ДИНАМИКА СВОБОДНЫХ СИСТЕМ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК С УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ

С. А. Алексеев (Москва)

Указывается способ составления уравнений движения свободных систем материальных точек, соединенных одна с другой безынерционными упругими связями. Конфигурация системы произвольна, к материальным точкам приложены любые как угодно зависящие от времени внешние силы.

1. Жесткая система. Положим, что в системе имеется N материальных точек. Обозначим массу i-й точки m_i, сумму всех масс обозначим M, так что

$$M = \Sigma m_i \tag{1.1}$$

Здесь, как и всюду ниже, символ Σ означает суммирование по всем материальным точкам системы, т. е. по i от 1 до N.

Систему, у которой деформации упругих связей равны нулю, назовем жесткой системой. Если связи абсолютно жестки, жесткая система по существу является абсолютно жестким телом.

Жесткую систему отнесем к неподвижным декартовым координатам с ортами $\mathbf{e}_j^\circ$ ($j = 1,2,3$), а также к подвижным координатам с ортами $\mathbf{e}_j$ ($j = 1,2,3$), направленными по главным центральным осям инерции жесткой системы. Если ρ_i°, ρ_c° радиус-векторы i-й точки и центра масс жесткой системы относительно начала неподвижных координат, а

$$\rho_i = x_i^1\mathbf{e}_1 + x_i^2\mathbf{e}_2 + x_i^3\mathbf{e}_3 \tag{1.2}$$

радиус-вектор i-й точки жесткой системы относительно ее центра масс, то

$$\rho_i^\circ = \rho_c^\circ + \rho_i \tag{1.3}$$

По определению центра масс

$$\rho_c^\circ = \frac{1}{M}\Sigma m_i\rho_i^\circ, \qquad \Sigma m_i\rho_i = 0 \tag{1.4}$$

2. Упругие перемещения. В отличие от закрепленной системы в свободной системе упругие перемещения могут быть введены различным образом. Например, можно определить упругое перемещение $\mathbf{U}_i$ как отклонение i-й точки от ее положения в жесткой системе, являющейся неподвижной или движущейся по заданному закону

$$\mathbf{r}_i^\circ = \rho_c^\circ + \rho_i + \mathbf{U}_i \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{r}_i^\circ$ радиус-вектор i-й точки упругой системы.

Более целесообразно, однако, определить упругое перемещение i-й точки $\mathbf{V}_i$ как отклонение ее от положения в жесткой системе, положение в пространстве которой заранее неизвестно, и одновременно наложить на $\mathbf{V}_i$ два однородных векторных условия

$$\Sigma m_i\mathbf{V}_i = 0, \qquad \Sigma m_i\mathbf{r}_i\times\mathbf{V}_i = 0 \tag{2.2}$$

При этом

$$\mathbf{r}_i^\circ = \mathbf{r}_c^\circ + \mathbf{r}_i + \mathbf{V}_i, \qquad \mathbf{r}_i = x_i^1\mathbf{e}_1' + x_i^2\mathbf{e}_2' + x_i^3\mathbf{e}_3' \tag{2.3}$$

где $\mathbf{r}_i^\circ$-радиус-вектор центра масс упругой системы, $\mathbf{r}_i$ радиус-вектор i-й точки жесткой системы относительно ее центра масс, а базис $\mathbf{e}_j'$ заранее не известен. Координаты x_i^k имеют те же значения, что в (1.2).

Общность представлений (2.1) и (2.3) одинакова. Это нетрудно показать для малых упругих перемещений и в предположении, что базис $\mathbf{e}_j'$ получается из базиса $\mathbf{e}_j$ поворотом на малый угол $\boldsymbol{\theta}$. Последнее предположение не уменьшает общности вывода, так как можно считать, что заданное движение базиса $\mathbf{e}_j$ близко к движению базиса $\mathbf{e}_j'$; малость же упругих перемещений существенна и будет использована в дальнейшем.

Положив $\mathbf{r}_i = \rho_i + \boldsymbol{\theta}\times\rho_i$, приравняем правые части (2.1) и (2.3.1); отсюда получим

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{r}_c^\circ + \rho_c^\circ - \mathbf{r}_i + \rho_i + \mathbf{U}_i$$

Из (1.4.2), (1.2) и (2.3.2) следует, что

$$\Sigma m_i\mathbf{r}_i = 0 \tag{2.4}$$

Используя это, можно выразить явным образом $\mathbf{r}_c^\circ$ и θ через ρ_c°, ρ_i, $\mathbf{U}_i$. При этом ни на $\mathbf{U}_i$, ни на $\mathbf{V}_i$ никаких ограничений не налагается. Этим и доказывается равная общность обоих представлений упругих перемещений.

