

## О ДЕФОРМАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И СЛОЖНЫХ СРЕД

И. А. Бережной, Д. Д. Ивлев, Е. В. Макаров  
(Куйбышев, Москва)

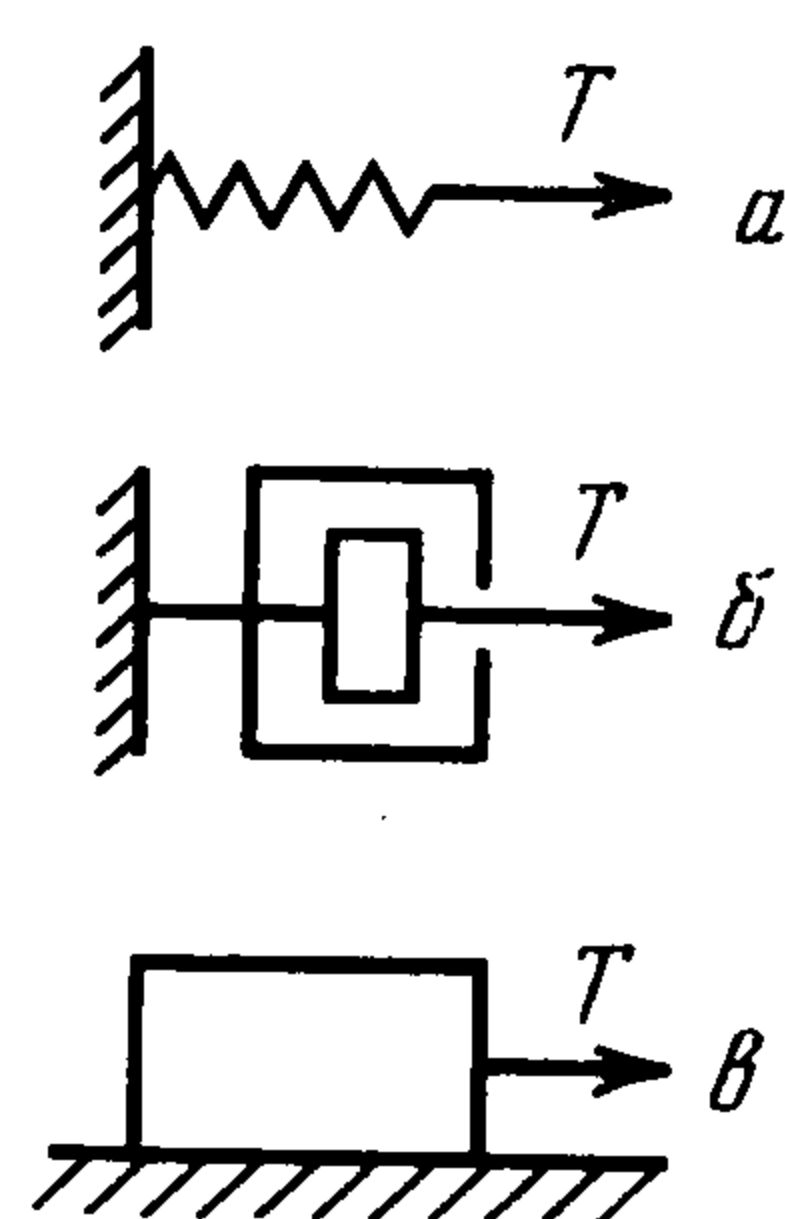
Рассматриваются модели различных сложных сред, основанные на введении центрального механизма трения. Подобные механизмы пластичности позволяют предложить обоснование деформационных теорий пластичности, отличное от известных [1-4]. Рассматривается также модель теории пластичности, обобщающая теорию идеальной пластичности, описывающая эффекты, характерные для теории анизотропного упрочнения, без введения «упругих микронапряжений».

