ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА ПЕРЕМЕННОГО СОСТАВА С ГИРОСКОПОМ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

С. Буралхиев
(Чимкент)

Приводятся достаточные условия устойчивости вращательных движений тела переменной массы, которое находится в центральном ньютоновском поле сил. Уравнение движения тела около неподвижной точки записаны в предположениях, принятых М. Ш. Аминовым.

Исследования устойчивости вращательных движений твердого тела в случае Лагранжа используется метод Четаева, а также теорема В. В. Румянцева об устойчивости движения по отношению к части переменных.

Рассмотрим симметричное тело $(A = B)$ переменной массы, на оси симметрии которого помещен гироскоп с кинетическим моментом l_0 и находится центр масс тела на расстоянии $Z_c(t)$ от закрепленной точки O.

Если тело находится в центральном ньютоновском поле сил, то уравнения Эйлера — Пуассона в предположениях, рассмотренных в работах [1–3], имеют вид

$$\begin{aligned}
&p^{\cdot} = (1-\delta)\, qr - \nu q + {}^1\!/_2 a\gamma_2 - \mu(1-\delta)\gamma_2\gamma_3 && (\nu = l_0 / A)\\
&q^{\cdot} = (\delta-1)\, pr + \nu p - {}^1\!/_2 a\gamma_1 + \mu(1-\delta)\gamma_1\gamma_3, \quad r^{\cdot} = 0 && (\delta = C / A) \qquad (0.1)\\
&\gamma_1^{\cdot} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \gamma_2^{\cdot} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \gamma_3^{\cdot} = q\gamma_1 - p\gamma_2 && (a = 2MgZ_c / A)
\end{aligned}$$

Здесь ν, δ, a — некоторые функции времени; μ — постоянная. Очевидно, что одно из решений уравнений (0.1)

$$p = q = \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad r = r_0, \quad \gamma_3 = 1 \qquad (0.2)$$

соответствует вращению тела вокруг оси симметрии, совпадающей с направлением на центр притяжения, с постоянной угловой скоростью.

1. Достаточные условия устойчивости движения (0.2) получим из уравнения для угла нутации θ. Из уравнений движения (0.1) следует

$$\begin{aligned}
&p^2 + q^2 + a\gamma_3 - \mu(1-\delta)\gamma_3^2 - \int_0^t \gamma_3 da - \mu\int_0^t \gamma_3^2 d\delta = C_1\\
&p\gamma_1 + q\gamma_2 + (r\delta + \nu)\gamma_3 - \int_0^t \gamma_3 d(r\delta + \nu) = C_2, \quad r = r_0 \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

где C_1, C_2, r_0 — постоянные. Первое соотношение (1.1) получим из (0.1) умножением первых двух уравнений на p и q соответственно и сложением, второе — умножением первого и второго уравнений (0.1) на γ_1 и γ_2 соответственно, четвертого и пятого на p и q соответственно и сложением. При этом проведем интегрирование по частям в полученных интегралах.

Выражая p, q, r, γ_1, γ_2, γ_3 через углы Эйлера φ, ψ, θ, соотношения (1.1) перепишем в виде

$$\begin{aligned}
&\psi^{\cdot 2}\sin^2\theta + \theta^{\cdot 2} + a\cos\theta - \mu(1-\delta)\cos^2\theta - \int_0^t \cos\theta\, da - \mu\int_0^t \cos^2\theta\, d\delta = C_1\\
&\psi^{\cdot}\sin^2\theta + (r_0\delta + \nu)\cos\theta - \int_0^t \cos\theta\, d(r_0\delta + \nu) = C_2 \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

Исключение производной $\psi^{\cdot}$ из соотношений (1.2) после обозначения $\cos\theta = u$ дает уравнение

$$u^{\cdot 2} = (1-u^2)\left[C_1 - au + \mu(1-\delta)u^2 + \int_0^t u\,da + \mu\int_0^t u^2 d\delta\right] -$$

$$-\left[C_2 - (r_0\delta + \nu)u + \int_0^t u\,d(r_0\delta+\nu)\right]^2 = f(u) \qquad (1.3)$$

Как видно из (1.3), действительному движению тела около неподвижной точки соответствует изменение функции u в интервале (-1.1), где $f(u) \geqslant 0$.