Если все связи в системе упругие, т. е. если среди них нет абсолютно жестких, система имеет $3N$ степеней свободы. Из них шесть относятся к движению базиса $\mathbf{e}_j'$, а остальные $2N - 6$ — к упругому движению (для линейной системы, все точки которой расположены на одной прямой, движению базиса $\mathbf{e}_j'$ соответствуют пять степеней свободы и $3N - 5$ — упругому движению).

Введем обобщенные упругие координаты $q_\lambda(t)$ следующим образом:

$$\mathbf{V}_i = q_\lambda \mathbf{b}_{i\lambda} \tag{2.5}$$

Здесь, как и всюду ниже, предполагается суммирование по повторяющемуся греческому индексу, т. е. по всем степеням свободы в упругом движении. Векторы $\mathbf{b}_{i\lambda}$ (см. п. 3) строятся так, что они удовлетворяют равенствам

$$\Sigma m_i \mathbf{b}_{i\lambda} = 0, \qquad \Sigma m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{b}_{i\lambda} = 0 \tag{2.6}$$

Полагая в (2.5) $q_\lambda = 1$, $q_\mu = 0$ $(\mu \neq \lambda)$, получим $\mathbf{V}_i = \mathbf{b}_{i\lambda}$. Поэтому векторы $\mathbf{b}_{i\lambda}$ могут быть названы единичными упругими перемещениями.

3. Единичные упругие перемещения. Назначим столько линейно независимых групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$, сколько степеней свободы в упругом движении имеет система, причем силы $\mathbf{f}_{i\lambda}$ статически эквивалентны нулю

$$\Sigma \mathbf{f}_{i\lambda} = 0, \qquad \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{i\lambda} = 0 \tag{3.1}$$

Линейная независимость означает, что не существует таких чисел g_λ, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что $g_\lambda \mathbf{f}_{i\lambda} = 0$.

Покажем, как можно назначить $\mathbf{f}_{i\lambda}$ для некоторых систем, где этот процесс наиболее прост. В п. 7 указан формализованный способ вычисления $\mathbf{f}_{i\lambda}$ для систем произвольного вида.

В линейной системе направим орт $\mathbf{e}_1'$ вдоль прямой, на которой лежат все материальные точки, а орты $\mathbf{e}_2'$, $\mathbf{e}_3'$ направим в каких-либо ортогональных направлениях. Прикладывая равные по модулю и противоположно направленные силы к каждой паре соседних точек, получим $N - 1$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$. Далее к каждым трем соседним точкам приложим по три статически эквивалентных нулю силы, параллельные $\mathbf{e}_2'$ и получим $N - 2$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$. Такая же операция в плоскости, содержащей $\mathbf{e}_3'$ и $\mathbf{e}_1'$, приведет к построению еще $N - 2$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$. Всего получим $3N - 5$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$ — столько, сколько степеней свободы в упругом движении имеет система.

В плоской системе, все точки которой расположены в одной плоскости и никакие три точки не лежат на одной прямой, приложим равные по модулю и противоположно направленные силы к каждой паре точек, номера которых отличаются на одну и две единицы и получим $2N - 3$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$, лежащих в плоскости системы. Чтобы получить $N - 3$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$ нормальных плоскости системы, рассмотрим произвольные четыре точки и приложим к ним статически эквивалентную нулю группу сил. Затем образуем новую четверку точек, из которых одна не входит в первую четверку, и приложим к этим четырем точкам эквивалентную нулю систему сил. Выделяя и далее четверки точек так, что в каждой из них одна точка не принадлежит ни к одной из предыдущих четверок, получим $N - 3$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$.

В пространственной системе, в которой никакие три точки не лежат на одной прямой, приложим равные и противоположно направленные силы к парам точек, номера которых различаются на одну, две и три единицы, и получим $3N - 6$ групп сил $\mathbf{f}_{i\lambda}$, обладающих требуемыми свойствами.