1. При рассмотрении свойств различных сплошных сред, проявляемых при квазистатическом нагружении в ряде случаев полезно использовать механические аналогии, позволяющие наглядно иллюстрировать те или иные свойства сред. Обычно при моделировании свойств упругой среды рассматривают упругую пружину (фиг. 1, а), вязкой — поршень в вязкой жидкости (фиг. 1, б), пластической — тело на трущейся поверхности (фиг. 1, в). Инерционные свойства моделей не рассматриваются.

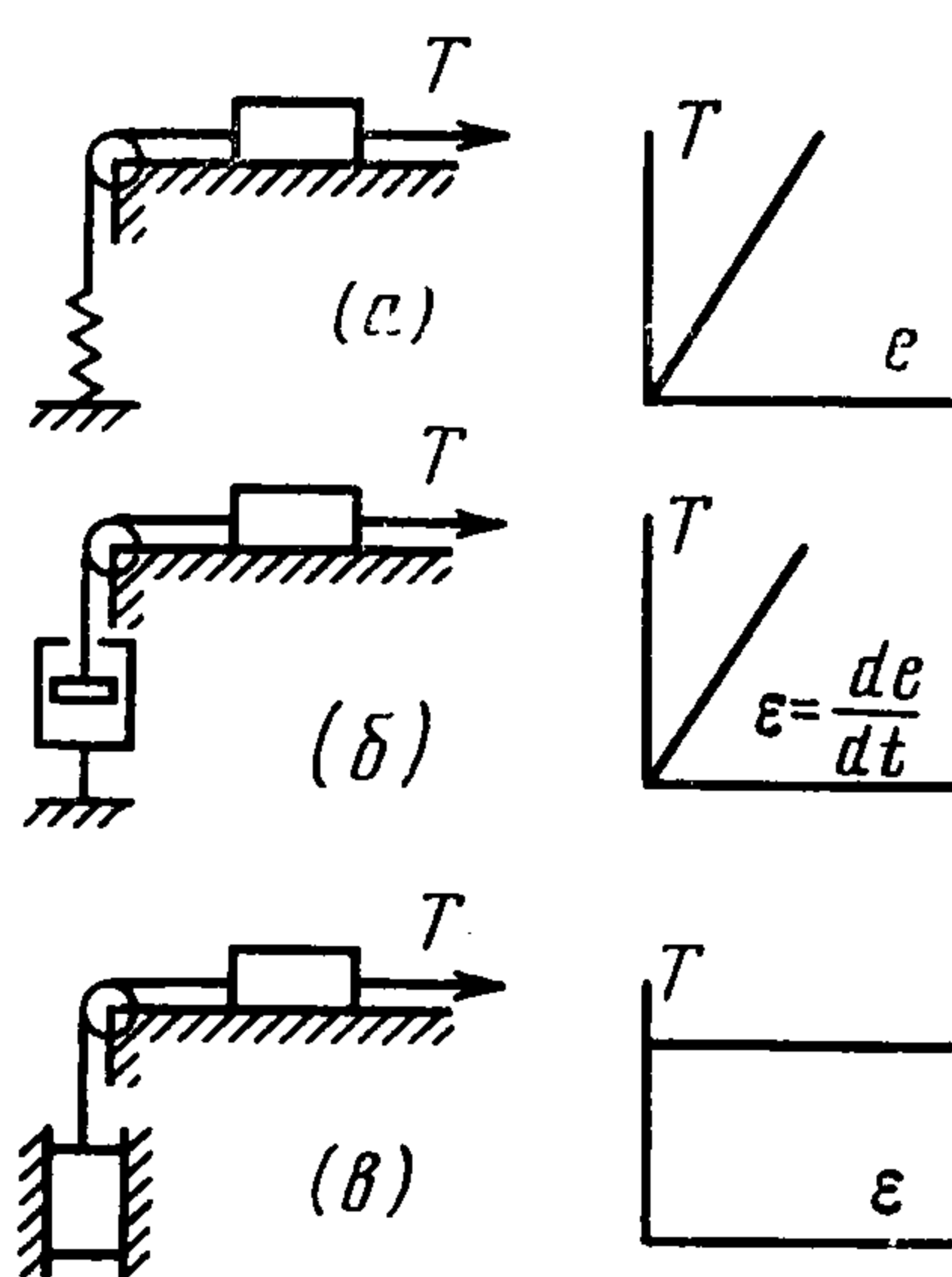
Указанные модели можно представить в несколько другом виде, удобном для дальнейших обобщений.

