О ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЗАРЯДА

Ю. А. Буевич
(Москва)

Записано решение уравнений тяготения для произвольной сферически-симметричной системы тел и электрических зарядов, определяющее гравитационное и электромагнитное поля вне этой системы. В рамках классической полевой теории устранены трудности, связанные с неинвариантностью энергии - импульса элементарного заряда относительно преобразований группы Лоренца и расходимостью энергии порождаемого им поля. Показано, что вся масса заряда имеет чисто полевое происхождение, а сам заряд можно интерпретировать как определенную особенность метрики пространства-времени.

1. Гравитационное поле сферически-симметричной заряженной системы описывается известным решением Райснера — Нордстрема. Здесь запишем такое решение в виде, удобном для дальнейшего. Вводя сферические пространственные координаты r, θ, φ, представим квадрат интервала в четырехмерном пространстве-времени в форме

$$ds^2 = e^\nu (dx^\circ)^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \tag{1.1}$$

где $x^\circ = ct$, c — скорость света, а ν и λ — некоторые функции t, r.

Соответствующие ко- и контравариантные компоненты метрического тензора запишутся в виде

$$g_{11} = e^\lambda, \quad g_{22} = r^2, \quad g_{33} = r^2 \sin^2\theta, \quad g_{00} = -e^\nu$$

$$g^{11} = e^{-\lambda}, \quad g^{22} = r^{-2}, \quad g^{33} = r^{-2} \sin^{-2}\theta, \quad g^{00} = -e^{-\nu} \tag{1.2}$$

Тензор свободного электромагнитного поля при наличии сферической симметрии имеет лишь две отличные от нуля компоненты

$$F_{10} = -F_{01} = E$$

где E — напряженность электростатического поля. Отсюда получим, что отличны от нуля лишь следующие компоненты тензора энергии-импульса:

$$T_0{}^0 = T_1{}^1 = -\frac{1}{8\pi} e^{-\nu-\lambda} E^2, \quad T_2{}^2 = T_3{}^3 = \frac{1}{8\pi} e^{-\nu-\lambda} E^2 \tag{1.3}$$

Согласно решению Райснера — Нордстрема, величины ν, λ и напряженность электростатического поля E, входящие в соотношения (1.1)—(1.3), представляются в виде

$$e^\nu = 1 - \frac{2\beta}{r} + \frac{\alpha}{r^2}, \quad \lambda = -\nu, \quad \beta = \frac{km}{c^2}, \quad \alpha = \frac{ke^2}{c^4} \tag{1.4}$$

$$E^2 = \frac{\alpha c^4}{kr^4}, \quad E = \pm \left(\frac{\alpha}{k}\right)^{1/2} \frac{c^2}{r^2}$$

Здесь m — полная масса, а e — полный электрический заряд, который может быть как положительным, так и отрицательным. Величина k в (1.4) представляет собой гравитационную постоянную.

Из (1.4) следует, что метрика будет галилеевой не только на бесконечном удалении от системы тел и зарядов, порождающих поле, но и при $r = r_0$, где

$$r_0 = \frac{\alpha}{2\beta} = \frac{e^2}{2mc^2} \tag{1.5}$$

(нужно помнить, конечно, что все соотношения верны лишь вне указанной системы).

Если $\beta^2-\alpha>0$ $(km^2>e^2)$, то метрика имеет особенности при $r=r_1$ и $r=r_2$, где

$$r_{1,2}=\beta\pm(\beta^2-\alpha)^{1/2} \tag{1.6}$$

имеют смысл «гравитационных радиусов» системы, а система отсчета с введенными координатами в области $r_2\leqslant r\leqslant r_1$ оказывается неосуществимой. Как известно, отсчет в указанной области может быть осуществлен только телами, движущимися определенным образом. Если $\beta^2-\alpha<0$, то гравитационные радиусы исчезают.

В области $r>r_1$ физическое радиальное расстояние $d\rho$, соответствующее изменению dr координаты r, и физический интервал времени $d\tau$, отвечающий dt, удовлетворяют соотношениям

$$d\rho=\frac{rdr}{(r^2-2\beta r+\alpha)^{1/2}}>dr,\quad d\tau=\left(1-\frac{2\beta}{r}+\frac{\alpha}{r^2}\right)^{1/2}dt<dt \tag{1.7}$$

Физическое расстояние вдоль любой «окружности» $r=\mathrm{const}$ совпадает с расстоянием, формально вычисляемым из (1.1).