Образуем векторы

$$\boldsymbol{\beta}_{i\lambda} = \frac{M}{m_i} \mathbf{f}_{i\lambda} \tag{3.2}$$

Ортонормируя $\boldsymbol{\beta}_{i\lambda}$, получим единичные перемещения $\mathbf{b}_{i\lambda}$. Потребуем, чтобы

$$\Sigma m_i \mathbf{b}_{i\lambda}\mathbf{b}_{i\mu} = \begin{cases} M, & \lambda = \mu \\ 0, & \lambda \neq \mu \end{cases} \tag{3.3}$$

Для ортонормирования $\boldsymbol{\beta}_{i\lambda}$ с весами m_i применим процесс Грама — Шмидта и представим

$$\boldsymbol{\beta}_{i\lambda} = C_{1\lambda}\mathbf{b}_{i1} + C_{2\lambda}\mathbf{b}_{i2} + \ldots + C_{\lambda\lambda}\mathbf{b}_{i\lambda} \tag{3.4}$$

Скаляры $C_{\mu\lambda}$ определяются из условия (3.3).

Полученная система единичных перемещений по построению полна, так что любые векторы $\mathbf{B}_i$, удовлетворяющие условиям

$$\Sigma m_i \mathbf{B}_i = 0, \qquad \Sigma m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{B}_i = 0$$

могут быть представлены как линейные комбинации $\mathbf{b}_{i\lambda}$.

Отметим, что единичные перемещения зависят от конфигурации жесткой системы и от распределения в ней масс, но не зависят от жесткостей упругих связей.

При определении $\mathbf{b}_{i\lambda}$ описанным здесь способом нет необходимости определять положение центра масс и направления главных осей инерции; в общем случае эти операции необходимы.

4. **Кинетическая энергия.** Скорость i-й точки получим, дифференцируя по времени t радиус-вектор $\mathbf{r}^0{}_i$ согласно (2.3.1)

$$\frac{d\mathbf{r}_i^\circ}{dt} = \mathbf{r}_c^{\circ\cdot} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} + \frac{d\mathbf{V}_i}{dt} \tag{4.1}$$

Первый член в правой части есть скорость центра масс упругой системы. Далее

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{r}_i^{\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$$

Здесь первый член в правой части отличен от нуля, если конфигурация жесткой системы изменяется во времени. Будем считать конфигурацию жесткой системы неизменной и, следовательно, положим $\mathbf{r}^{\cdot}{}_i = 0$.

Угловую скорость ω жесткой системы будем считать малой. В выражении для скорости i-й точки

$$\frac{d\mathbf{r}_i^\circ}{dt} = \mathbf{r}_c^{\circ\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r}_i + \mathbf{V}_i) + \mathbf{V}_i^{\cdot}$$

пренебрежем малым перемещением $\mathbf{V}_i$ сравнительно с конечной величиной $\mathbf{r}_i$ и придем к следующему выражению:

$$\frac{d\mathbf{r}_i^\circ}{dt} = \mathbf{r}_c^{\circ\cdot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i + \mathbf{V}_i^{\cdot} \tag{4.2}$$

Из (2.2) нетрудно получить равенства

$$\Sigma m_i \mathbf{V}_i^{\cdot} = 0, \qquad \Sigma m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{V}_i^{\cdot} = 0 \tag{4.3}$$

означающие, что при принятом здесь определении упругих перемещений количество движения и кинетический момент относительно центра масс упругого движения равны нулю.

Учтя (4.3), а также (2.4), представим кинетическую энергию упругой системы в виде

$$T = {}^1/_2 M \mathbf{r}_c^{\circ\cdot 2} + {}^1/_2 \Sigma m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 + {}^1/_2 \Sigma m_i \mathbf{V}_i^{\cdot 2}$$

При помощи (2.5) и (3.3) преобразуем это так:

$$T = {}^1/_2 M \mathbf{r}_c^{\circ\cdot 2} + {}^1/_2 \Sigma m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i)^2 + {}^1/_2 M q_\lambda^{\cdot 2} \tag{4.4}$$

Первые два члена в правой части представляют кинетическую энергию жесткой системы, последний член есть кинетическая энергия упругого движения.

Обобщенные импульсы в упругом движении

$$\frac{\partial T}{\partial q_\lambda^{\cdot}} = M q_\lambda^{\cdot} \tag{4.5}$$

Обобщенные импульсы в движении базиса $\mathbf{e}_j'$ вычисляются так же, как при движении твердого тела.

5. **Потенциальная энергия и уравнения движения.** Определим единичные силы

$$\mathbf{p}_{i\lambda} = \frac{m_i}{M} \mathbf{b}_{i\lambda} \tag{5.1}$$

Легко видеть, что $\mathbf{p}_{i\lambda}$ статически эквивалентны нулю.

