

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА В РЕШЕНИИ ГЕССА

А. М. Ковалев (Донецк) ¹

Кинематическое истолкование движения тела дается на основе кинематических уравнений, предложенных П. В. Харламовым [1]. Подвижный годограф угловой скорости данной задачи исследован в работе [2], где выделены все характерные виды подвижного годографа. В данной работе изучен неподвижный годограф для всех указанных случаев и дана геометрическая картина движения тела.

§ 1. Движение тела представляется качением без скольжения подвижного аксиода вектора угловой скорости по неподвижному. Подвижный годограф в рассматриваемом решении полностью изучен [2]. Воспользуемся результатами работы [2] и примем введенные там обозначения.

Подвижный годограф лежит в плоскости $\omega_1 = 1/2 c \omega_2$; проекцией его на плоскость $\omega_1 = 0$ будет кривая s , уравнения которой в полярных координатах ρ, φ ($\omega_2 = \rho \cos \varphi, \omega_3 = \rho \sin \varphi$) таковы:

$$\begin{aligned} \rho \rho' &= \sqrt{f(\rho)}, & \rho^2 \varphi' &= -\rho^3 \cos \varphi + k \\ \left(f(\rho) &= \rho^2 \left[1 - \left(\frac{\rho^2}{c} - h \right)^2 \right] - k^2 \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

точка означает дифференцирование по безразмерному времени τ .

Из первого уравнения (1.1) находим, что ρ есть эллиптическая функция времени τ с периодом.

$$T = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}$$

Рассматривая кривую s при различных значениях параметров [2], можно выделить четыре характерных случая:

1°. Кривая s имеет предельную замкнутую траекторию S_* и не проходит через особую точку.

2°. Кривая s имеет предельную замкнутую траекторию S_* и проходит через особую точку.

3°. Предельной замкнутой траектории S_* у кривой s не существует. Кривая s принадлежит типу F_1 , за исключением куска, пересекающего линию L , который принадлежит типу F_2 .

4°. Предельной замкнутой траектории S_* у кривой s не существует. Кривая s принадлежит типу F_1 .

Движение тела рассмотрим для каждого из этих случаев.

§ 2. Неподвижный годограф строим исходя из кинематических уравнений, указанных П. В. Харламовым [1]

$$\omega_\zeta(\sigma) = \omega_1(\sigma)v_1(\sigma) + \omega_2(\sigma)v_2(\sigma) + \omega_3(\sigma)v_3(\sigma)$$

$$\omega_\rho^2(\sigma) = \omega_1^2(\sigma) + \omega_2^2(\sigma) + \omega_3^2(\sigma) - \omega_\zeta^2$$

$$\omega_\rho^2 \frac{d\alpha}{d\sigma} = \begin{vmatrix} v_1(\sigma) & v_2(\sigma) & v_3(\sigma) \\ \omega_1(\sigma) & \omega_2(\sigma) & \omega_3(\sigma) \\ \frac{d\omega_1}{d\sigma} & \frac{d\omega_2}{d\sigma} & \frac{d\omega_3}{d\sigma} \end{vmatrix}$$

Из этих уравнений, принимая τ в качестве независимого переменного σ , имеем

$$\omega_\zeta = 1/2 \rho \cos \varphi (\rho^2 - ch) + k, \quad \omega_\rho^2 = \rho^3 (1/4c^2 \cos^2 \varphi + 1) - \omega_\zeta^2 \quad (2.1)$$

