О СУЩЕСТВОВАНИИ И СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ ВОЛН

В. М. Елеонский, Л. Г. Оганесьянц

(Москва)

Исследуются вопросы существования и верхней границы для скорости распространения простых установившихся волн для нелинейного волнового уравнения, возникающего, в частности, при анализе передачи сигнала в активной RCL — линии. Показано, что при определенных условиях, которым должны удовлетворять параметры нелинейной среды (параметры линии), существуют простые установившиеся волны и их скорость распространения не превосходит некоторой величины, строго меньшей предельной скорости распространения волн в среде.

Исследование простых установившихся волн в нелинейных средах, связанных либо с асимптотическим переходом системы из одного состояния равновесия в другое, либо с возвратом в исходное состояние, имеет большое прикладное значение. Достаточно указать на такие физические явления как распространение фронта нормального горения [1] или возбуждения в нейристорной линии [2], а также целый ряд процессов в распределенных полупроводниковых системах, подобных явлению Ганна [3].

Рассмотрим нелинейное волновое уравнение

$$D\left[\frac{1}{s^2}\frac{\partial^2 c}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\right]+\left[1-\frac{D}{s^2}\frac{dQ}{dc}\right]\frac{\partial c}{\partial t}=Q(c)\qquad (D=\mathrm{const}) \tag{1}$$

где s — предельная скорость распространения волны;

$Q(c)$ — нелинейный «источник».

При $s\to\infty$ уравнение (1) вырождается в нелинейное уравнение диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+Q(c) \tag{2}$$

Как говорилось выше, к волновому уравнению (1) приводит анализ передачи сигналов в активной RGL — линии передачи, описываемой системой нелинейных телеграфных уравнений вида

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial x}=Rj+L\frac{\partial j}{\partial t},\qquad -\frac{\partial j}{\partial x}=C\frac{\partial\varphi}{\partial t}+J(\varphi) \tag{3}$$

где R, C и L — соответственно сопротивление, емкость и индуктивность, отнесенные к единице длины, $J(\varphi)$ — нелинейный ток утечки. Система (3) определяет распределение потенциала $\varphi(x,\ t)$ и плотности тока $j(x,\ t)$ вдоль линии. Исключая $j(x,\ t)$ из системы (3), получим для потенциала $\varphi(x,t)$ уравнение, аналогичное уравнению (1), причем $s^2=(LC)^{-1}$, $D=(RG)^{-1}$.

Среди решений уравнения (1) представляет интерес определенный класс, соответствующий простым установившимся волнам, для которых $c(x,t)=c(x+ut)=c(\eta)$. Величина u есть скорость распространения волны. При этом уравнение (1) переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Вводя фазовую плоскость pc, получаем уравнение первого порядка для функции $p=p(c)$

$$\frac{dp}{dc}=\frac{u\,[1-Ds^{-2}Q(c)]\,p-Q(c)}{D\,(1-u^2s^{-2})\,p}\qquad \left(p\equiv\frac{dc}{d\eta}\right) \tag{4}$$

Для знакопостоянной функции $Q(c)$, обращающейся в нуль при $c=0$ и $c=1$ и обладающей наибольшей производной в нуле, простые установившиеся волны для нелинейного уравнения диффузии $(s\to\infty)$ были полностью изучены в работе А. Н. Колмогорова, И. Г. Петровского и Н. С. Пискунова [4].

Ниже исследуется случай знакопеременной функции $Q(c)$, обращающейся в нуль в трех точках ($c=0$, c_0, 1) и волнового уравнения ($s\neq\infty$).

Граничные условия имеют вид

$$\lim_{\eta\to-\infty}c(\eta)=0,\qquad \lim_{\eta\to\infty}c(\eta)=1,\qquad \lim_{\eta\to\pm\infty}\frac{dc}{d\eta}\equiv\lim_{c\to 0;\,1}p(c)=0 \tag{5}$$