Представим себе, что упругий элемент соединен посредством гибкой нерастяжимой нити, перекинутой через идеальный блок, с элементом, расположенным на горизонтальной плоскости без трения, и к которому приложено усилие  $T$  (фиг. 2, а). Очевидно, по своим свойствам эта механическая модель не отличается от модели, изображенной на фиг. 1, а. Аналогично могут быть введены механические модели вязкости и трения (фиг. 2, б, в). Очевидно, что в моделях, изображенных на фиг. 2 помимо инерционных свойств не следует рассматривать собственный вес элементов. Например, вес поршня вязкого элемента или вес элемента трения на фиг. 2, б, в.

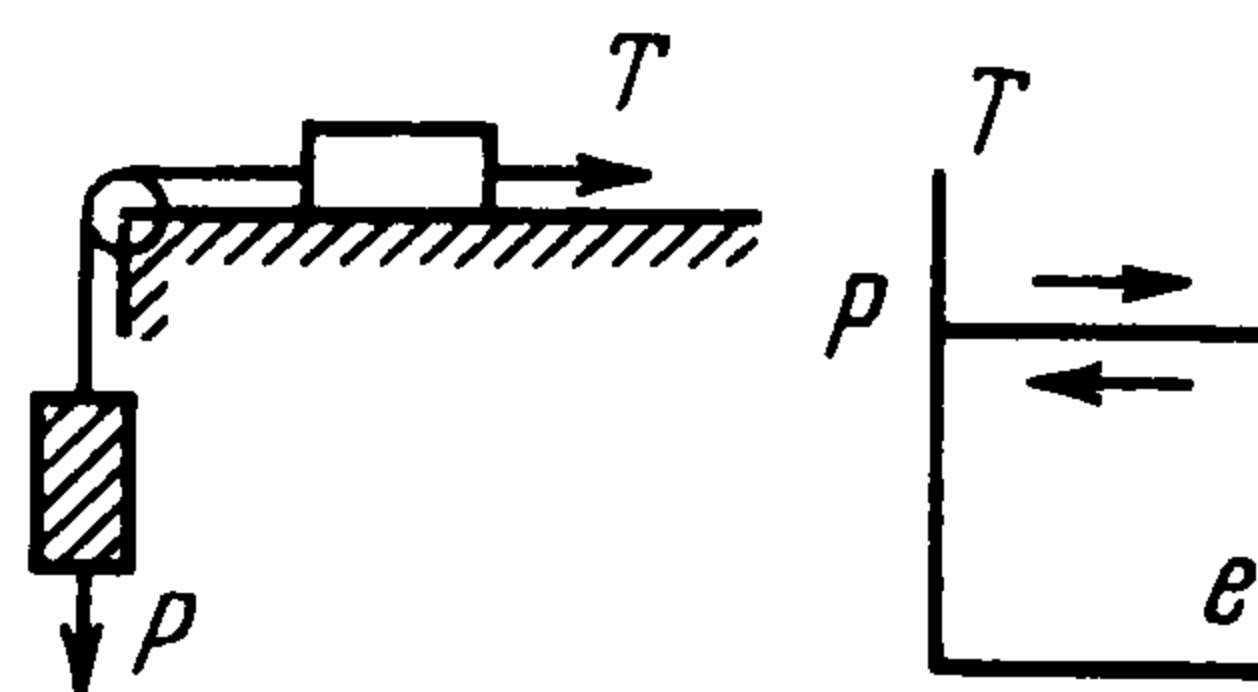
Схема с вертикально расположенными механизмами может быть использована для введения модели, элементом которой служит груз весом  $P$  (фиг. 3). В этом случае, очевидно, диаграмма сила-перемещение при нагружении имеет вид, аналогичный модели с трением (фиг. 2, в), но процессы нагрузки и разгрузки обратимы и по существу имеют место явления, характерные для нелинейно-упругих тел. Отметим, что использование элемента тяжести не вносит каких-либо принципиальных моментов для