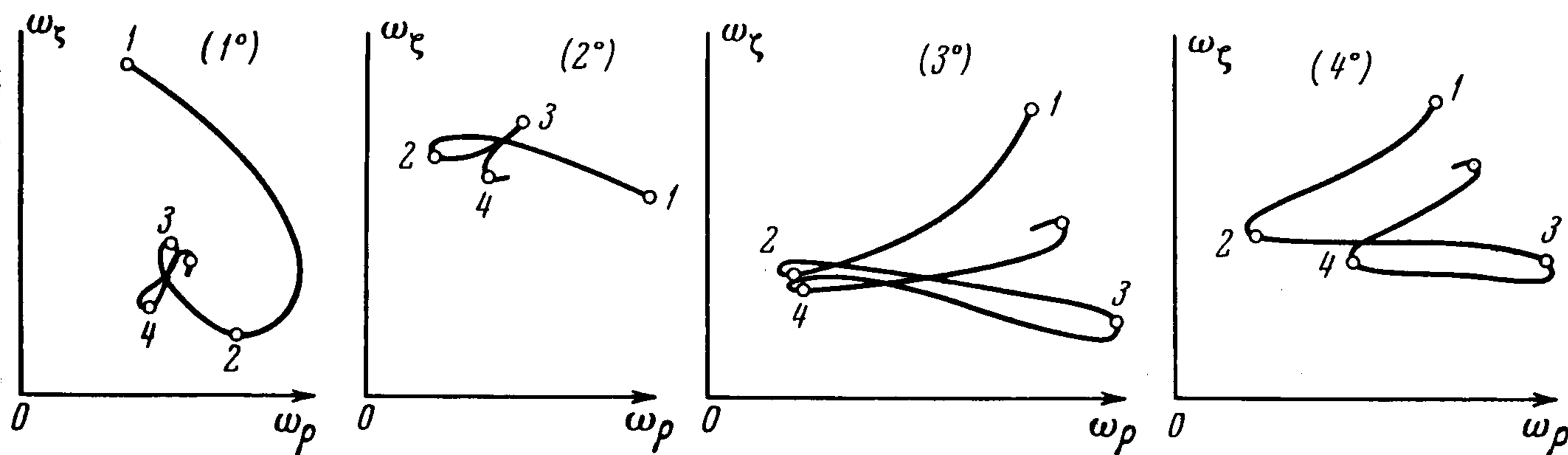
$$\alpha = \frac{1}{\omega_\rho^2} (k - \rho^3 \cos \varphi) \left(\frac{\rho^2}{c} - h - \frac{c}{2} v_1 \right) \quad \left(v_1 = \frac{k}{\rho} \cos \varphi \pm \frac{1}{\rho} \sin \varphi \sqrt{f(\rho)} \right) \quad (2.2)$$

Зависимость ρ, φ от времени τ дается уравнениями (1.1). Знак перед радикалом в выражении для v_1 определяется выбором начальных данных. Выберем их такими, которым соответствует знак плюс.

Уравнения (2.1) определяют меридиан поверхности вращения, на которой лежит неподвижный годограф. Линия меридиана заключена между прямыми

$$\omega_\rho = \frac{1}{\sqrt{\rho_1^2 - k^2}} (k\omega_\zeta - \rho_1^2), \quad \omega_\rho = \frac{1}{\sqrt{\rho_2^2 - k^2}} (k\omega_\zeta - \rho_2^2) \quad (2.3)$$

В случаях 1°, 2° меридиан при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к предельной замкнутой кривой а в случаях 3°, 4° предельной замкнутой кривой у меридиана не существует.



Фиг. 1

Выясним возможность обращения ω_ρ в нуль. Представим ω_ρ^2 из (2.1) как функцию $\cos \varphi$ и найдем значения φ , при которых $\omega_\rho = 0$. Приходим к уравнению

$$\frac{1}{4c^2\rho^2} \left[1 - \left(\frac{\rho^3}{c} - h \right)^2 \right] \cos^2 \varphi - ck\rho \left(\frac{\rho^2}{c} - h \right) \cos \varphi + \rho^2 - k^2 = 0$$

Это уравнение имеет действительные решения лишь в случае $f(\rho) = 0$, т. е. когда ρ принимает граничные значения ρ_1 или ρ_2 . При этом

$$\varphi = \pm \arccos \left(2 \sqrt{\rho^2 - k^2} / ck \right) \quad (2.4)$$

Таким образом, на подвижном годографе существуют точки, для которых $\omega_\rho = 0$, число их изменяется от четырех до нуля в зависимости от того, больше или меньше единицы величина $2 \sqrt{\rho^2 - k^2} / ck$ при $\rho = \rho_1, \rho_2$.

В моменты времени, когда φ принимает значения (2.4), неподвижный годограф проходит через вертикальную ось.

Из (2.2) можно установить, что в моменты времени, когда кривая s пересекает линию L , направление изменения угла α меняется на противоположное, т. е. α при этом имеет точку экстремума.

На фиг. 1 показан меридиан для случаев 1°, ..., 4°. Начальная точка кривой s выбиралась на внешней окружности $\rho = \rho_2$ в случаях 1°, 3°, 4° в области $G_2(\varphi = 0.1)$, а в случае 2° в области $G_1(\varphi = -2.99085)$.

