Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О СБЛИЖЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ

Э. Г. Альбрехт

(Свердловск)

Рассматривается игровая задача о сближении квазилинейных объектов при наличии ограничений на мгновенные значения управляющих сил. Показывается, что в регулярных ситуациях экстремальные стратегии доставляют седловую точку рассматриваемой игре. Указывается итеративный способ построения экстремальных стратегий.

§ 1. Постановка задачи. Пусть управляемые объекты описываются дифференциальными уравнениями

$$y^{\boldsymbol{\cdot}} = A^{(1)}(t)\,y + B^{(1)}(t)\,u + \lambda f^{(1)}(y,\,t) \tag{1.1}$$

$$z^{\boldsymbol{\cdot}} = A^{(2)}(t)\,z + B^{(2)}(t)\,v + \lambda f^{(2)}(z,\,t) \tag{1.2}$$

Здесь $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — n-мерный вектор фазовых координат преследующего объекта; $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ — n-мерный вектор фазовых координат преследуемого объекта; $u = \{u_1, \ldots, u_r\}$, $v = \{v_1, \ldots, v_r\}$ — r-мерные вектор-функции, описывающие управляющие воздействия, соответственно преследующего и преследуемого; $A^{(j)}$ и $B^{(j)}$ — непрерывные по t матрицы, соответствующих размерностей; $f^{(1)}(y,\,t)$ и $f^{(2)}(z,\,t)$ — вектор-функции непрерывные по t и дважды непрерывно дифференцируемые функции по y и z при $y \in \Gamma_1$, $z \in \Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — некоторые замкнутые ограниченные области; λ $(\lambda > 0)$ — малый параметр.

Движение объектов рассматривается на заданном отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$, а на управляющие воздействия u и v наложены мгновенные ограничения $u[t] \in U^*$, $v[t] \in V^*$. При этом множества U^* и V^* векторов u и v описываются неравенствами

$$\| u[t] \| \leqslant \mu, \qquad \| v[t] \| \leqslant \nu \qquad (\mu,\, \nu = \mathrm{const}) \tag{1.3}$$

Здесь и везде в дальнейшем символ $\| x \|$ означает евклидову норму вектора x.

В качестве цены игры будем рассматривать величину

$$\gamma[\vartheta] = \| \{y[\vartheta]\}_m - \{z[\vartheta]\}_m \| \tag{1.4}$$

где $\{x\}_m$ — вектор, составленный из m первых компонент вектора x. Величина $\gamma[\vartheta]$ оценивает расстояние между объектами в конечный момент времени ϑ. Задача преследующего — минимизировать величину $\gamma[\vartheta]$, задача преследуемого — максимизировать величину $\gamma[\vartheta]$.

Игровым задачам сближения посвящен ряд работ, например, [1-5]. Целью данной статьи является обоснование экстремальной конструкции [4,5] в случае квазилинейных систем при наличии ограничений (1.3) на управляющие воздействия. В дальнейшем мы будем существенным образом пользоваться определениями и конструкциями из работ [4,5], поэтому часто в ходе изложения будем опускать необходимые пояснения к рассматриваемым построениям и к величинам, фигурирующим в этих построениях.

Будем предполагать, что в каждый момент времени t преследующему и преследуемому известны реализовавшиеся значения $y\,[t]$ и $z\,[t]$ и управляющие воздействия формируются по принципу обратной связи, т. е. реализующиеся значения $u\,[t]$ и $v\,[t]$ в каждый текущий момент времени t формируются на основании информации о величинах $y\,[t]$ и $z\,[t]$.

Стратегии U (или V) игроков мы определим как совокупность складывающихся из r-мерных векторов u (или v) множеств $U^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$ (или $V^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$), сопоставляемых каждой возможной позиции $\{t,\, y,\, z\}$. При этом реализации $u\,[t]$ (или $v[t]$) удовлетворяют требованиям:

а) при каждом t должно выполняться включение

$$u\,[t] \in U^*\,([t,\, y\,[t],\, z\,[t],\, \lambda) \text{ (или } v\,[t] \in V^*\,(t,\, y\,[t],\, z\,[t],\, \lambda)) \qquad (1.5)$$

б) функция $u\,[t]$ (или $v\,[t]$) должна быть интегрируемой на отрезке времени $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Стратегию U, заданную множествами $U^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$ (стратегию V, заданную множествами $V^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$), будем называть допустимой, если совокупность этих множеств будет удовлетворять условиям:

1) выполняются включения

$$U^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda) \subset U^* \;(V^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda) \subset V^*)$$

2) множества $U^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$ ($V^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$) замкнуты и выпуклы;

3) множества $U^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$ ($V^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$) при $\lambda \leqslant \lambda_0$ (λ_0 достаточно мало) полунепрерывны сверху по включению при изменении t, y и z в окрестности каждой возможной позиции.