Движению тела (0.2), которое исследуется на устойчивость, соответствует изменение функции u в интервале $(1-\varepsilon, 1)$, где ε — произвольная малая положительная величина $(\varepsilon \ll 1)$.

Н. Г. Четаевым [4] и М. Ш. Аминовым [2] при исследовании вращательных движений снаряда показано, что достаточным условием близости u к единице, т. е. устойчивости движения (0.2), является отрицательность корней полинома $\Phi(x) = -F(1-\varepsilon-x)$, где $F(u) \geqslant f(u)$. Для функции $f(u)$ вида (1.3) полином $F(u) > f(u)$ легко найти, если a, ν и δ будут монотонными функциями времени.

Положим для определенности $a^{\cdot} \leqslant 0$, $\delta^{\cdot} \geqslant 0$, $\nu^{\cdot} \geqslant 0$. Тогда

$$\int_0^t u\,da \leqslant \int_0^t u_{\min} da \leqslant (1-\varepsilon)(a-a_0), \qquad \int_0^t u^2 d\delta \leqslant \int_0^t u^2_{\max} d\delta = \delta - \delta_0$$

$$\int_0^t u\,d(r_0\delta+\nu) \geqslant \int_0^t u_{\min} d(r_0\delta+\nu) = (1-\varepsilon)(r_0\delta + \nu - r_0\delta_0 - \nu_0) \qquad (1.4)$$

где $a_0 = a(0)$, $\delta_0 = \delta(0)$, $\nu_0 = \nu(0)$. Очевидно, при условиях (1.4) функция $f(u)$ не превосходит полинома четвертой степени относительно u

$$F(u) = (1-u^2)[\mu(1-\delta)u^2 - au + C_1 + (1-\varepsilon)(a-a_0) + \mu(\delta-\delta_0)] - [C_2 - (r_0\delta+\nu)u + (1-\varepsilon)(r_0\delta + \nu - r_0\delta_0 - \nu_0)]^2 \geqslant f(u) \qquad (1.5)$$

Полином $\Phi(x)$, корни которого подлежат исследованию, принимает вид

$$\Phi(x) = -F(1-\varepsilon-x) = kx^4 + lx^3 + mx^2 + nx + b \qquad (1.6)$$

где

$$k = \mu(1-\delta), \qquad l = a - 4\mu(1-\varepsilon)(1-\delta)$$

$$m = (r_0\delta+\nu)^2 + C_1 + 5\mu(1-\delta)(1-\varepsilon)^2 + \mu(\delta-\delta_0) - 2\varepsilon\mu(1-\varepsilon)(1-\delta) - 2(1-\varepsilon)a - (1-\varepsilon)a_0$$

$$n = 2(r_0\delta+\nu)[C_2 - (1-\varepsilon)(r_0\delta_0+\nu_0)] + 2(1-\varepsilon)^2 a_0 - 2\mu(1-\varepsilon)(\delta-\delta_0) - 2(1-\varepsilon)C_1 - 2\mu(1-\varepsilon)^3(1-\delta) - 4\varepsilon\mu(1-\varepsilon)^2(1-\delta) - 2\varepsilon(1-\varepsilon)a$$

$$b = [C_2 - (1-\varepsilon)(r_0\delta_0+\nu_0)]^2 - 2\varepsilon(1-\varepsilon)[\mu(1-\delta)(1-\varepsilon)^2 + C_1 - (1-\varepsilon)a_0 + \mu(\delta-\delta_0)]$$

Согласно критерию Гурвица, условиями отрицательности корней полинома (1.6) являются неравенства

$$l > 0, \quad lm - kn > 0, \quad n(lm-kn) - l^2 b > 0$$

$$(lm-kn)(n^2 - bm) - bl^2 n > 0 \qquad (1.7)$$

Неравенства (1.7) будут достаточными условиями устойчивости движения (0.2).