Фиг. 1



Фиг. 2



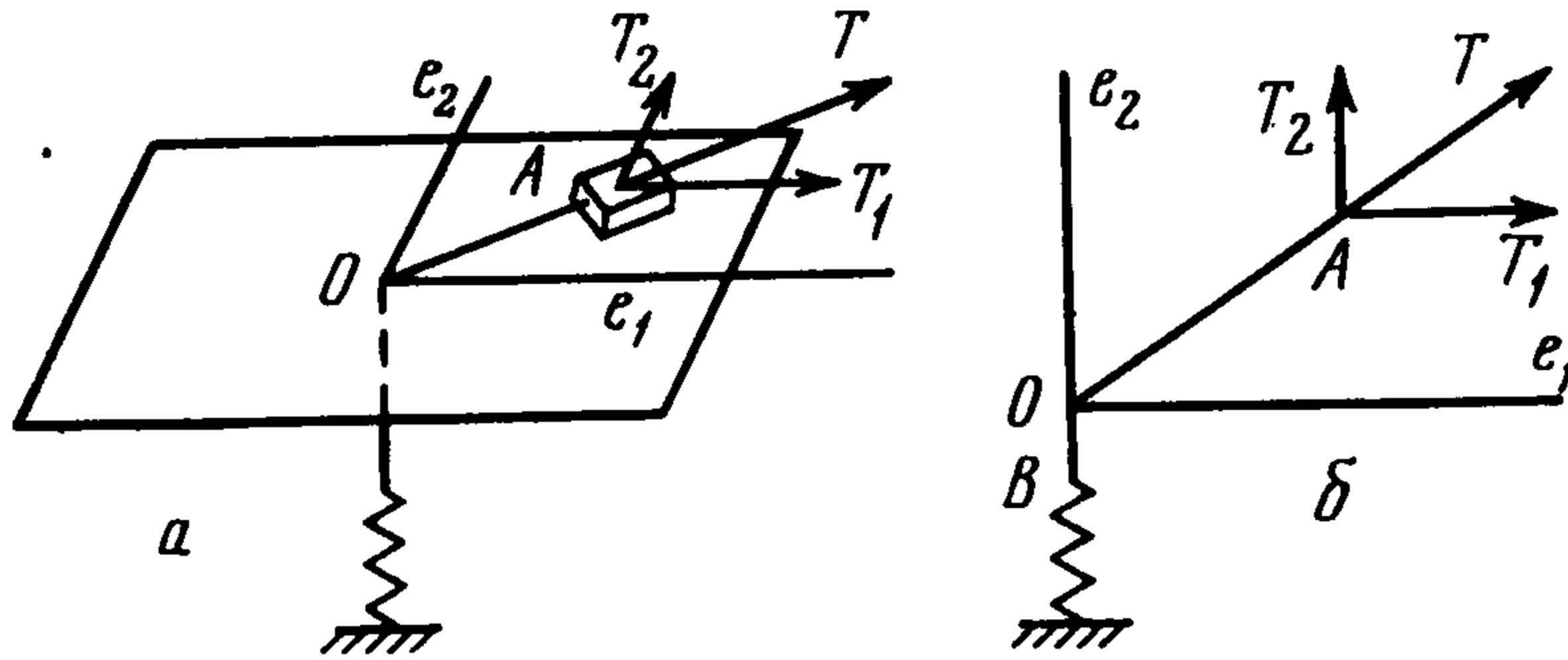
Фиг. 3

определения моделей упругих тел: пружины с нелинейными характеристиками и переменное поле тяжести (эквивалентное состояние достигается, например, изменением массы груза) приводят к моделям с одинаковыми механическими свойствами.