Пусть первый и второй игроки избрали некоторые допустимые стратегии U и V. Назовем решением уравнений (1.1) и (1.2) при управлениях $u \in U^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$, $v \in V^*\,(t,\, y,\, z,\, \lambda)$ (на отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$) всякие абсолютно непрерывные вектор-функции $y\,[t]$ и $z\,[t]$, которые почти при всех значениях $t \in [t_1,\, t_2]$ удовлетворяют равенствам

$$\begin{aligned} y^{\cdot}\,[t] &= A^{(1)}\,(t)y\,[t] + B^{(1)}\,(t)u\,[t] + \lambda f^{(1)}\,(y\,[t],\;\; t) \\ z^{\cdot}\,[\,t] &= A^{(2)}\,(t)z\,[t] + B^{(2)}\,(t)v\,[t] + \lambda f^{(2)}\,(z\,[t],\;\; t) \end{aligned}$$

причем вектор-функции $u\,[t]$ и $v\,[t]$ удовлетворяют условию (1.5). Данные решения $y\,[t]$ и $z\,[t]$ будем называть движениями систем (1.1), (1.2), порождаемыми стратегиями U и V.

Пусть $(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, u, v)$— реализация величины $\gamma[\vartheta]$ (1.4), отвечающая исходной позиции t_0, $y_0 \in \Gamma_1^\circ \subset \Gamma_1$, $z_0 \in \Gamma_2^\circ \subset \Gamma_2$ при управлениях u и v.

Задача 1.1. Среди допустимых стратегий U требуется найти оптимальную стратегию U°, которая обеспечивает неравенство

$$(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, U^\circ, v) \leqslant \min_{U} \sup_{v[t]} \inf_{y[t]} (\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, U, v)$$

какова бы ни была исходная позиция t_0, y_0, z_0 $(y_0 \in \Gamma_1^\circ, z_0 \in \Gamma_2^\circ, 0 \leqslant \leqslant t_0 < \vartheta)$.

Задача 1.2. Среди допустимых стратегий V требуется найти оптимальную стратегию V°, которая обеспечивает неравенство

$$(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, u, V^\circ) \geqslant \max_{V} \inf_{u[t]} \sup_{z[t]} (\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, u, V)$$

какова бы ни была исходная позиция t_0, y_0, z_0 $(y_0 \in \overset{\circ}{\Gamma}_1, z_0 \in \overset{\circ}{\Gamma}_2, 0 \leqslant \leqslant t_0 < \vartheta)$.

§ 2. **Вспомогательное утверждение**. Рассмотрим управляемую систему

$$dx/d\tau = A(\tau)x + B(\tau)w + \lambda f(x, \tau) \tag{2.1}$$

Пусть на управление $w(\tau)$ $(t \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ наложено ограничение

$$\| w(\tau) \| \leqslant \zeta \qquad (\zeta = \text{const}) \tag{2.2}$$

Зададимся произвольным единичным m-мерным вектором l $(\|l\| = 1)$ и обозначим через $x(\tau; w)$ $(t \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ движение системы (2.1), порождаемое некоторым управлением $w(\tau)$ $(t \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$, стесненным неравенством (2.2), при начальном условии $\tau = t$, $x(t; w) = x$.

Рассмотрим теперь задачу построения управления $w^\circ(\tau)$ $(t \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$, удовлетворяющего условию

$$\rho[l, t, x, \lambda] = \max_{\|w\| \leqslant \xi} l' \{x(\vartheta; w)\}_m = l' \{x^\circ(\vartheta; w^\circ)\}_m \tag{2.3}$$

Пусть

$$d\delta x/d\tau = A^\circ(\tau;\ l,\ t,\ x,\ \lambda)\, \delta x \tag{2.4}$$

система уравнений в вариациях, составленная для системы (2.1) вдоль движения $x^\circ(\tau; w^\circ)$. Здесь матрица A° задается равенством $A^\circ = A + A^{(0)}$, причем элементы $a_{ij}^{(0)}$ матрицы $A^{(0)}$ определяются соотношениями

$$a_{ij}^{(0)}(\tau; l, t, x, \lambda) = \lambda \partial f_i(x^\circ(\tau; w^\circ), \tau) / \partial x_j$$

Обозначим через $X[\vartheta, \tau;\ l, t, x, \lambda]$ фундаментальную матрицу системы (2.4) $(X[\tau, \tau;\ l, t, x, \lambda] = E)$. Пусть выполнены условия:

2.1. Любое движение системы первого приближения

$$dx/d\tau = A(\tau)x + B(\tau)w \tag{2.5}$$

порождаемое управлением $w(\tau)$ $(\|w(\tau)\| \leqslant \zeta,\ t \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$ при начальном условии $\tau = t$, $x(t) = x$ целиком содержится в области определения функции $f(x, \tau)$.