Определим прямую установившуюся волну как волну, связанную с переходом из точки $c = 0$ в точку $c = 1$, для которой $p \equiv dc/d\eta > 0$ для всех $c \neq 0,1$. Соответственно, обратная установившаяся волна связана с переходом из точки $c = 1$ в точку $c = 0$, для которой $p \equiv dc/d\eta < 0$ для всех $c \neq 0, 1$. Уравнение (4) имеет три особые точки, две из которых именно (0,0) и (1,0) являются особыми точками типа «седла», а третья $(c_0, 0)$ — особой точкой типа «узла» или «фокуса» в зависимости от знака неравенства

$$u^2 \gtrless 4D\left(\frac{dQ}{dc}\right)_{c_0}\left[1+\frac{D}{s^2}\left(\frac{dQ}{dc}\right)_{c_0}\right]^{-2} \tag{6}$$

Простой установившейся волне на фазовой плоскости соответствует интегральная кривая, идущая из седла в седло и расположенная в верхней или нижней полуплоскости для прямой или обратной волны соответственно. Отметим, что искомая траектория является негрубой фазовой траекторией.

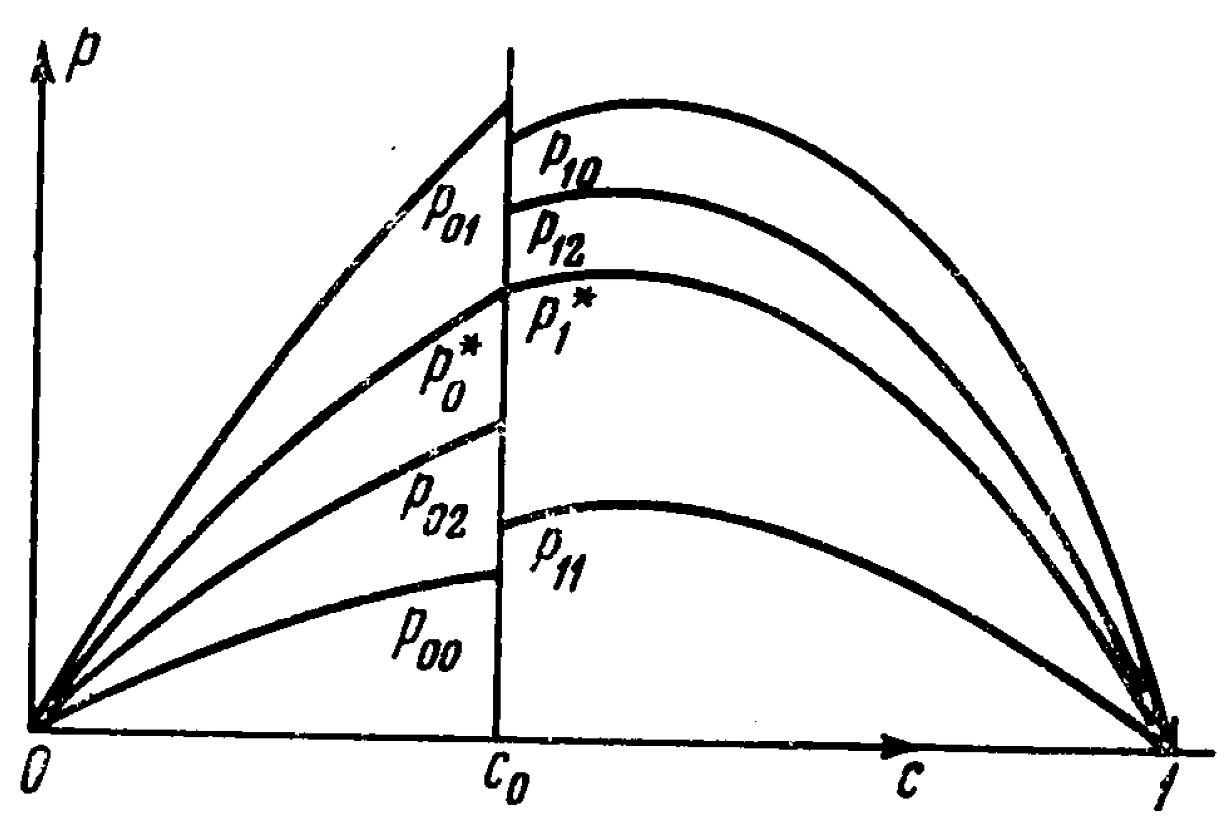
Сделаем следующие предположения.