При этом для указанных случаев выбраны следующие значения параметров:

$$k = 2.0, c = 1.5, h = 3.0 \quad (1^\circ, 2^\circ)$$

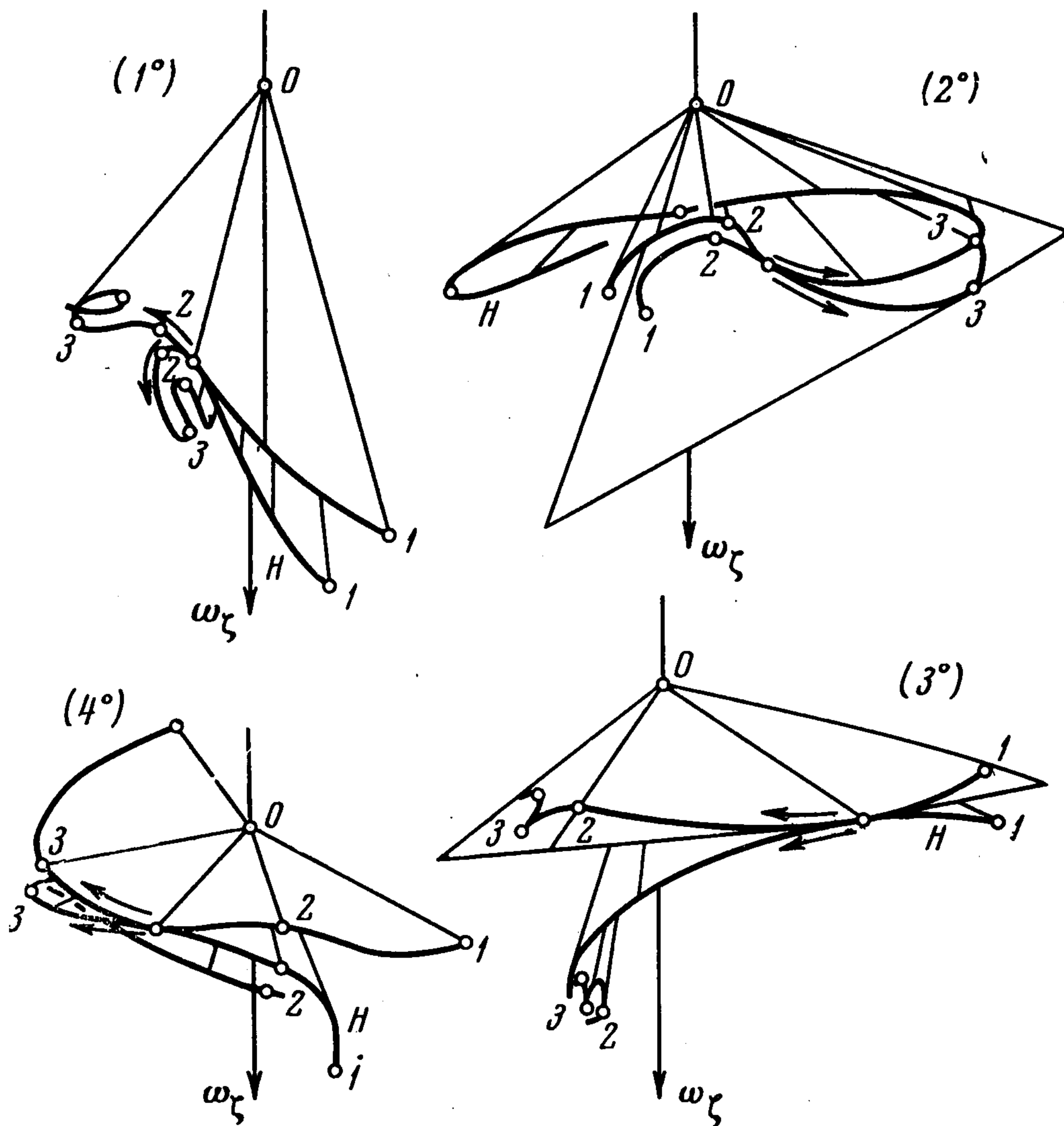
$$k = 0.4, c = 0.8, h = 0.2 \quad (3^\circ)$$

$$k = 0.4, c = 0.8, h = -0.2 \quad (4^\circ)$$

Следует отметить, что и кривая s и линия меридиана очень быстро приближаются к предельным кривым. Так, в случаях 1°, 2° уже для $\tau > 5T$ точки рассматриваемых кривых отстоят от соответствующих точек предельных кривых на расстоянии, меньшем чем 0.0001.

Вид неподвижного годографа для этих случаев показан на фиг. 2 (отмечен буквой H).