Отметим, что силы $\mathbf{p}_{i\lambda}$ производят работу на единичных перемещениях $\mathbf{b}_{i\lambda}$ но не производят работы на $\mathbf{b}_{i\mu}(\mu \neq \lambda)$. Это следует из (3.3).

Приложим к точкам системы какую-либо систему статически эквивалентных нулю сил $\mathbf{P}_i$, которая необходимо является линейной комбинацией из сил $\mathbf{p}_{i\lambda}$

$$\mathbf{P}_i = s_\lambda \mathbf{p}_{i\lambda} \tag{5.2}$$

Приложение сил $\mathbf{P}_i$ вызывает появление упругих перемещений $\mathbf{V}_i = q_\lambda \mathbf{b}_{i\lambda}$. Работа сил $\mathbf{P}_i$ на перемещениях $\mathbf{V}_i$ равна потенциальной энергии деформации системы

$$\Pi = {}^1/_2 \Sigma s_\lambda q_\mu \mathbf{p}_{i\lambda} \mathbf{b}_{i\mu}, \qquad \Pi = {}^1/_2 s_\lambda q_\lambda \tag{5.3}$$

Здесь приняты во внимание (5.2), (2.5), (3.3).

Приложив к упругой системе силы $\mathbf{p}_{i\lambda}$, вычислим перемещения

$$q_\lambda = \delta_{\lambda\mu} s_\mu \tag{5.4}$$

Здесь $\delta_{\lambda\mu}$ — коэффициенты Максвелла [1,2]. Если упругие связи суть стержни, то $\delta_{\lambda\mu}$ вычисляются по формуле Мора [1,2], которая в символическом виде может быть записана так:

$$\delta_{\lambda\mu} = \int \frac{T_\lambda T_\mu}{B}\, ds$$

Здесь T_λ, T_μ — напряженные состояния в упругих связях при приложении единичных сил соответственно $\mathbf{p}_{i\lambda}$ и $\mathbf{p}_{i\mu}$, B жесткости связей. Формула Мора может быть использована и в том случае, когда упругие связи содержат не только стержни, но и пластинки. Коэффициенты Максвелла вычисляются путем приложения статической нагрузки.

Разрешив (5.4) относительно s_μ, получим $s_\mu = c_{\mu\lambda} q_\lambda$, где $c_{\mu\lambda}$ — числа влияния, которые можно получить как элементы матрицы $c = \| c_{\mu\lambda} \|$, обратной матрице Максвелла $\delta = \| \delta_{\lambda\mu} \|$. Подставив найденные значения s в (5.4), получим

$$\Pi = {}^1/_2\, c_{\lambda\mu} q_\lambda q_\mu \tag{5.5}$$

Если потенциальная энергия системы зависит от ее положения в некотором силовом поле, в выражение для Π вводятся слагаемые, соответствующие потенциальной энергии твердого тела и, следовательно, не зависящие от упругих обобщенных координат q_λ.

Обобщенные силы в упругом движении

$$Q_\lambda = \Sigma \mathbf{R}_i \frac{\partial \mathbf{r}_i^\circ}{\partial q_\lambda}, \qquad Q_\lambda = \Sigma \mathbf{R}_i \mathbf{b}_{i\lambda} \tag{5.6}$$

Здесь приняты во внимание (2.3.1) и (2.5); $\mathbf{R}_i$ — внешние силы. Обобщенные силы, отвечающие движению базиса $\mathbf{e}'_j$, определяются так же, как при движении твердого тела.

Уравнения упругого движения согласно (4.5) и (5.5)

$$M q_\lambda^{\cdot\cdot} + c_{\lambda\mu} q_\mu = Q_\lambda \tag{5.7}$$

Уравнения движения базиса $\mathbf{e}_j'$ не отличаются от уравнений движения твердого тела.

Если внешние силы не зависят от упругих перемещений, уравнения движения базиса $\mathbf{e}_j'$ и уравнения упругого движения разделяются. При необходимости учесть диссипацию энергии, можно ввести диссипативную функцию [3].

Связь нужно считать абсолютно жесткой, если при приложении сил $\mathbf{p}_{i\lambda}$ согласно (5.1) не имеется упругих перемещений. Если система имеет k жестких связей, то ее общее число степеней свободы равно $3N - k$; столько же имеется и уравнений движения. Очевидно, нет необходимости строить силы $\mathbf{p}_{i\lambda}$, соответствующие жестким связям, и определять по ним коэффициенты Максвелла.