Схема с вертикально расположенными механизмами позволяет ввести двумерные модели пластических, упруго-пластических и других сложных сред, отличные от рас-

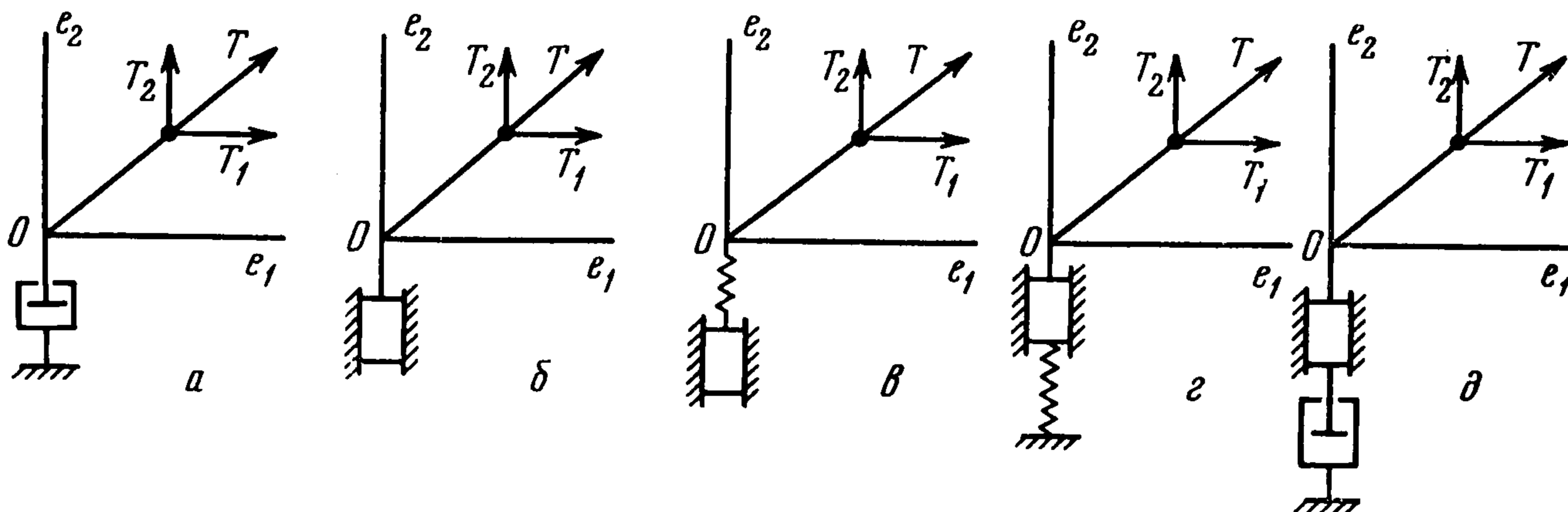
смотренных ранее и свойства которых могут быть положены в основу обоснования деформационных теорий сложных сред.

Представим двумерную модель упругого тела: на горизонтальной плоскости к гибкой нерастяжимой нити в точке  $A$  приложено усилие  $T$  с составляющими  $T_1$ ,  $T_2$ . Приращение перемещения точки  $A$  обозначим через  $\Delta e$  с составляющими  $\Delta e_1$ ,  $\Delta e_2$ .



Фиг. 4

Величину  $e = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$  назовем интенсивностью перемещений. Нить  $AB$  проходит через отверстие в начале координат и соединяется в точке  $B$  с вертикально расположенной упругой пружиной (фиг. 4, а). На фиг. 4, б та же модель представлена в схематизированном виде. Аналогичные схемы двумерных моделей для вязкого, пластического, упруго-пластического, пластического, упрочняющегося и вязко-пластического тела представлены соответственно на фиг. 5, а — д.



Фиг. 5

Во всех двумерных моделях, показанных на фиг. 4,5, элемент в горизонтальной плоскости идеально гладкий, всякие силы трения между ним и горизонтальной плоскостью отсутствуют.

Составим основные уравнения, определяющие поведение механических моделей, изображенных на фиг. 4,5.