§ 3. Столкновение движения можно теперь проводить в таком порядке. Строим подвижный годограф, для этого проектируем кривую s на плоскость $\omega_1 = 1/2 c\omega_2$. Задаем начальные значения ρ, φ, t , т. е. выбираем начальную точку на подвижном годографе. Из (2.1) находим $\omega_\zeta, \omega_\rho$. Этим устанавливается положение подвижного годографа на неподвижном в начальный момент. Движение тела получаем, совмещая точки подвижного и неподвижного годографов, которые соответствуют одним и тем же моментам времени.



Фиг. 2

На фиг. 2 показано положение годографов в некоторый момент времени. Стрелки указывают направление дальнейшего движения точки соприкосновения годографов.

В случаях 1°, 2° (фиг. 2) тело движется по часовой стрелке вокруг вертикали. Асимптотическое движение (соответствующее предельной замкнутой траектории S_*) есть движение, которое повторяется в пространстве через период $\tau = T$, если тело повернуть на угол $\Delta\alpha$ вокруг вертикали. Для выбранных значений параметров $\Delta\alpha = 0.1398$. Величины c, h, k можно выбрать так, что асимптотическое движение будет периодическим, т. е. $\Delta\alpha = 0$.

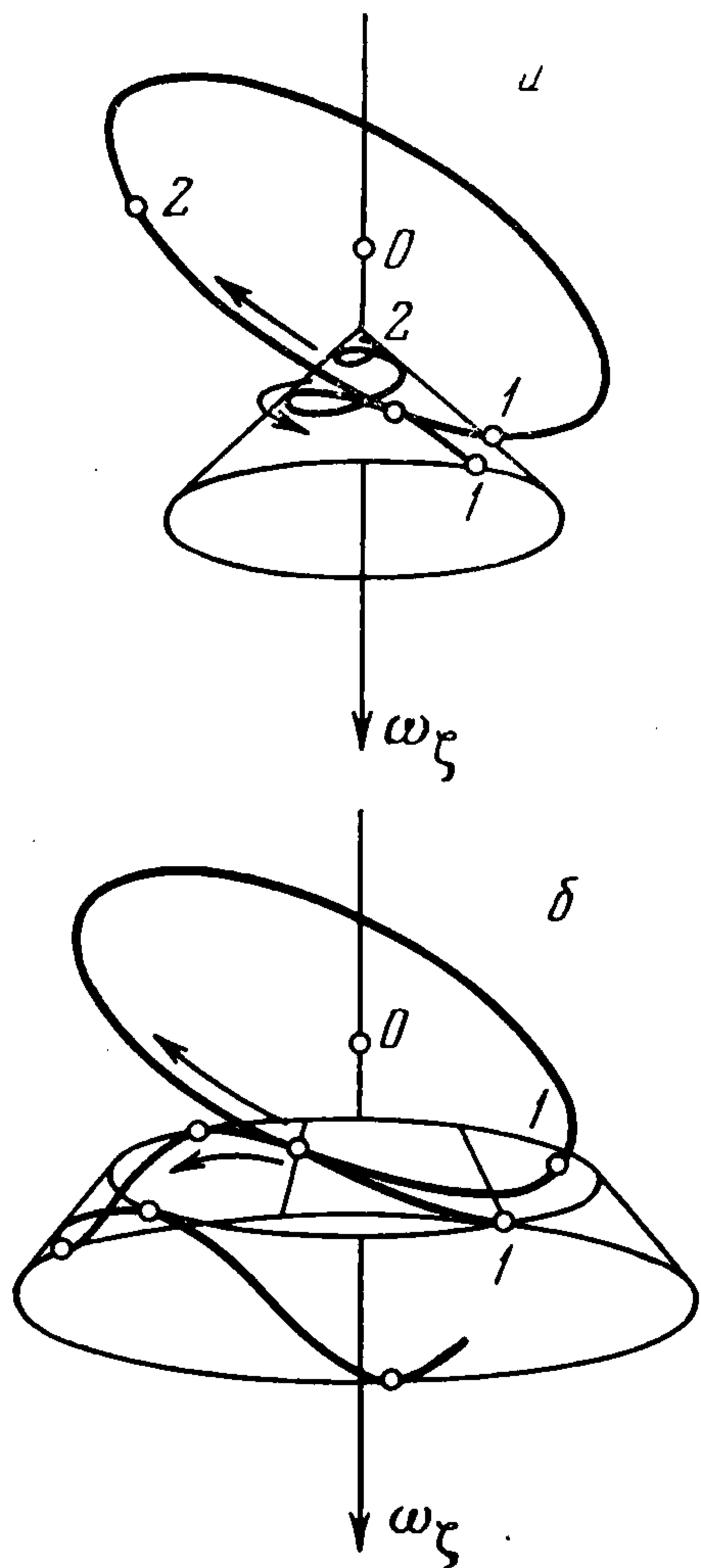
В случае 3° (фиг. 2) тело движется таким образом, что угол α колеблется около нулевого положения то в одну, то в другую сторону.