6. **Независимость упругого движения от выбора единичных упругих перемещений.** Для одной и той же системы векторы $\mathbf{b}_{i\lambda}$ могут быть выбраны различным образом. Покажем, что упругое движение не зависит от выбора $\mathbf{b}_{i\lambda}$.

Пусть наряду с полной системой $\mathbf{b}_{i\lambda}$ имеется другая полная система $\mathbf{b}_{i\lambda}^*$, которая может быть представлена как линейная комбинация из $\mathbf{b}_{i\lambda}$

$$\mathbf{b}_{i\lambda}^* = a_{\lambda\mu}\mathbf{b}_{i\mu} \qquad (6.1)$$

Обе системы векторов $\mathbf{b}_{i\lambda}$ и $\mathbf{b}_{i\lambda}^*$ ортонормированы согласно (3.3). Из равенства

$$\Sigma m_i \mathbf{b}_{i\lambda}^* \mathbf{b}_{i\mu}^* = a_{\lambda\nu} a_{\mu\rho} \Sigma m_i \mathbf{b}_{i\nu} \mathbf{b}_{i\rho}$$

с учетом (3.3) имеем

$$a_{\lambda\nu} a_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \lambda = \mu \\ 0, & \lambda \neq \mu \end{cases} \qquad (6.2)$$

Введем матрицу $a = \| a_{\lambda\mu} \|$ и представим (6.2) в виде $aa' = E$, где a' транспонированная матрица a, E — единичная матрица. Отсюда $a' = a^{-1}$, так что матрица a — ортогональная. Силы $\mathbf{p}_{i\lambda}$ и $\mathbf{p}_{i\lambda}^*$, порожденные векторами $\mathbf{b}_{i\lambda}$ и $\mathbf{b}_{i\lambda}^*$, связаны равенствами

$$\mathbf{p}_{i\lambda}^* = a_{\lambda\mu}\mathbf{p}_{i\mu}$$

Между коэффициентами Максвелла $\delta_{\lambda\mu}$ и $\delta_{\lambda\mu}^*$ имеется зависимость

$$\delta_{\lambda\mu}^* = a_{\lambda\nu} a_{\mu\rho}\, \delta_{\nu\rho}$$

или

$$\delta^* = a\delta a' \qquad (6.3)$$

Обращая (6.3), получим

$$c^* = aca' \qquad (6.4)$$

Нетрудно убедиться, что матрицы-столбцы обобщенных упругих сил Q и Q^* удовлетворяют равенству

$$Q^* = aQ \qquad (6.5)$$

Введя матрицы-столбцы обобщенных упругих координат q и q^*, получим уравнения упругого движения, полученные исходя из $\mathbf{b}_{i\lambda}$ и $\mathbf{b}_{i\lambda}^*$

$$Mq^{\cdot\cdot} + cq - Q = 0 \qquad (6.6)$$

$$Mq^{*\cdot\cdot} + c^*q^* - Q^* = 0 \qquad (6.7)$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$a[M(a'q^*)^{\cdot\cdot} + c(a'q^*) - Q] = 0$$

Сравнив это с (6.6), нетрудно убедиться, что решения (6.6) и (6.7) связаны равенством

$$q = a'q^*, \qquad q_\lambda = a_{\mu\lambda}\, q_\mu^*$$

Упругие перемещения согласно (2.5) $\mathbf{V}_i = q_\lambda \mathbf{b}_{i\lambda}$. Одновременно

$$\mathbf{V}_i = a_{\mu\lambda} q_\mu^* \mathbf{b}_{i\lambda} = q_\mu^* \mathbf{b}_{i\mu}^*$$

Таким образом, упругие перемещения $\mathbf{V}_i$ одинаковы в обоих случаях и, следовательно, не зависят от выбора $\mathbf{b}_{i\lambda}$.

7. **Формализованный способ определения единичных упругих перемещений.** Рассмотрим преобразование произвольных внешних сил $\mathbf{R}_i$, приложенных к жесткой системе. Представим

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{S}_i + \mathbf{F}_i \qquad (7.1)$$

где силы $\mathbf{S}_i$ имеют те же равнодействующую $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{L}_c$ относительно центра масс, что силы $\mathbf{R}_i$

$$\Sigma\mathbf{S}_i = \Sigma\mathbf{R}_i = \mathbf{R}, \qquad \Sigma\mathbf{r}_i\times\mathbf{S}_i = \Sigma\mathbf{r}_i\times\mathbf{R}_i = \mathbf{L}_c \tag{7.2}$$

Наложим еще требование, чтобы при действии сил $\mathbf{S}_i$ усилия в упругих связях были равны нулю. Из (7.1) и (7.2) следует, что в каждый момент времени силы $\mathbf{F}_i$, создающие усилия в связях, статически эквивалентны нулю.