Для упругой модели (фиг. 4) будем иметь

$$\frac{e_1}{T_1} = \frac{e_2}{T_2}, \quad \sqrt{T_1^2 + T_2^2} = c \sqrt{e_1^2 + e_2^2} \quad (1.1)$$

где  $c$  — коэффициент жесткости пружины.

Для всех последующих моделей (фиг. 5) независимо от природы механизмов будет также иметь место пропорциональность перемещений и усилий

$$\frac{e_1}{T_1} = \frac{e_2}{T_2} \quad (1.2)$$

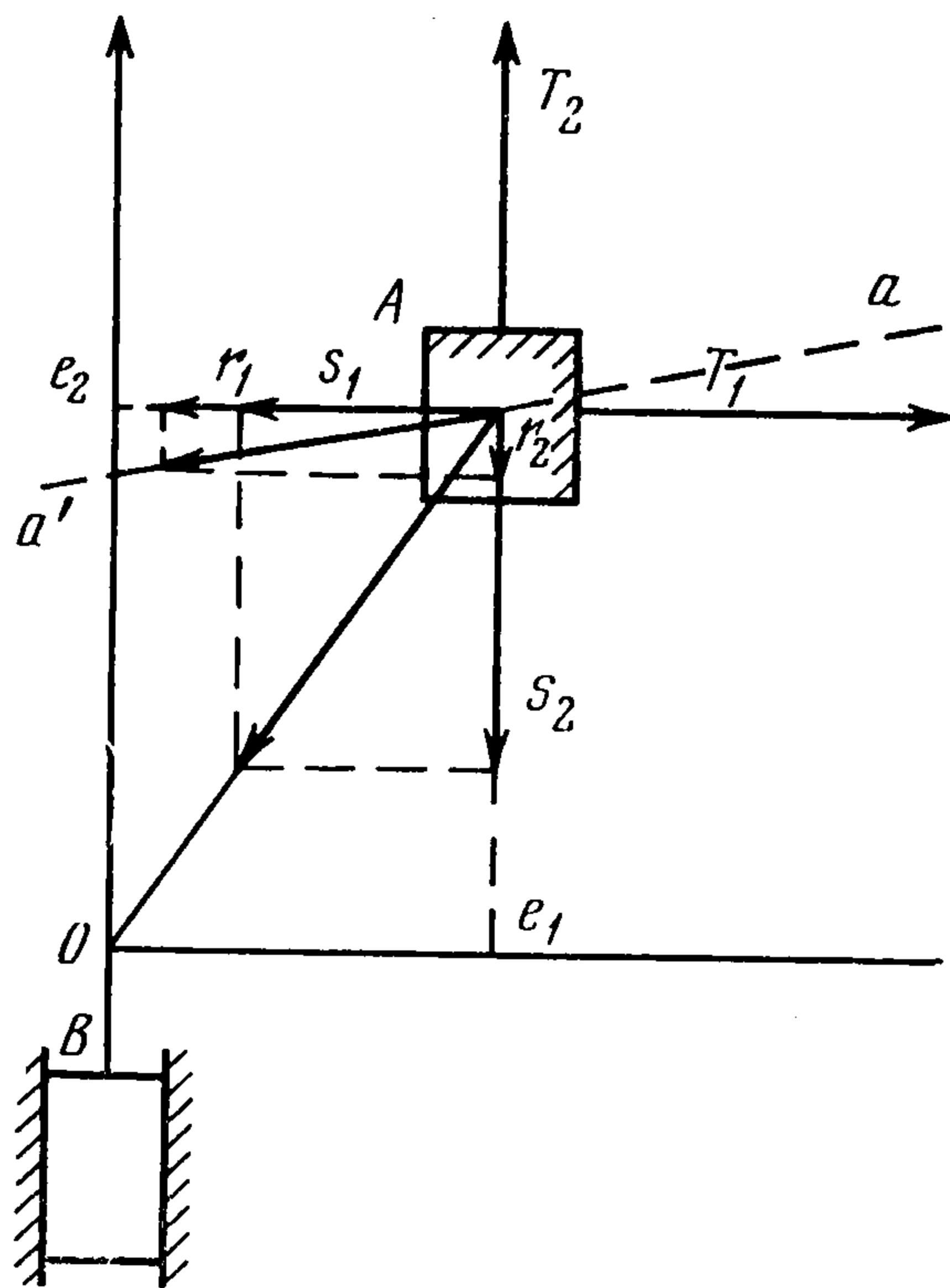
Для модели вязкого тела (фиг. 5, а) имеет место