В случае 4° (фиг. 2) угол α с течением времени неограниченно возрастает. Тело движется вокруг вертикали против часовой стрелки.

§ 4. Рассмотрим решения, в которых $\rho = \text{const}$. Система (1.1) имеет два таких решения: $\rho = \rho_1, \rho = \rho_2$. Чтобы данные решения удовлетворяли кинематическим уравнениям, необходимо выполнение равенства

$$k^2c - 2\rho^4(\rho^2 / c - h) = 0 \text{ или } 2c[9h - h^3 + (h^2 + 3)\sqrt{h^2 + 3}] - 27k^2 = 0$$

Это условие означает, что $\rho_1 = \rho_2 = \rho_0$, т. е. $f(\rho_0) = 0$, а для всех остальных значений ρ имеем $f(\rho) < 0$. Область G при этом выродилась в окружность $\rho = \rho_0$, которая и является кривой s . Подвижный годограф есть эллипс.



Фиг. 3

Выпишем уравнения неподвижного годографа

$$\omega_\zeta = \frac{k^2 c^2}{4\rho_0^3} \cos \varphi + k, \quad \omega_\rho = \frac{kc}{2} \left(\cos \varphi - \frac{k}{\rho_0^3} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{2\rho_0^4}{kc(k - \rho_0^3 \cos \varphi)} \quad (4.2)$$

Зависимость φ от времени τ дается уравнением

$$\rho_0^3 \dot{\varphi} = -\rho_0^3 \cos \varphi + k$$

Исключив $\cos \varphi$ из уравнений (4.1), получаем, что меридианом будет отрезок прямой

$$\omega_\zeta = \frac{kc}{2\rho_0^3} \omega_\rho + \frac{k^3 c^2}{4\rho_0^6} + k$$

Дальнейшее исследование проведем отдельно для двух вариантов.

1. Случай $k \leq \rho_0^3$. При этом на подвижном годографе существует точка, определяемая значением $\varphi_0 = \arccos k / \rho_0^3$, которая достигается, когда $\tau \rightarrow \infty$. Из (4.2) видно, что $\alpha \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow \varphi_0$. Неподвижный годограф лежит на конусе и представляет собой кривую конечной длины, которая навивается бесконечное число раз на ось ω_ζ .

Тело в этом случае движется против часовой стрелки вокруг вертикали и при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к равномерному вращению вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega = 1/4 k^3 c^2 / \rho_0^6 + k$. Положение годографов показано на фиг. 3, а (начальная точка взята в области G_2).

2. Случай $k > \rho_0^3$. В этом случае при $\tau \rightarrow \infty$ имеем $\varphi \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow \infty$. Переменная точка обходит подвижный годограф за период

$$\tau = T_1 = \frac{2\rho_0^4}{kc} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{k - \rho_0^3 \cos \varphi}$$

Кривая неподвижного годографа лежит на части конуса, заключенного между плоскостями

$$\omega_\zeta = k + 1/4 k^2 c^2 / \rho_0^3, \quad \omega_\zeta = k - 1/4 k^2 c^2 / \rho_0^3$$

Неподвижный годограф достаточно построить для промежутка времени $[0, T_1]$, так как следующая часть его, которая соответствует промежутку $[T_1, 2T_1]$, получается из предыдущей поворотом ее на угол $\alpha_0 = 4\rho_0^4 \pi / kc \sqrt{k - \rho_0^6}$.

В начальный момент ($\tau = 0$) совмещаем точку подвижного годографа, соответствующую значению $\varphi = 0$, с точкой неподвижного годографа, расположенной на нижней параллели. В моменты времени $\tau = kT_1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) подвижный годограф касается нижней параллели, а в моменты $\tau = 1/2(2k + 1)T_1$ — верхней. Тело совершает прецессионное движение вокруг вертикали (фиг. 3, б).

Автор благодарит П. В. Харламова за руководство работой, Г. В. Мозалевскую — за полезное обсуждение результатов.

Поступила 31 XII 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Харламов П. В. Лекции по динамике твердого тела, спецкурс. ч. 1. Новосибирск, Новосиб. ун-т, 1965.
2. Ковалев А. М. Подвижный годограф угловой скорости в решении Гесса задачи о движении тела, имеющего неподвижную точку. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.