1°. Функция $Q(c)$ — однозначная, непрерывно-дифференцируемая с ограниченной производной

$$Q(c) < 0, \quad 0 < c < c_0, \quad Q(c) > 0, \quad c_0 < c < 1$$
$$Q(0) = Q(c_0) = Q(1) = 0, \quad Q'(0) = -\alpha, \qquad Q'(1) = -\gamma \tag{7}$$

2°. Параметры нелинейной среды таковы, что выполняется неравенство:

$$Ds^{-2}\max_{0\leqslant c\leqslant 1} Q'(c) < 1$$
$$I(1) > 0\left(I(c) = \int_0^c Q(c)\,dc\right) \tag{8}$$



Фиг. 1

Для доказательства существования простой установившейся волны, достаточно доказать существование общей сепаратрисы двух седловых точек.

Теорема 1. Пусть функция $Q(c)$ удовлетворяет условиям 1°, 2°, тогда существует, и притом единственное, значение параметра $u = u^*$, при котором положительное решение уравнения (4) соединяет седловые особые точки.

Доказательство. Обозначим сепаратрисы седел (0,0) и (1,0), лежащие в верхней полуплоскости, соответственно через $p_0(c)$ и $p_1(c)$ при произвольном значении параметра u и через $p_{0i}(c)$ и $p_{1i}(c)$ при $u = u_i$ (фиг. 1). Угловые коэффициенты сепаратрис можно легко найти, решая характеристическое уравнение для линеаризованного, в окрестностях особых точек, уравнения (4).

Они равны соответственно для точек (0,0) и (1,0),

$$\begin{aligned}\lambda_0(u) &= (2D\omega)^{-1}\left[u(1+Ds^{-2}\alpha)+\sqrt{u^2(1-Ds^{-2}\alpha)^2+4D\alpha}\right]\\ \lambda_1(u) &= (2D\omega)^{-1}\left[u(1+Ds^{-2}\gamma)-\sqrt{u^2(1-Ds^{-2}\gamma)^2+4D\gamma}\right]\end{aligned} \tag{9}$$

где $\omega = 1 - u^2s^{-2}$.

Очевидно, что $\lambda_0(u)$ и $\lambda_1(u)$ — возрастающие функции параметра u.

Рассмотрим теперь «вырожденное» уравнение $(u = 0)$

$$p\frac{dp}{dc} = -\frac{1}{D}Q(c) \tag{10}$$

Интегрируя (10), получаем для сепаратрис вырожденного уравнения следующие выражения

$$p_{00}^2(c) = -\frac{2}{D}\int_0^c Q(x)\,dx, \qquad p_{10}^2(c) = \frac{2}{D}\int_c^1 Q(x)\,dx \tag{11}$$

Кривые $p_{00}(c)$ и $p_{10}(c)$ пересекают прямую $c = c_0$ в точках, определяемых функцией $Q(c)$.

Интегрируя уравнение (4), можно получить соотношения, которым удовлетворяют сепаратрисы при произвольных значениях параметра u

$$p_0^2(c) = \frac{2}{D\omega}\left\{u\int_0^c [1 - Ds^{-2}Q'(x)]\, p_0(x)\, dx - \int_0^c Q(x)\, dx\right\} \tag{12}$$

$$p_1^2(c) = \frac{2}{D\omega}\left\{-u\int_c^1 [1 - Ds^{-2}Q'(x)]\, p_1(x)\, dx + \int_c^1 Q(x)\, dx\right\} \tag{13}$$

Правая часть уравнения (4) является возрастающей функцией параметра u для всех $0 \leqslant c \leqslant 1$ и $p > 0$, поэтому, пользуясь теоремой С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах и свойствами угловых коэффициентов сепаратрис $\lambda_0(u)$ и $\lambda_1(u)$, можно показать (аналогично тому, как это сделано в [5], что при $u_1 > u_2 > 0$ для сепаратрис $p_{00}(c)$, $p_{01}(c)$, $p_{02}(c)$ и $p_{10}(c)$, $p_{11}(c)$, $p_{12}(c)$ справедливы следующие неравенства

$$p_{01}(c) > p_{02}(c) > p_{00}(c), \quad 0 < c \leqslant c_0 \tag{14}$$

$$p_{11}(c) < p_{12}(c) < p_{10}(c), \quad c_0 \leqslant c < 1 \tag{15}$$

Расположение этих сепаратрис показано на фиг. 1. Кроме того, используя второе условие (8) и формулы (11), нетрудно доказать справедливость следующего неравенства:

$$p_{00}(c_0) < p_{10}(c) \tag{16}$$

Далее легко установить, что правая часть уравнения (4) удовлетворяет условиям теоремы о непрерывной зависимости решения от параметра u. Используя эту теорему и учитывая свойства сепаратрис (14) и (15), приходим к выводу, что $p_0(c_0)$ и $p_1(c_0)$ являются непрерывными и соответственно монотонно-возрастающей и монотонно-убывающей функциями параметра u. Причем, $p_0(c_0)$ — неограниченно возрастает при $u \to s$, так как из (12) имеем

$$p_0^2(c_0) > -\frac{2}{D\omega}\int_0^{c_0} Q(x)\, dx$$

где ω, определенное в (9), стремится к нулю при $u \to s$. Теперь, очевидно, что найдется такое значение параметра $u = u^* < s$, и притом единственное, при котором $p_0{}^*(c) = p_1{}^*(c_0)$. Теорема доказана.

Замечания. 1. Аналогичная теорема может быть доказана для обратной установившейся волны при изменении последнего условия 2° на противоположное $I(1) < 0$.

2. При сохранении условия $I(1) > 0$ обратной волны не существует. Действительно, предположив противное, легко прийти к противоречию, если учесть, что в силу этого условия и свойств $Q(c)$, существует точка $c_0 < c^* < 1$ такая, что $I(c^*) = 0$ и рассмотреть соотношение (12) при $c = c^*$. Итак, значение $u = u^*$ есть скорость распространения простых установившихся волн. Причем оказывается, что u^* меньше величины, которая строго меньше предельной скорости распространения s. Следующая теорема дает оценку сверху для скорости распространения простых установившихся волн.

Теорема 2. Пусть функция $Q(c)$ удовлетворяет условиям 1° и первому неравенству (8), тогда для скорости распространения простой установившейся волны справедливы следующие оценки:

$$u^* < u^{\pm} < s, \qquad u^{\pm} \equiv \frac{2\sqrt{DQ^{\pm}}}{1 + Ds^{-2}Q^{\pm}} \tag{17}$$

где индексы плюс и минус относятся к прямой и обратной волнам соответственно, а

$$Q^+ = \max_{c_0 \leqslant c \leqslant 1} Q'(c), \qquad Q^- = \max_{0 \leqslant c \leqslant c_0} Q'(c) \tag{18}$$

Доказательство. Приводимое ниже доказательство основано на простом обобщении приема, использованного в работе [4].