$$\sqrt{T_1^2 + T_2^2} = \mu \sqrt{\dot{e}_1^2 + \dot{e}_2^2}, \quad e_i = \frac{de_i}{dt} \quad (1.3)$$

где  $\mu$  — коэффициент вязкости.



Заметим, кстати, что двумерной моделью, иллюстрирующей свойства идеальной жидкости, может служить тело на гладкой горизонтальной плоскости.



Фиг. 7

Для несжимаемого упругого тела также существует деформирование без изменения потенциальной нагрузки при постоянной интенсивности напряжений.

3. Рассмотрим соотношения деформационной теории идеальной пластичности. При использовании динамических аналогий усилиям ставится в соответствие дивизор напряжений, перемещениям — дивизор деформаций. Зависимость между первыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций формулируется независимо.

Условию (1.4) поставим в соответствие условие пластичности

$$\sigma_{ij}' \sigma_{ij}' = k^2, \quad k = \text{const} \quad (3.1)$$

Здесь и далее штрих означает компоненты дивизоров.

Условию (1.2) соответствуют соотношения

$$e_{ij}' = \lambda \sigma_{ij}' \quad (3.2)$$

Величина  $\lambda$  определяется согласно (1.3), (1.4), откуда  $\lambda = (1/k) (e'_{ij} e_{ij}')^{1/2}$ .

Мерой пластической деформации считается величина  $e_u' = (e_{ij}' e_{ij}')^{1/2}$ . Пластическая деформация неизменна, если  $e_u' = \text{const}$ ,  $de_u' = 0$ .

Соотношение деформационной теории упрочняющегося пластического тела будет полностью совпадать с соотношениями теории малых упруго-пластических деформаций

$$e_{ij}' = \frac{e_u'}{\sigma_u'} \sigma_{ij}', \quad \sigma_u' = \Phi(e_u'), \quad \sigma_u' = (\sigma_{ij}' \sigma_{ij}')^{1/2} \quad (3.3)$$

При этой интерпретации пластическое деформирование связано с величиной  $de_u'$ . При  $de_u' = 0$  пластическое деформирование отсутствует.

Отметим, что совершенно аналогично могут быть записаны соотношения деформационной теории вязко-пластического тела и подобные модели, связанные с введенными моделями.

4. Остановимся на одной модели пластического тела. Рассмотрим следующую двумерную модель (фиг. 7). На горизонтальной плоскости расположен элемент сухого трения A, соединенный в свою очередь тягой AB с элементом сухого трения B. Под действием внешних усилий  $T_1$ ,  $T_2$  элемент смещается в направлении прямой  $aa'$ .

Реакция сухого трения элемента A имеет компоненты  $r_1$ ,  $r_2$ , результирующая их направлена против движения элемента, т. е. вдоль прямой  $aa_1$ . Усилия, передаваемые элементом сухого трения, обозначены через  $s_1$ ,  $s_2$ . Очевидно, в предельном состоянии будем иметь

$$T_1 = s_1 + r_1, \quad T_2 = s_2 + r_2, \quad s_1^2 + s_2^2 = k_1^2, \quad r_1^2 + r_2^2 = k_2^2$$

$$\frac{e_1}{s_1} = \frac{e_2}{s_2}, \quad \frac{de_1}{r_1} = \frac{de_2}{r_2} \quad (k_1, k_2 = \text{const}) \quad (3.4)$$