2.2. Пусть $X^{(0)}[\tau, t]$ — фундаментальная матрица системы (2.5) при $w \equiv 0$. Рассмотрим величину

$$\zeta(\tau) = \|l' \{X^{(0)}[\vartheta, \tau] B(\tau)\}_m\| \tag{2.6}$$

Каков бы ни был единичный вектор l ($\|l\| = 1$), функция $\zeta(\tau)$ (2.6) может обращаться в нуль лишь в конечном числе точек τ_j ($j = 1, \ldots, k$) из отрезка $[t, \vartheta]$, причем

$$|[d\xi(\tau)/d\tau]_{\tau=\tau_j}| \geqslant k_1 > 0 \qquad (k_1 = \text{const})$$

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия 2.1, 2.2. Тогда при $\lambda \leqslant \lambda_0$ (λ_0 — достаточно мало) движение $x^\circ(\tau; w^\circ) = x^\circ(\tau; l, t, x, \lambda)$ системы (2.1), удовлетворяющее условию (2.3), порождается управлением $w^\circ(\tau) = w^\circ(\tau; l, t, x, \lambda)$, которое находится из условия максимума

$$\int_t^\vartheta l'\{X[\vartheta, \tau; l, t, x, \lambda] B(\tau)\}_m w^\circ(\tau)\, d\tau =$$
$$= \max_{\|w\| \leqslant \zeta} \int_t^\vartheta l'\{X[\vartheta, \tau; l, t, x, \lambda] B(\tau)\}_m w(\tau)\, d\tau \tag{2.7}$$

Для доказательства теоремы воспользуемся следующим итеративным процессом. Вычислим сначала движение $x^{(0)}(\tau; w)$ системы (2.1) при $\lambda = 0$ и $w = w(\tau)$, удовлетворяющем условию (2.2). При $\tau = \vartheta$ получим

$$x^{(0)}(\vartheta; w) = X^{(0)}[\vartheta, t]\, x + \int_t^\vartheta X^{(0)}[\vartheta, \tau] B(\tau) w(\tau)\, d\tau$$

Положим

$$\rho^{(0)}[l, t, x] = \max_{\|w\| \leqslant \zeta} l'\{x^{(0)}(\vartheta; w)\}_m =$$
$$= l'\{X^{(0)}[\vartheta, t]\, x\}_m + \max_{\|w\| \leqslant \zeta} \int_t^\vartheta l'\{X^{(0)}[\vartheta, \tau] B(\tau)\}_m w(\tau)\, d\tau \tag{2.8}$$

Пусть $w^{(0)}(\tau; l, t, x)$ — управление, доставляющее максимум второму слагаемому в (2.8) и $x^{(0)}(\tau; l, t, x, \lambda)$ — движение системы (2.1) при $w = w^{(0)}(\tau; l, t, x)$ и начальном условии $\tau = t$, $x^{(0)}(t; l, t, x, \lambda) = x$. Составим вдоль дижения $x^{(0)}(\tau; l, t, x, \lambda)$ для системы (2.1) уравнения в вариациях

$$\frac{d\delta x^{(1)}}{d\tau} = A^{(1)}(\tau: l, t, x, \lambda)\, \delta x^{(1)} + B(\tau) \delta w \tag{2.9}$$

и обозначим через $X^{(1)}[\vartheta, \tau; l, t, x, \lambda]$ фундаментальную матрицу системы (2.9) при $\delta w \equiv 0$. Тогда

$$x^{(1)}(\tau; l, t, x, \lambda) = x^{(0)}(\tau; l, t, x, \lambda) - \tag{2.10}$$
$$- \int_t^\tau X^{(1)}[\tau, \xi; l, t, x, \lambda] B(\xi) w^{(0)}(\xi; l, t, x)\, d\xi +$$
$$+ \int_t^\tau X^{(1)}[\tau, \xi; l, t, x, \lambda] B(\xi) (w^{(0)}(\xi; l, t, x) + \delta w(\xi))\, d\xi$$

$$\rho^{(1)}[l, t, x, \lambda] = l'\{x^{(0)}(\vartheta; l, t, x, \lambda)\}_m -$$
$$- \int_t^\vartheta l'\{X^{(1)}[\vartheta, \tau; l, t, x, \lambda] B(\tau)\}_m w^\circ(\tau; l, t, x)\, d\tau +$$
$$+ \max_{\|w\| \leqslant \zeta} \int_t^\vartheta l'\{X^{(1)}[\vartheta, \tau; l, t, x, \lambda] B(\tau)\}_m w(\tau)\, d\tau$$

Пусть максимум последнему слагаемому в (2.10) доставляет управление $w^{(1)}$ $(\tau;\ l,\ t,\ x,\ \lambda)$. Продолжая этот процесс дальше, мы получим последовательность управлений $w^{(k)}(\tau;\ l,\ t,\ x,\ \lambda)$ и соответствующую им последовательность движений $x^{(k)}(\tau;\ l,\ t,\ x,\ \lambda)$ системы (2.1). При выполнении условий 2.1, 2.2 и при $\lambda \leqslant \lambda_0$ последовательность $w^{(k)}$ сходится по мере к управлению $w^\circ(\tau;\ l,\ t,\ x,\ \lambda)$ $(\|w^\circ\| \leqslant \zeta)$, удовлетворяющему условию максимума (2.7), а соответствующая последовательность движений $x^{(k)}$ равномерно сходится к движению $x^\circ(\tau;\ l,\ t,\ x,\ \lambda)$ системы (2.1), порождаемому управлением $w^\circ(\tau;\ l,\ t,\ x,\ \lambda)$ [6,7].