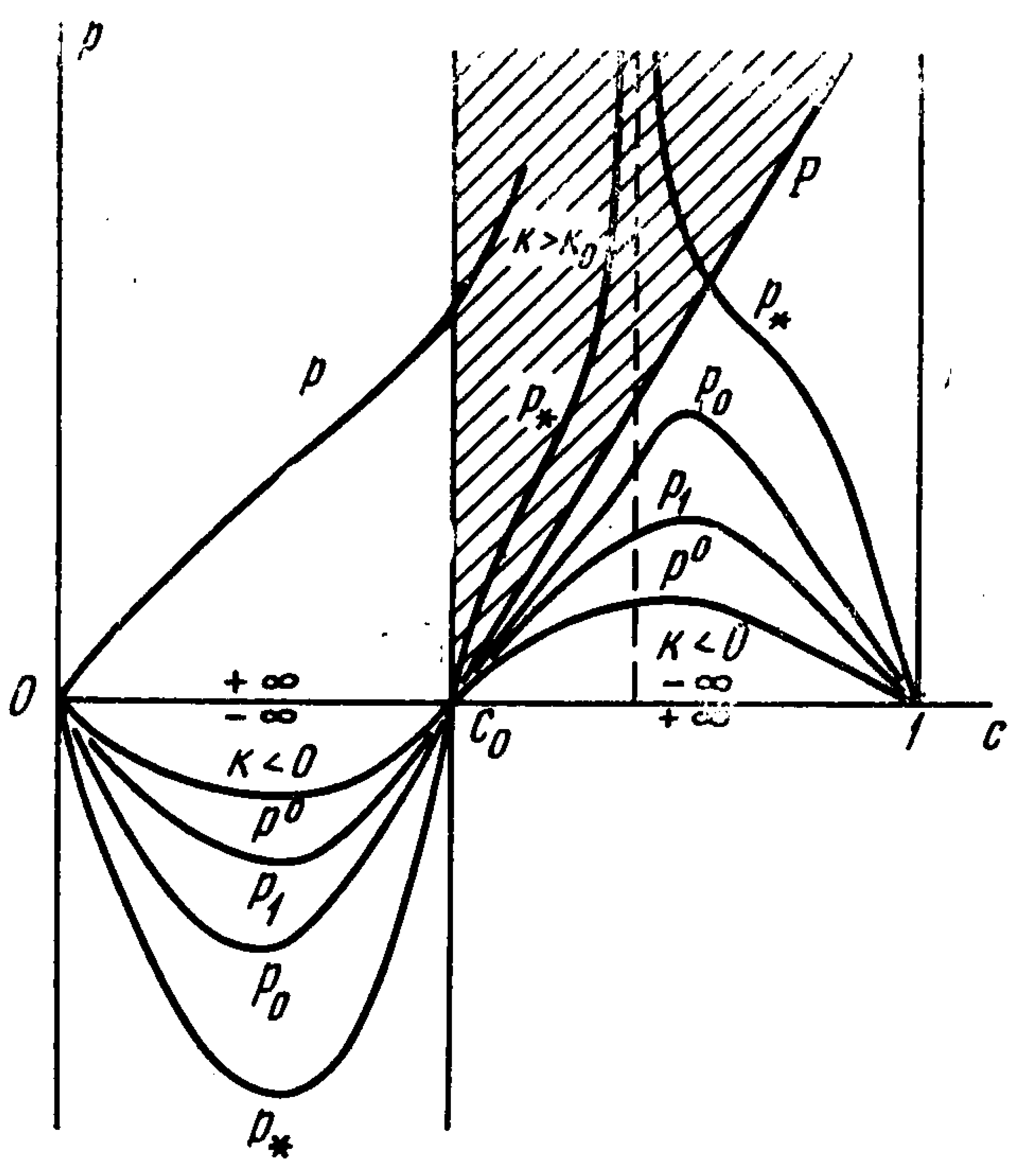
Предположим, что теорема неверна (т. е. допустимы $u > u^+$) и докажем, что простых установившихся волн не существует. Рассмотрим изоклины уравнения (4)

$$k \equiv \left(\frac{dp}{dc}\right)_{(c,\,p)} = \frac{u\,[1 - Ds^{-2}Q'(c)]\,p - Q(c)}{D\omega p}$$

Уравнение семейства изоклин имеет вид

$$p_k(c) = \frac{Q(c)}{u\,[1 - Ds^{-2}Q'(c)] - kD\omega} \tag{19}$$

Для значений $0 \leqslant k < k_* = u\Delta / (D\omega)$, где $\Delta = 1 - Ds^{-2}Q^+$, $p_k(c)$ — непрерывные кривые, обращающиеся в нуль (фиг. 2) в точках $c = 0$, c_0, 1 ($p^\circ(c)$ соответствует значению $k = 0$). При $k = k^*$ изоклина $p_*(c)$ терпит разрыв в точке, где достигает максимума $Q'(c)$ (при этом предполагается $Q^+ > Q^-$, последнее несущественно, так как рассматривается поведение кривых $p_k(c)$ лишь для $c_0 \leqslant c \leqslant 1$).



Фиг. 2

Нетрудно установить, что для $c_0 < c < 1$ и любых $k_1 < k_2 < k^*$ имеет место неравенство $p_1(c) < p_2(c)$, где индексы 1 и 2 соответствуют значениям k_1 и k_2.

Выберем изоклину, соответствующую значению

$$k_0 = (2D\omega)^{-1}\,[u\Delta + \sqrt{u^2\Delta^2 - 4D\omega}] < k^* \tag{20}$$

Здесь обозначено $\Delta = 1 - Ds^{-2}Q^+$, а $\omega = 1 - u^2 s^{-2}$. Очевидно, что в силу допущения параметр k_0 является вещественным. Уравнение изоклины имеет вид

$$p_0(c) = \frac{2Q(c)}{u\Delta + 2Dus^{-2}\,[Q^+ - Q'(c)] - \sqrt{u^2\Delta^2 - 4D\omega Q^+}} \tag{21}$$