2. Применим полученные соотношения к исследованию структуры элементарного источника электромагнитного поля. Будем рассматривать поле такого источника, определяемое соотношениями п. 1, как некое включение в бесконечном псевдоевклидовом пространстве с галилеевой метрикой. Тогда это поле и сам элементарный источник должен подчиняться всем требованиям, налагаемым специальной теорией относительности. В частности, этот элементарный заряд, рассматриваемый как частица вещества, должны непременно быть точечным [1]. При этом его полный вектор энергии-импульса должен быть истинным четырехмерным вектором, инвариантным относительно линейных преобразований координат, в частности, относительно преобразования Лоренца во введенном неограниченном псевдоевклидовом пространстве. Кроме того, значение энергии элементарного заряда должно быть конечным, а его импульс в рассматриваемой системе координат должен равняться нулю. Указанные требования лежали в основе многочисленных попыток построения теории полевой или неполевой массы элементарного заряда и теории электромагнитной структуры элементарных частиц [2]. Отметим, что все дальнейшие рассуждения ведутся в рамках классической полевой теории, а возможные квантовые свойства элементарного заряда не учитываются.

Перейдем прежде всего к декартовым координатам, когда компоненты метрического тензора записываются согласно (1.2) и (1.4) в форме

$$g_{00}=-\left(1-\frac{2\beta}{r}+\frac{\alpha}{r^2}\right),\quad g_{\alpha\beta}=\delta_{\alpha\beta}+A(r)\,n_\alpha n_\beta,\quad g_{0\alpha}=0$$
$$A(r)=\left(\frac{2\beta}{r}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\left(1-\frac{2\beta}{r}+\frac{\alpha}{r^2}\right)^{-1},\quad n_\alpha=\frac{x_\alpha}{r} \tag{2.1}$$

Греческие индексы здесь и ниже принимают значения 1, 2, 3, а латинские — значения 0, 1, 2, 3.

Четырехмерный вектор энергии-импульса для поля в объеме Ω, ограниченном поверхностью Σ, представляется в виде

$$P^i=\frac{1}{c}\int_\Omega(-g)\,(T^{0i}+t^{0i})\,d\Omega=\oint_\Sigma\tau^{i0\alpha}d\Sigma_\alpha,\quad g=\det\|g_{ik}\| \tag{2.2}$$

Здесь T^{ik} — тензор энергии-импульса материи, определяемый согласно (1.3), t^{ik} — псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля, $d\Sigma_\alpha$ — элементы поверхности Σ, а антисимметричные по индексам l и k величины τ^{ikl} определяются метрикой пространства-времени

$$\tau^{ikl}=\frac{c^3}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^m}\left[(-g)\,(g^{ik}g^{lm}-g^{il}g^{km})\right]$$

Используя (2.1), после вычислений получим выражения

$$\tau^{00\alpha}=\frac{c^3}{8\pi k}\frac{A(r)\,x^\alpha}{r^2},\quad \tau^{0\alpha\beta}=0$$

$$\tau^{\beta\beta\alpha}d\Sigma_\alpha=\frac{c^3}{16\pi k}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[B(r)-C(r)\frac{(x^\beta)^2}{r^2}\right]-\frac{2A(r)B(r)}{r}+\right.$$
$$\left.+4A(r)C(r)\frac{(x^\beta)^2}{r^2}\right\}n^\alpha d\Sigma_\alpha-\frac{c^3}{8\pi k}\frac{C(r)\left[1+A(r)\right]}{r}n^\beta d\Sigma_\beta \tag{2.3}$$

$$B(r)=1-\frac{2\beta}{r}+\frac{\alpha}{r^2},\quad C(r)=\left(\frac{2\beta}{r}-\frac{\alpha}{r^2}\right)\left(1-\frac{2\beta}{r}+\frac{\alpha}{r^2}\right)$$

(суммирование по β в третьем уравнении (2.3) не производится).

Из (2.2) и (2.3) получим выражения для энергии и импульса поля, занимающего область (r,∞) пространства

$$E(r)\equiv cP^0(r)=\frac{\beta c^4}{k}-\frac{c^4}{2k}\left(2\beta-\frac{\alpha}{r}\right)\left(1-\frac{2\beta}{r}+\frac{\alpha}{r^2}\right)^{-1}=$$
$$=mc^2-\left(mc^2-\frac{e}{2r}\right)\left(1-\frac{2km}{c^2r}+\frac{ke^2}{c^4r^2}\right)^{-1} \tag{2.4}$$
$$P^\alpha(r)\equiv 0$$

Здесь были использованы также выражения (1.4) для α и β.