Рассмотрим движение системы под действием сил $\mathbf{S}_i$. Если усилия в связях отсутствуют, каждая точка движется без взаимодействия с остальными. Ее уравнение движения

$$m_i \frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}_i^{\circ} = \mathbf{S}_i$$

при помощи (2.3.1) может быть представлено в виде

$$m_i\mathbf{r}_i^{\circ\cdot\cdot} + m_i \frac{d}{dt}\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i = \mathbf{S}_i$$

Суммируя по i все эти равенства с учетом (2.4), получаем

$$M\mathbf{r}_c^{\circ\cdot\cdot} = \mathbf{R}$$

Уравнение движения i-й точки получает вид

$$\mathbf{S}_i = \frac{m_i}{M}\mathbf{R} + m_i\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}_i + m_i\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_i)$$

В случае малости угловой скорости базиса $\mathbf{e}_j'$ последним членом в правой части можно пренебречь и получить

$$\mathbf{S}_i = \frac{m_i}{M}\mathbf{R} + m_i\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}_i \tag{7.3}$$

Умножив все эти равенства векторно слева на $\mathbf{r}_i$ и суммируя по всем точкам системы, получим с учетом (7.2) и (2.4)

$$\Sigma m_i\mathbf{r}_i\times(\boldsymbol{\omega}^{\cdot}\times\mathbf{r}_i) = \mathbf{L}_c$$

откуда легко выразить $\boldsymbol{\omega}^{\cdot}$ через $\mathbf{L}_c$, т. е. через внешние силы

$$\boldsymbol{\omega}^{\cdot} = \frac{L_{c1}}{I_1}\mathbf{e}_1' + \frac{L_{c2}}{I_2}\mathbf{e}_2' + \frac{L_{c3}}{I_3}\mathbf{e}_3', \quad \mathbf{L}_c = L_{c1}\mathbf{e}_1' + L_{c2}\mathbf{e}_2' + L_{c3}\mathbf{e}_3'$$

Здесь I_k— главные центральные моменты инерции жесткой системы.

Силы $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами (7.3), а силы $\mathbf{F}_i$ можно найти из (7.1): $\mathbf{F}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{S}_i$.

Для построения формализованного процесса определения единичных перемещений $\mathbf{b}_{i\lambda}$ для произвольной системы определим $3N$ систем внешних сил $\mathbf{R}_i^{(\mu)}$ ($i = 1,2, \ldots, N$; $\mu = 1,2,\ldots, 3N$) таких, что каждая система состоит из единственной силы $\mathbf{R}_i^{(\mu)}$, приложенной к какой-либо точке в направлении одного из ортов $\mathbf{e}_j'$, и что среди систем $\mathbf{R}_i^{(\mu)}$ нет ни одной пары одинаковых. Очевидно, все векторы $\mathbf{f}_{i\lambda}$, $\boldsymbol{\beta}_{i\lambda}$, $\mathbf{b}_{i\lambda}$, $\mathbf{p}_{i\lambda}$ введенные выше, суть линейные комбинации сил $\mathbf{R}_i^{(\mu)}$.

Для каждой системы сил $\mathbf{R}_i^{(\mu)}$ определим силы $\mathbf{S}_i^{(\mu)}$ и затем

$$\mathbf{F}_i(\mu) = \mathbf{f}_{i\mu} \tag{7.4}$$

Далее определим векторы $\boldsymbol{\beta}_{i\lambda}$ при помощи (3.2), а затем, ортонормируя $\boldsymbol{\beta}_{i\lambda}$, найдем $\mathbf{b}_{i\lambda}$. При выполнении этих вычислений наверное встретятся случаи, когда в равенствах типа (3.4) скаляры $C_{\lambda\lambda}$ окажутся равными нулю. Это значит, что $\boldsymbol{\beta}_{i\lambda}$ есть линейная комбинация из $\mathbf{b}_{i\mu}$ ($\lambda > \mu$). В таких случаях следует пропустить векторы $\mathbf{b}_{i\lambda}$ и рассмотреть следующие векторы $\mathbf{b}_{i,\,\lambda+1}$.

Поступила 11 II 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962.
2. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1963.
3. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.