Рассмотрим теперь в m-мерном пространстве $\{q\}$ точек $q = \{x\}_m$ область достижимости $G(\vartheta,\ t,\ x,\ \lambda)$ системы (2.1) из состояния $x(t) = x$ к моменту $\tau = \vartheta$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь такие случаи, когда при всех $\lambda \leqslant \lambda_0$ область достижимости $G(\vartheta,\ t,\ x,\ \lambda)$ является выпуклой. В таких случаях величина $\rho[l,\ t,\ x,\ \lambda]$ (2.3) по определению описывает опорную функцию выпуклого множества $G(\vartheta,\ t,\ x,\ \lambda)$ и, следовательно, справедливо следующее утверждение

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия 2.1, 2.2, и пусть при $\lambda \leqslant \lambda_0$ область достижимости $G(\vartheta,\ t,\ x,\ \lambda)$ системы (2.1) из состояния $x(t) = x$ к моменту $\tau = \vartheta$ является выпуклой. Тогда область $G(\vartheta,\ t,\ x,\ \lambda)$ при $\lambda \leqslant \lambda_0$ можно описать следующим образом: это множество точек q в m-мерном пространстве $\{q\}$, для которых выполняется неравенство

$$\rho[l,\ t,\ x,\ \lambda] - l'q \geqslant 0 \tag{2.11}$$

каков бы ни был единичный вектор l $(\|l\| = 1)$. При этом величина $\rho[l,\ t,\ x,\ \lambda]$, стоящая в левой части неравенства (2.11), находится из условия (2.3).

§ 3. Регулярный случай.

Пусть в некоторый момент времени t реализовалась позиция $y[t] = y$, $z[t] = z$. Рассмотрим в m-мерном пространстве $\{q\}$ точек $q = \{y\}_m$ и $q = \{z\}_m$ области достижимости $G^{(1)}(\vartheta,\ t,\ y,\ \lambda)$ и $G^{(2)}(\vartheta,\ t,\ z,\ \lambda)$ для движений $y(\tau)$ (1.1) и $z(\tau)$ (1.2) из состояний $y(t) = y$, $z(t) = z$ к моменту $\tau = \vartheta$ и при ограничениях (1.3). Символом $G_\varepsilon^{(1)}(\vartheta,\ t,\ y,\ \lambda)$ обозначим замкнутую евклидову ε — окрестность области $G^{(1)}(\vartheta,\ t,\ y,\ \lambda)$. Пусть $\varepsilon^\circ(t,\ y,\ z,\ \lambda)$ — наименьшее значение $\varepsilon \geqslant 0$, при котором

$$G^{(2)}(\vartheta,\ t,\ z,\ \lambda) \subset G_\varepsilon^{(1)}(\vartheta,\ t,\ y,\ \lambda) \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что выполнены следующие условия.

Условие 3.1. Движения систем (1.1) и (1.2) при $\lambda = 0$, порождаемые всевозможными управлениями, стесненными ограничениями (1.3), при начальных условиях $y_0 \in \Gamma_1^\circ$, $z_0 \in \Gamma_2^\circ$ целиком содержатся в областях Γ_1 и Γ_2.

Пусть $Y^{(0)}[\vartheta,\ \tau]$ и $Z^{(0)}[\vartheta,\ \tau]$ — фундаментальные матрицы уравнений (1.1) и (1.2) при $\lambda = 0$, $u \equiv 0$, $v \equiv 0$.

Положим

$$\xi_1(\tau) = \|\, l' \{Y^{(0)}[\vartheta,\ \tau] B^{(1)}(\tau)\}_m \|$$

$$\xi_2(\tau) = \|\, l' \{Z^{(0)}[\vartheta,\ \tau] B^{(2)}(\tau)\}_m \| \tag{3.2}$$

Условие 3.2. Каков бы ни был единичный вектор l $(\|l\| = 1)$, функции $\xi_1(\tau)$, $\xi_2(\tau)$ (3.2) могут обращаться в нуль лишь в конечном числе точек

$\tau_j^{(1)}$ и $\tau_j^{(2)}$ из отрезка $[t, \vartheta]$, причем

$$|[d\xi_1(\tau)/d\tau]_{\tau=\tau_j^{(1)}}| \geqslant k_1 > 0, \quad |[d\xi_2(\tau)/d\tau]_{\tau=\tau_j^{(2)}}| \geqslant k_2 > 0$$

$$(k_1, k_2 = \text{const})$$

Условие 3.3. Области достижимости $G^{(1)}(\vartheta, t, y, \lambda)$ и $G^{(2)}(\vartheta, t, z, \lambda)$ при $\lambda \leqslant \lambda_0$ являются выпуклыми.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия 3.1—3.3. Тогда при $\lambda \leqslant \lambda_0$ наименьшее значение $\varepsilon \geqslant 0$, при котором справедливо вложение (3.1), находится из соотношения

$$\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) = \max_{\|l\|=1}\{\rho^{(2)}[l, t, z, \lambda] - \rho^{(1)}[l, t, y, \lambda]\} \tag{3.3}$$