Из (3.4) получим

$$T_1^2 + T_2^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2(s_1 r_1 + s_2 r_2) \quad (3.5)$$

Отметим, что

$$s_i = \frac{k_1 e_i}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2}}, \quad r_i = \frac{k_2 d e_i}{\sqrt{d e_1^2 + d e_2^2}} \quad (i = 1, 2) \quad (3.6)$$

Тогда соотношение (3.5) легко преобразовать к виду

$$T_1^2 + T_2^2 = k_1^2 + k_2^2 + 2k_1 k_2 \left( \frac{e_1 d e_1 + e_2 d e_2}{\sqrt{e_1^2 + e_2^2} \sqrt{d e_1^2 + d e_2^2}} \right) \quad (3.7)$$

Из соотношения (3.4), (3.6) получим также

$$\frac{d e_1}{T_1 - k_1 e_1 / \sqrt{e_1^2 + e_2^2}} = \frac{d e_2}{T_2 - k_2 e_2 / \sqrt{e_1^2 + e_2^2}} \quad (3.8)$$

Обозначим  $dD = T_1 d e_1 + T_2 d e_2$ . Из (3.4) получим

$$dD = k_1 d (\sqrt{e_1^2 + e_2^2}) + k_2 \sqrt{(d e_1)^2 + (d e_2)^2} \quad (3.9)$$

Из соотношений (3.7), (3.8) следует, что максимальное внешнее усилие имеет место, когда направления  $e_i$ ,  $d e_i$  совпадают, в этом случае

$$T_1^2 + T_2^2 = (k_1^2 + k_2^2) \quad (3.10)$$

Во всех других случаях внешнее усилие меньше величины (3.10). Из (3.9) следует, что, за исключением случая совпадения направлений  $e_i$  и  $d e_i$ , направления  $d e_i$  и  $T_i$  не совпадают, т. е. имеют место явления типа приобретенной анизотропии, описываемой, например, теорией трансляционного упрочнения. Однако в данном случае «упругих микронапряжений» нет, все механизмы, положенные в основу построения модели, необратимы.

Выпишем аналогичные соотношения теории пластичности. Условиям (3.4) будут соответствовать выражения

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}' &= s_{ij}' + r_{ij}', & s_{ij}' s_{ij}' &= k_1^2, & f(r_{ij}') &= k_2^2, & k_1, k_2 &= \text{const} \\ e_{ij}' &= \lambda s_{ij}', & d e_{ij}' &= d\mu \frac{\partial f}{\partial r_{ij}'} \end{aligned} \quad (3.11)$$

В простейшем случае

$$f(r_{ij}') = r_{ij}' r_{ij}' = k_2^2$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}' \sigma_{ij}' &= k_1^2 + k_2^2 + \frac{2k_1 k_2 e_{ij}' d e_{ij}'}{(e_{ij}' e_{ij}')^{1/2} (d e_{ij}' d e_{ij}')^{1/2}} \\ d e_{ij}' &= d\mu \left[ \sigma_{ij}' - \frac{k_1 e_{ij}'}{(e_{ij}' e_{ij}')^{1/2}} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

В предложенной теории максимальная величина  $\sigma_u = k_1 + k_2$ , вообще она зависит от косинуса угла между векторами  $e_{ij}'$  и  $d e_{ij}'$ . Из соотношений (3.11) в частном случае имеют место соотношения классической теории идеальной пластичности при  $k_1 = 0$ ,  $k_2 \neq 0$  и деформационной теории идеальной пластичности при  $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 = 0$ .

Поступила 21 XII 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И л е в Д. Д. О деформационных теориях пластичности. В сб.: «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды» (к 60-летию академика Л. И. Седова), М., «Наука», 1969.
2. И л ь ю ш и н А. А. Пластичность. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
3. К л ю ш н и к о в В. Д. Новые представления в пластичности и деформационная теория. ПММ, т. 23, вып. 4.
4. Р а б о т н о в Ю. Н. Модель, иллюстрирующая некоторые свойства упрочняющегося пластического тела. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.