В силу сказанного выше все изоклины, соответствующие $0 < k < k_0$, расположены между нулевой изоклиной и изоклиной (21). Проведем прямую $P(c) = k_0(c - c_0)$. Последняя в области $c_0 \leqslant c \leqslant 1$ имеет лишь одну точку пересечения с изоклиной $p_0(c)$) а именно точку $(c_0, 0)$. Действительно, в противном случае, уравнение $p_0(c) = P(c$, имело бы корень при $c \neq c_0$, что невозможно, так как рассматриваемое уравнение эквивалентно уравнению

$$Q(c) = (c - c_0)\;[Q^+ + u^2 k_0 Ds^{-2}(Q^+ - Q'(c))]$$

которое при указанном выше выборе Q^+ обладает лишь одним корнем $c = c_0$.

Таким образом, для всех точек фазовой плоскости, расположенных в полуполосе $c_0 < c < 1$ выше прямой $P(c) = k_0(c - c_0)$ и на самой прямой, угловые коэффициенты интегральной кривой больше k_0. (На фиг. 2 эта область заштрихована.) Следовательно, интегральная кривая $p(c)$, пересекающая прямую $c = c_0$ выше оси, не пересечет прямую $P(c)$, что и исключает попадание интегральной кривой $p(c)$ в точку (1,0). Окончательно приходим к выводу, что искомой интегральной кривой, расположенной в верхней полуплоскости и соединяющей точки (0,0) и (1,0), не существует. Следовательно, для скорости распространения простой установившейся волны справедливы неравенства (15).

Теорема доказана. Совершенно аналогично можно провести доказательство и для обратной волны.

Замечания. 1. Первое условие (8) выделяет область значений основных параметров нелинейной среды, при которых в среде распространяются «медленные» (со скоростями меньше предельной скорости) волны. Для активной RCL — линии передачи это условие преобретает вид

$$RC > L \max J'(\varphi) \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 1)$$

Таким образом, при выборе параметров линии R, C и L такими, чтобы удовлетворялось указанное условие, обеспечивается существование простых установившихся волн, распространяющихся со скоростями, строго меньшими предельной скорости $s = 1 / \sqrt{LC}$. Возможность регулирования скорости передачи сигнала вдоль активной линии имеет большой практический интерес.

Если выполнено обратное неравенство в первом условии (8), то, как показывают численные расчеты, для непрерывной кусочно-линейной аппроксимации функции $Q(c)$ непрерывные простые установившиеся волны могут распространяться со скоростями, близкими к предельной скорости s; причем крутизна фронта такой волны неограниченно возрастает и при $u = s$ в среде могут распространяться разрывные волны. Кроме того, указанное условие оказывается существенным и для единственности решения задачи (4), (5).

2. Величины $u^{\pm}$ совпадают между собой и с оценкой, приведенной в [6], если максимальное значение производной $Q'(c)$ реализуется в точке $c = c_0$, а в областях $0 \leqslant c \leqslant c_0$ и $c_0 \leqslant c \leqslant 1$ функция $Q(c)$ является соответственно строго выпуклой и строго вогнутой.

3. В «диффузионном» приближении ($s \to \infty$) первое условие (8) не существенно и все результаты справедливы при более слабых ограничениях относительно $Q(c)$. Более того, неравенства могут быть уточнены, если вместо $Q^{\pm}$ взять наименьшие значения угловых коэффициентов прямых $k^{\pm}(c - c_0)$, не пересекающих $Q(c)$ при $c_0 \leqslant c \leqslant 1$ и $0 \leqslant c \leqslant c_0$ соответственно, за исключением точки ($c = c_0$, $p = 0$).

Поступила 4 XI 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1947.
2. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Салганик Р. Л. О распространении импульса возбуждения в электрохимической диффузионной модели нерва. ПММ, 1965, т. 29, вып. 6.
3. Knight B. W., Peterson G. A. Theory of the Gunn effect. Phys. Rev., 1967, vol. 155, No. 2.
4. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. Бюл. МГУ, Матем. и механ., 1937, т. 1, вып. 5.
5. Барабашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., «Наука», 1969.
6. Елеонский В. М., Оганесьянц Л. Г. О верхней границе скорости распространения нелинейных установившихся волн. ЖЭТФ, 1968, т. 54, вып. 2.