где $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ — опорные функции, построенные соответственно для преследующего и преследуемого объектов, т. е.

$$\rho^{(1)} = \max_{\|u\|\leqslant\mu} l'\{y(\vartheta; u)\}_m = l'\{y^\circ(\vartheta; l, t, y, \lambda)\}_m \tag{3.4}$$

$$\rho^{(2)} = \max_{\|v\|\leqslant\nu} l'\{z(\vartheta; v)\}_m = l'\{z^\circ(\vartheta; l, t, z, \lambda)\}_m \tag{3.5}$$

Действительно, из условий 3.1 — 3.3 и теоремы 2.2 вытекает, что области $G_\varepsilon^{(1)}(\vartheta, t, y, \lambda)$ и $G^{(2)}(\vartheta, t, z, \lambda)$ можно трактовать так: это множества точек q в m-мерном пространстве $\{q\}$, для которых справедливы соответственно неравенства

$$\varepsilon + \rho^{(1)}[l, t, y, \lambda] - l'q \geqslant 0, \rho^{(2)}[l, t, z, \lambda] - l'q \geqslant 0 \tag{3.6}$$

каков бы ни был единичный вектор l ($\| l \| = 1$).

Вложение (3.1) справедливо тогда и только тогда, когда для каждой точки q, которая при всех l ($\| l \| = 1$) удовлетворяет первому неравенству (3.6), также при всех таких l выполняется и второе неравенство (3.6). А для этого необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\varepsilon + \rho^{(1)}[l, t, y, \lambda] - \rho^{(2)}.[l, t, z, \lambda] \geqslant 0 \tag{3.7}$$

каков бы ни был единичный вектор l.

В самом деле, возьмем произвольную точку q из $G^{(2)}$. Для этой точки при всех l выполняется второе неравенство (3.6), но тогда эта точка q и подавно будет удовлетворять первому неравенству (3.6) при всех l, т. е. $q \in G_\varepsilon^{(1)}$.

Проверим теперь необходимость условия (3.7). Для этого предположим от противного, что при некотором $l = l^*$

$$\varepsilon + \rho^{(1)}[l^*, t, y, \lambda] - \rho^{(2)}[l^*, t, z, \lambda] < 0 \tag{3.8}$$

Выберем точку $q = q^*$, лежащую на границе области $G^{(2)}$, для которой справедливо равенство

$$\rho^{(2)}[l^*, \; t, \; z, \; \lambda] - l^{*\prime} q = 0 \tag{3.9}$$

В силу теоремы 2.1 такая точка $q^* \in G^{(2)}$ обязательно найдется. Но точка q^* в $G_\varepsilon^{(1)}$ лежать не может, ибо из (3.9) и (3.8) следует

$$\varepsilon + \rho^{(1)} [l^*, \; t, \; y, \; \lambda] - l^{*\prime} q < 0 \tag{3.10}$$

и полученное неравенство противоречит (3.6). Следовательно, неравенство (3.8) невозможно ни при каком l ($\| l \| = 1$).

Таким образом, неравенство (3.7) есть необходимое и достаточное условие для того, чтобы выполнялось вложение (3.1). Завершая доказательство леммы 3.1, отметим, наконец, что равенство (3.3) непосредственно вытекает из (3.7).

В этом параграфе рассматривается регулярный случай [4,5], т.е. случай, когда для всех тех позиций $\{t, y, z\}$, для которых $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) > 0$ максимум в правой части (3.3) достигается на единственном векторе $l^\circ = l^\circ(t, y, z, \lambda)$.

В регулярном случае экстремальными назовем те стратегии U_e и V_e, которые определяются множествами $U_e^*(t, y, z, \lambda)$ и $V_e^*(t, y, z, \lambda)$ вида [4,5].

Определение 3.1. Если $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) > 0$, то множества $U_e^*(t, y, z, \lambda)$ и $V_e^*(t, y, z, \lambda)$ складываются из всех тех векторов u_e и v_e, которые удовлетворяют условиям

$$l^{\circ\prime} \{Y[\vartheta, t; l^\circ, t, y, \lambda] B^{(1)}(t)\}_m u_e = \max_{u \in U^*} l^{\circ\prime} \{Y[\vartheta, t; l^\circ, t, y, \lambda] B^{(1)}(t)\}_m u \tag{3.11}$$

$$l^{\circ\prime} \{Z[\vartheta, t; l^\circ, t, z, \lambda] B^{(2)}(t)\}_m v_e = \max_{v \in V^*} l^{\circ\prime} \{Z[\vartheta, t; l^\circ, t, z, \lambda] B^{(2)}(t)\}_m v \tag{3.12}$$

где Y и Z — фундаментальные матрицы систем уравнений в вариациях

$$d\delta y/d\tau = A^{(1)\circ}(\tau; \; l, \; t, \; y, \; \lambda)\delta y, \quad d\delta z/d\tau = A^{(2)\circ}(\tau; \; l, \; t, \; z, \; \lambda)\delta z$$

составленных для уравнений (1.1) и (1.2) соответственно вдоль движений $y^\circ(\tau; \; l, t, y, \lambda)$ и $z^\circ(\tau; l, t, z, \lambda)$, удовлетворяющих равенствам (3.4) и (3.5).