Таким образом, в соответствии с требованиями специальной теории относительности импульс элементарного заряда в используемой координатной системе действительно равен нулю.

Для релятивистской ковариантности элементарного заряда и создаваемого им поля, т. е. для инвариантности P^i относительно преобразования Лоренца необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\frac{1}{c}\int_\Omega(-g)\left(T^{\beta\beta}+t^{\beta\beta}\right)d\Omega=\oint_\Sigma\tau^{\beta\beta\alpha}d\Sigma_\alpha=0 \tag{2.5}$$

для всех β, что составляет содержание известной теоремы Лауэ [2]. Ввиду сферической симметрии достаточно потребовать выполнения (2.5) лишь для одного β, например для $\beta=1$. Переходя при интегрировании к сферическим координатам

$$n^\alpha d\Sigma_\alpha=r^2\sin\theta d\varphi d\theta,\quad n^1d\Sigma_1=r^2\sin^3\theta\cos^2\varphi d\varphi d\theta$$

имеем для интеграла по сфере $r=\text{const}$

$$\int_{r=\text{const}}\tau^{11\alpha}d\Sigma_\alpha=\frac{c^3}{4k}\left\{r^2\left[\frac{dB}{dr}-\frac{1}{3}\frac{dC}{dr}\right]-2rAB+\frac{4}{3}rAC-\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}rC\right\}=\frac{2}{3}\frac{\beta c^3}{k}\left(-1+\frac{\beta}{r}-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{r^2}\right) \tag{2.6}$$

Отсюда видно, что если всему реальному пространству отвечает интервал $(0,\infty)$ изменения координаты r, то теорема Лауэ явно не выполняется. Поэтому предположим, что всему пространству соответствует интервал $r_e\leqslant r\leqslant\infty$, так что физический смысл имеют лишь значения r в этом интервале, и определим r_e так, чтобы выполнялось необходимое требование релятивистской ковариантности элементарного заряда (2.5). Используя (2.6) и учитывая, что все пространство ограничено поверхностью Σ, состоящей из бесконечно удаленной сферы и сферы $r=r_e$, получим тогда

$$r_e=\frac{\alpha}{2\beta}=\frac{e^2}{2mc^2}=r_0 \tag{2.7}$$

При этом энергия, сосредоточенная во всем пространстве, согласно (2.4) равна

$$E = mc^2 \tag{2.8}$$

Отсюда видно, в частности, что вся масса элементарного заряда имеет чисто полевое происхождение.

Таким образом, в соответствии с развиваемой теорией заряд e представляет собой особенность метрики пространства-времени такую, что время на этой особенности течет так же, как и на удалении от нее, а длина элементарной окружности, стягиваемой к «точке» $r = r_0$, равна $2\pi r_0^2$ (площадь соответствующей элементарной сферы равна $4\pi r_0^2$). Расстояние от этой точки до некоторой другой точки, для которой радиальная координата имеет некое значение r, легко получается из (1.7) и имеет вид

$$\rho(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{rdr}{(r^2 - 2\beta r + \alpha)^{1/2}} = \int_{r_0}^{r} \frac{rdr}{[r^2 + \alpha(1 - r/r_0)]^{1/2}} \tag{2.9}$$

Последнее позволяет записать электростатическое поле в виде

$$E = \frac{e}{\varepsilon(\rho)\rho^2}, \quad E|_{\rho=0} = \frac{4m^2c^4}{e^3} \tag{2.10}$$

Таким образом, на малых расстояниях напряженность поля отклоняется от закона Кулона, причем величина $\varepsilon(\rho)$, легко определяемая из сравнения (2.10) с (1.4) и из (2.9), играет роль диэлектрической проницаемости вакуума ($\varepsilon(\rho) \to 1$, $\rho \to \infty$, $\varepsilon(\rho) \to \infty$, $\rho \to 0$).

Отметим, что $r_0 > r_1$, как это легко показать из (1.5) и (1.6), т. е. трудности, связанные с появлением гравитационных радиусов, в теории вообще не возникают. Особенность метрики, интерпретирующая элементарный заряд, точечная, поэтому, согласно требованиям специальной теории относительности, о протяженности заряда можно говорить лишь в смысле протяженности создаваемого им поля.

