ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЧАСТОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ РЕШЕТКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

В. М. Астапенко (Москва)

Методом, предложенным Г. Д. Малюжинцом, получена длинноволновая асимптотика коэффициентов отражения и прохождения плоской волны сквозь решетку, расположенную на границе раздела двух сред. Показано, что эта асимптотика полностью выражается через присоединенную массу решетки.

Пусть в плоскости xy вдоль оси y расположена периодическая с периодом $2c$ решетка, элементами которой являются выпуклые области, имеющие две взаимно перпендикулярные оси симметрии, одна из которых совпадает с осью y. Обозначим через D область, лежащую вне решетки, через D^+ — часть D, расположенную в полуплоскости $x > 0$, а через D^- — часть D при $x < 0$ (фигура).

Далее пусть справа ($x > 0$) на решетку падает плоская волна

$$P_0 = e^{-ik_1(\alpha_1 x - \beta_1 y)}, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \quad k_1 = \omega / c_1$$

где k_1 — волновое число, ω — частота падающего поля, c_1 — скорость волны, α_1 и β_1 — косинусы, определяющие направление распространения P_0.

В этой работе будет рассматриваться частая решетка, т. е. такая, что период $2c$ этой решетки много меньше $k_1/\omega(|k_1| < \pi/2c)$.

Задача дифракции P_0 на названной выше решетке заключается в отыскании функции $P(x, y; k)$, регулярной по k при $|k| < \pi/2c$ и в области D, удовлетворяющей:

уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)\, P = 0 \tag{1}$$

однородному неймановскому условию на границе решетки γ

$$\left.\frac{\partial P}{\partial n}\right|_\gamma = 0 \tag{2}$$

условию квазипериодичности в области D

$$P(x,y) = P(x, y - 2c) e^{2ikc\beta} \tag{3}$$

условию погашаемости, сформулированному Г. Д. Малюжинцом [1]

$$\sup_D |(P - P_0)\, e^{-ik\beta y}| < \infty \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} k > |\operatorname{Re} k| \tag{4}$$

условиям на L (совокупности отрезков оси y, лежащих в D)

$$\begin{aligned} &P_1 = P_2 \quad \text{(непрерывность давления на } L) \\ &\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial x} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P_2}{\partial x} \quad \text{(непрерывность скорости на } L) \end{aligned} \tag{5}$$

Постоянные ρ_1 и ρ_2 характеризуют плотности сред в областях D^+ и D^-. Здесь через n обозначена нормаль к γ, являющаяся внутренней к D, а через