Определение 3.2. Если $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) = 0$, то

$$U_e^*(t, y, z, \lambda) = U^*, \qquad V_e^*(t, y, z, \lambda) = V^*$$

Отметим, здесь, что из (3.11) и (3.12) вытекает следующее:

а) в те моменты t, когда $\| l^{\circ\prime} \{YB^{(1)}\}_m \| \neq 0$ и $\| l^{\circ\prime} \{ZB^{(2)}\}_m \| \neq 0$ множества $U_e^*(t, y, z, \lambda)$ и $V_e^*(t, y, z, \lambda)$ состоят из одной единственной точки $u_e[t]$ и $v_e[t]$, при этом

$$u_e[t] = \mu \frac{(l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta, t; l^\circ, t, y, \lambda] B^{(1)}(t)\}_m)'}{\| l^{\circ\prime}\{Y[\vartheta, t; l^\circ, t, y, \lambda] B^{(1)}(t)\}_m \|}$$

$$v_e[t] = \nu \frac{(l^{\circ\prime}\{Z[\vartheta, t; l^\circ, t, z, \lambda] B^{(2)}(t)\}_m)'}{\| l^{\circ\prime}\{Z[\vartheta, t; l^\circ, t, z, \lambda] B^{(2)}(t)\}_m \|}$$

в) в те моменты времени, когда

$$\| l^{\circ\prime}\{YB^{(1)}\}_m \| = 0, \qquad \| l^{\circ\prime}\{ZB^{(2)}\}_m \| = 0$$

будем полагать, что

$$U_e^*(t, y, z, \lambda) = U^*, \qquad V_e(t, y, z, \lambda) = V^*$$

В регулярном случае экстремальные стратегии являются допустимыми [4,5,9] и справедливы следующие утверждения:

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия 3.1—3.3 и пусть имеет место регулярный случай, тогда экстремальная стратегия U_e при $\lambda \leqslant \lambda_0$ является оптимальной стратегией, которая разрешает задачу 1.1. При этом

$$(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, U_e, v) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0, \lambda)$$

какова бы ни была исходная позиция $y_0 \in \Gamma_1^\circ$ и $z_0 \in \Gamma_2^\circ$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация $v[t]$ управления v.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия 3.1—3.3 и пусть имеет место регулярный случай, тогда экстремальная стратегия V_e при $\lambda \leqslant \lambda_0$ является оптимальной стратегией, которая разрешает задачу 1.2. При этом

$$(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, u, V_e) \geqslant \varepsilon^\circ(t_0, y_0, z_0, \lambda)$$

какова бы ни была исходная позиция $y_0 \in \Gamma_1^\circ$ и $z_0 \in \Gamma_2^\circ$ и какой бы ни оказалась допустимая реализация $u[t]$ управления u.

Для доказательства теорем 3.1 и 3.2 необходимо исследовать поведение производной $d\varepsilon^\circ[t] / dt$ функции $\varepsilon^\circ[t] = \varepsilon^\circ(t, y[t], z[t], \lambda)$ при $\varepsilon^\circ[t] > 0$, $t < \vartheta$ вдоль движений $y[t]$ (1.1) и $z[t]$ (1.2), порождаемых стратегиями U_e, V (или U, V_e).

Для вычисления производной $d\varepsilon^\circ[t] / dt$ абсолютно непрерывной функции $\varepsilon^\circ[t]$ воспользуемся следующими соображениями [8]. В регулярном случае в области $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) > 0$ $t_0 \leqslant t < \vartheta$, $\lambda \leqslant \lambda_0$ вектор $l^\circ(t, y, z, \lambda)$, доставляющий максимум правой части равенства (3.3), непрерывно зависит от t, y, z, λ. Из непрерывности вектора l° вытекает [8] (стр. 2161—2162), что в области $\varepsilon^\circ > 0$, $t_0 \leqslant t < \vartheta$, $\lambda \leqslant \lambda_0$ существуют производные

$$\frac{\partial \varepsilon^\circ}{\partial t} = \frac{\partial \rho^{(2)}[l^\circ, t, z, \lambda]}{\partial t} - \frac{\partial \rho^{(1)}[l^\circ, t, y, \lambda]}{\partial t} \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial \varepsilon^\circ}{\partial y_i} = -\frac{\partial \rho^{(1)}[l^\circ, t, y, \lambda]}{\partial y_i}, \qquad \frac{\partial \varepsilon^\circ}{\partial z_i} = \frac{\partial \rho^{(2)}[l^\circ, t, z, \lambda]}{\partial z_i}$$

