. и естеств. н. 1968, вып. 1, стр. 43—45.
5. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.
6. Зверкин А. М. Теоремы существования и единственности для уравнений с отклоняющимся аргументом в критическом случае. Тр. сем. по теории дифф. уравнений с отклоняющимся аргументом. М., Ут-ндружбы народов, им. Патриса Лумумбы, 1962, т. 1.