2. Достаточные условия устойчивости движения (0.2) получим при помощи функции Ляпунова. В возмущенном движении полагаем

$$p = x_1, \quad q = x_2, \quad r = r_0 + x_3, \quad \gamma_1 = y_1, \quad \gamma_2 = y_2, \quad \gamma_3 = 1 + y_3 \tag{2.1}$$

Тогда уравнения возмущенного движения для переменных x_1, y_1, x_2, y_2 будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2 + \{2\}, &\qquad \alpha_1 &= (1-\delta) r_0 - \nu \\ x_2^{\cdot} &= -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 y_1 + \{2\}, &\qquad \alpha_2 &= {}^1/_2 a - \mu(1-\delta) \\ y_1^{\cdot} &= r_0 y_2 - x + \{2\}, &\qquad y_2^{\cdot} &= x_1 - r_0 y_1 + \{2\} \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $\{2\}$ — члены второго и выше порядка малости относительно возмущений. За функцию Ляпунова примем

$$V = \alpha x_1^2 + 2\beta x_1 y_1 + \gamma y_1^2 + \alpha x_2^2 + 2\beta x_2 y_2 + \gamma y_2^2 \qquad \left(\beta = -\frac{\alpha\alpha_2 + \gamma}{r_0\delta - \nu}\right) \tag{2.3}$$

Здесь α, γ, β — непрерывные и ограниченные вместе со своими производными функции времени.

Производная функции (2.3) в силу уравнений возмущенного движения (2.2) принимает вид

$$V^{\cdot} = \alpha^{\cdot} x_1^2 + 2\beta^{\cdot} x_1 y_1 + \gamma^{\cdot} y_1^2 + \alpha^{\cdot} x_2^2 + 2\beta^{\cdot} x_2 y_2 + \gamma^{\cdot} y_2^2 + \{3\} \tag{2.4}$$

где $\{3\}$ — члены третьего и выше порядка малости относительно возмущений. При условиях

$$\alpha > 0, \quad \alpha^{\cdot} < 0, \quad \alpha\gamma - \beta^2 > 0, \qquad \alpha^{\cdot}\gamma^{\cdot} - \beta^{\cdot 2} > 0 \tag{2.5}$$

Функция V — положительно определенная, а $V^{\cdot}$ — отрицательно определенная функции переменных x_1, x_2, y_1, y_2.

Согласно теореме, доказанной В. В. Румянцевым [5], движение (0.2) устойчиво по отношению к части переменных p, q, γ_1, γ_2 при выполнении неравенств (2.5). Тогда из третьего уравнения (0.1) и тривиального интеграла $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ следует устойчивость по отношению к переменным r и γ_3.

В частности, $\beta = -A/(r_0\delta + \nu)$, $\gamma = A(1 - \alpha_2)$ при $\alpha = A$ получим достаточные условия устойчивости движения (0.2), приведенные в [3]. В рассматриваемом случае можно получить множество таких условий. Так в случае $\nu^{\cdot} < 0$, $\delta^{\cdot} < 0$ можно взять

$$\alpha = r_0\delta + \nu, \quad \gamma = \mu(r_0\delta + \nu), \quad -\beta = \mu\delta + {}^1/_2 a$$

Тогда условия (2.5) имеют вид

$$\mu(r_0\delta + \nu)^2 - (\mu\delta + {}^1/_2 a)^2 > 0, \qquad \mu(r_0\delta^{\cdot} + \nu^{\cdot})^2 - (\mu\delta^{\cdot} + {}^1/_2 a^{\cdot})^2 > 0 \tag{2.6}$$

При этом движение тела (0.2) устойчиво.

Поступила 21 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. О некоторых случаях движения тяжелого твердого тела с гироскопом. Вестн. МГУ, сер. Матем. механ., 1963, № 3.
2. Аминов М. Ш. Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы. Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1959, вып. 48.
3. Киргизбаев Ж. К устойчивости перманентных вращений тела переменной массы с гироскопом в ньютоновском поле сил. Тр. Ун-та дружбы народов им. Патриса Лумумбы, 1968, т. 27.
4. Четаев Н. Г. О достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда. ПММ, 1943, т. 7, вып. 2.
5. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, сер. Матем. механ., астрон., физ., химии, 1957, № 4.