При этом, поскольку вектор l° доставляет максимум правой части (3.3), при вычислении производных (3.13) зависимость вектора l° от t, y, z игнорируется. Пользуясь далее правилами дифференцирования решений

y° (τ; l°, t, y, λ) (3.4) и z° (τ; l°, t, z, λ) (3.5) по начальным данным и по параметру [10], можно показать, что при почти всех t

$$\frac{d\varepsilon^\circ[t]}{dt} = \frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial y_i} \frac{dy_i[t]}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varepsilon^\circ}{\partial z_i} \frac{\partial z_i[t]}{dt} =$$

$$= \max_{u \in U^*} l^{\circ\prime} \{Y[\vartheta, t; l^\circ, t, y, \lambda] B^{(1)}(t)\}_m u -$$

$$- l^{\circ\prime} \{Y[\vartheta, t; l^\circ, t, y, \lambda] B^{(1)}(t)\}_m u[t] - \max_{v \in V} l^{\circ\prime} \{Z[\vartheta, t; l^\circ, t, z, \lambda] B^{(2)}(t)\}_m v +$$

$$+ l^{\circ\prime} \{Z[\vartheta, t; l^\circ, t, z, \lambda] B^{(2)}(t)\}_m v[t] \tag{3.14}$$

Из (3.14) вытекает, что $d\varepsilon^\circ[t]/dt \leqslant 0$ при $\varepsilon^\circ[t] > 0$ почти для всех t, если преследующий придерживается экстремальной стратегии U_e, а преследуемый придерживается произвольной допустимой стратегии V. Если же наоборот, преследуемый придерживается экстремальной стратегии V_e, а преследующий отклоняется от экстремальной стратегии U_e, то $d\varepsilon^\circ[t]/dt \geqslant 0$ при $\varepsilon^\circ[t] > 0$ почти для всех t. Отсюда и вытекает справедливость теорем 3.1 и 3.2.

Из теорем 3.1 и 3.2 следует, что в регулярном случае игровая задача о сближении квазилинейных объектов имеет седловую точку.

Теорема 3.3. Пусть выполнены условия 3.1 — 3.3 и пусть имеет место регулярный случай, тогда при $\lambda \leqslant \lambda_0$ экстремальные стратегии U_e и V_e доставляют седловую точку игре на сближение, т. е.

$$(\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, U_e, v) \leqslant (\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, U_e, V_e) \leqslant (\gamma[\vartheta] \mid t_0, y_0, z_0, u, V_e)$$

какова бы ни была исходная позиция $y_0 \in \Gamma_1^\circ$ и $z_0 \in \Gamma_2^\circ$.

§ 4. Пример. Пусть поведение преследующего и преследуемого описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot y_1 = y_2, && \dot y_2 = \lambda y_2^2 + u_1, && \dot y_3 = y_4, && \dot y_4 = u_2, && u_1^2[t] + u_2^2[t] \leqslant \mu^2 \\ &\dot z_1 = z_2, && \dot z_2 = \lambda z_2^2 + v_1, && \dot z_3 = z_4, && \dot z_4 = v_2, && v_1^2[t] + v_2^2[t] \leqslant \nu^2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

и пусть

$$\gamma[\vartheta] = [(y_1(\vartheta) - z_1(\vartheta))^2 + (y_3(\vartheta) - z_3(\vartheta))^2]^{1/2}$$

Легко проверить, что для уравнений (4.1) выполнены условия 3.1—3.3. Произведя необходимые вычисления в соответствии с материалом из § 2, найдем, что опорные функции $\rho^{(1)}$ и $\rho^{(2)}$ описываются равенствами

$$\rho^{(1)} = {}^1/_2\,\mu\,(\vartheta - t)^2 + l_1(y_1 + (\vartheta - t)y_2) + l_3(y_3 + (\vartheta - t)y_4) + {}^1/_6\,\lambda\, l_1 (\vartheta - t)^2 \{3y_2^2 + 2\mu y_2(l_1 - l_3^2)(\vartheta - t) - \mu^2(\vartheta - t)^2 l_1({}^5/_2 l_1 + l_3^2)\} + \ldots$$

$$\rho^{(2)} = {}^1/_2\,\nu\,(\vartheta - t)^2 + l_1(z_1 + (\vartheta - t)z_2) + l_3(z_3 + (\vartheta - t)z_4) + {}^1/_6\lambda l_1(\vartheta - t)^2 \{3z_2^2 + 2\nu z_2(l_1 - l_3^2)(\vartheta - t) - \nu^2(\vartheta - t)^2 l_1({}^5/_2 l_1 + l_3^2)\} + \ldots$$