Представляет интерес отдельно вычислить энергию электромагнитного поля. Для массы m', обусловленной только этим полем, имеем

$$m' = \frac{1}{c} P'^0 = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega} (-g)\, T^{00} d\Omega \tag{2.11}$$

Учитывая, что согласно (1.2), (1.3) и (1.4)

$$T^{00} = g^{00} T_0^0 = \frac{e^2}{8\pi r^4}\left(1 - \frac{2\beta}{r} + \frac{\alpha}{r^2}\right)^{-1}$$

получим

$$m' = \frac{e^2}{2c^2\alpha^{1/2}} \frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1-2x^2}{2x(1-x^2)^{1/2}}\right] \approx$$

$$\approx m(1 + {}^2/_3 x^2) > m, \quad x = \beta\alpha^{-1/2} \tag{2.12}$$

Величину x можно считать малой (для электрона, например, $x \sim 10^{-22}$). Тогда из (2.12) следует, что $m' > m$, т. е. энергия гравитационного поля, создаваемого электромагнитным полем элементарного заряда, как бы уменьшает энергию последнего. Таким образом, формально можно приписать гравитационному полю, генерируемому зарядом, отрицательные массу и энергию. Положение таково, как если бы некоторая асть энергии «затрачивалась» на появление указанной выше особенности метрики и отклонение от псевдоевклидовости вблизи нее. Подчеркнем, что несмотря на сравнительную слабость гравитационного поля элементарного заряда, его учет оказывается совершенно необходимым, как видно, для выполнения требований, перечисленных в начале п. 2.

Выше использовался псевдотензор гравитационного поля в форме, предложенной В. А. Фоком, Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем, введение которого соответствует представлению о невозможности локализации гравитационной энергии в пространстве. Имеется большое число работ (см., например, [3]), в которых локализация этой энергии обеспечивается путем некоторого переопределения указанного псевдотензора. Не входя в детали, укажем лишь, что при исследовании интегральных импульса и энергии системы использованный псевдотензор ничуть не хуже всякого другого, если только использовать координатную систему, галилеевскую на бесконечности, что фактически и делается выше (см. (2.1)).

Отметим, что величина r_0 из (1.5) и (2.7) совпадает с радиусом элементарного заряда, вычисленным в теории Боппа — Подольского (для электрона $r_0 \approx 1.41 \cdot 10^{-13}$ *см*), а по порядку величины — и с эффективными радиусами, вычисляемыми в других известных теориях структуры заряда (обзор таких теорий можно найти в [2]). Однако развиваемая здесь теория вполне естественна в том смысле, что она не содержит элементов произвола, связанных с выбором формы лагранжиана для электромагнитного поля, либо, что почти то же самое, с выбором вида функции (или оператора) диэлектрической проницаемости. Более того, вид этой функции оказывается, согласно (2.10), вполне определенным. Нетрудно показать, что исходя из этой функции $\varepsilon(\rho)$, можно построить нелинейную электродинамику, аналогичную по смыслу теориям Борна — Инфельда или Шредингера. Для этого достаточно рассматривать заряд в обычном плоском пространстве, но использовать вместо закона Кулона закон (2.10), причем величина $E\,|_{\rho=0}$ в (2.10) будет играть роль «максимальной напряженности» E_0 в указанных теориях.

Отметим в заключение, что при $\alpha = 0$ выполнение условий (2.5), следующих из теоремы Лауэ, оказывается невозможным ни при каком r_e в интервале $(-\infty, \infty)$. Отсюда следует вывод о невозможности существования релятивистски ковариантной «элементарной», т. е. непротяженной массы вещества. Несколько другим путем к этому же выводу пришел К. П. Станюкович [4], развивший первоначальную идею Л. Д. Ландау.

Поступила 13 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. М., Физматгиз, 1960.
2. Иваненко Д. Д., Соколов А. А. Классическая теория поля (новые проблемы). М.—Л., Гостехиздат, 1951.
3. Меллер Х. Законы сохранения в тетрадной теории гравитации. Сб. «Гравитация и топология. Актуальные проблемы», М., «Мир», 1966, стр. 34.
4. Станюкович К. П. О возможном излучении элементарных частиц. Усп. физ. н., 1966, т. 89, вып. 4, стр. 731.