Введем обозначения: $x_i = y_i - z_i$, $\zeta = \mu - \nu$. Тогда

$$\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) = \max_D \{- l_1(x_1 + (\vartheta - t)x_2) - l_3(x_3 + (\vartheta - t)x_4) - {}^1/_2\,\zeta(\vartheta - t)^2 + \lambda \cdot {}^1/_6\, l_1(\vartheta - t)^2 [3z_2^2 - 3y_2^2 + 2(\nu z_2 - \mu y_2)(l_1 - l_3^2)(\vartheta - t) - l_1(\vartheta - t)^2(\mu^2 - \nu^2)({}^5/_2 l_1 + l_3^2)] + \ldots\} \quad (D \equiv l_1^2 + l_3^2 = 1) \tag{4.2}$$

При $\lambda \leqslant \lambda_0$ области достижимости объектов (4.1) будут выпуклыми и будут близки к кругам, поэтому для тех позиций, где $\varepsilon^\circ > 0$, максимум в правой части равенства (4.2) достигается на единственном векторе l° и, следовательно, имеет место регулярный случай. При этом

$$l_1^\circ = l_1^{(0)} + \lambda l_1^{(1)} + \ldots, \qquad l_3^\circ = l_3^{(0)} + \lambda l_3^{(1)} + \ldots$$

$$l_1^{(0)} = -\frac{x_1 + (\vartheta - t)\, x_2}{[(x_1 + (\vartheta - t)\, x_2)^2 + (x_3 + (\vartheta - t)\, x_4)^2]^{1/2}}$$

$$l_3^{(0)} = -\frac{x_3 + (\vartheta - t)\, x_4}{[(x_1 + (\vartheta - t)\, x_2)^2 + (x_3 + (\vartheta - t)\, x_4)^2]^{1/2}}$$

$$l_1^{(1)} = \frac{l_3^{(0)}\,(l_3^{(0)} N_1 - l_1^{(0)} N_2)}{[(x_1 + (\vartheta - t)\, x_2)^2 + (x_3 + (\vartheta - t)\, x_4)^2]^{1/2}}$$

$$l_3^{(1)} = \frac{l_1^{(0)}\,(l_1^{(0)} N_2 - l_3^{(0)} N_1)}{[(x_1 + (\vartheta - t)\, x_2)^2 + (x_3 + (\vartheta - t)\, x_4)^2]^{1/2}}$$

$$N_1 = {}^1/_6\, (\vartheta - t)^2\, [3\,(z_2^2 - y_2^2) + 2\,(\nu z_2 - \mu y_2)\,(\vartheta - t)\,(2 l_1^{(0)} - $$
$$- (l_3^{(0)})^2) + {}^{15}/_2\,(\mu^2 - \nu^2)\,(l_1^{(0)})^2\,(\vartheta - t)^2 + 2\,(\mu^2 - \nu^2)\, l_1^{(0)}\,(l_3^{(0)})^2\,(\vartheta - t)^2]$$

$$N_2 = {}^1/_3\, (\vartheta - t)^3\, [-2 l_3^{(0)}\,(\nu z_2 - \mu y_2) + (\mu^2 - \nu^2)\, l_1^{(0)} l_3^{(0)}\,(\vartheta - t)]$$

Экстремальные стратегии U_e и V_e описываются следующим образом:

1) если $\varepsilon^\circ\,(t, y, z, \lambda) > 0$, то множества $U_e^*\,(t, y, z, \lambda)$ и $V_e^*\,(t, y, z, \lambda)$ состоят из единственной точки $u_e\,[t]$ и $v_e\,[t]$, причем

$$u_{e1}\,[t] = \mu\,[l_1^{(0)} + \lambda l_1^{(1)} + \ldots], \qquad v_{e1}\,[t] = \nu\,[l_1^{(0)} + \lambda l_1^{(1)} + \ldots]$$

$$u_{e2}\,[t] = \mu\,\{l_3^{(0)} + \lambda\,[l_3^{(1)} - l_1^{(0)} l_3^{(0)}\,((\vartheta - t)\, y_2 + {}^1/_3 \mu l_1^{(0)}\,(\vartheta - t)^2)] + \ldots\}$$

$$v_{e2}\,[t] = \nu\,\{l_3^{(0)} + \lambda\,[l_3^{(1)} - l_1^{(0)} l_3^{(0)}\,((\vartheta - t)\, z_2 + {}^1/_3 \nu l_1^{(0)}\,(\vartheta - t)^2)] + \ldots\}$$

2) если $\varepsilon^\circ\,(t, y, z, \lambda) = 0$, то

$$U_e^*\,(t, y, z, \lambda) = U^*, \qquad V_e^*\,(t, y, z, \lambda) = V^*$$

Автор благодарит Н. Н. Красовского за обсуждение работы и ценные советы.

Поступила 27 III 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. Петросян Л. А. Динамическая игра преследования при наличии сил трения. Докл. АрмССР, 1967, т. 44, № 1.
3. Гноенский Л. С. К задаче преследования. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.
4. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения. Дифф. уравнения, 1969, т. 5, № 3.
5. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука»,1970.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
7. Альбрехт Э. Г. Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем. Дифф. уравнения, 1969, т. 5, № 3.
8. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Об оптимальных стратегиях в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
9. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.