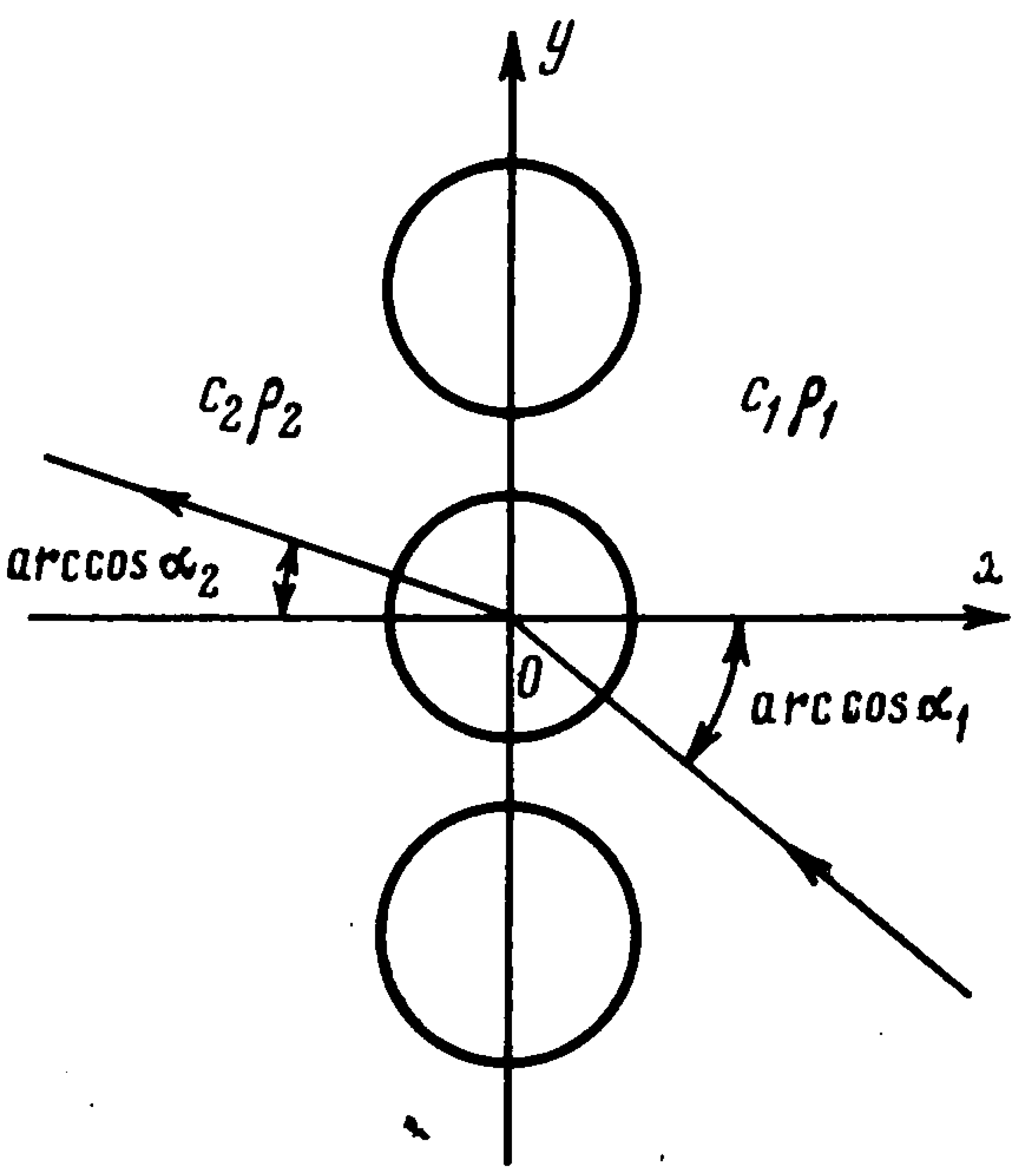
$$P = \begin{cases} P_1(x, y; k) & (x, y) \in D^+ \\ P_2(x, y; k) & (x, y) \in D^- \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} \beta_1 & (x, y) \in D^+ \\ \beta_2 & (x, y) \in D^- \end{cases}$$

$$k = \begin{cases} k_1 = \omega/c_1 & (x, y) \in D^+ \\ k_2 = \omega/c_2 & (x, y) \in D^- \end{cases}$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1 & (x, y) \in D^+ \\ \alpha_2 & (x, y) \in D^- \end{cases}$$

где c_2 — скорость распространения волны в D^-.



Заметим, что условия (3) и (4) обеспечивают единственность решения выше поставленной задачи дифракции (1) — (5).

Найдем асимптотику P при $|x| \to \infty$ и $|k| < (\pi / 2c)$. Для этого заметим, что в силу (3) функция $Pe^{-ik\beta y}$ будет периодической с периодом $2c$, а значит для нее справедливо следующее представление:

$$P = e^{ik\beta y} \sum_{\infty < n < \infty} C_n(x) \exp \frac{i\pi n y}{c} \qquad (6)$$

Если этот ряд подставить в уравнение (1), то получим обыкновенное дифференциальное уравнение для каждой функции $C_n(x)$

$$d^2 C_n / dx^2 - [(\pi n / c)\lambda_n]^2 C_n = 0$$

где

$$(\pi n / c)\lambda_n = \sqrt{[(\pi n / c) + k\beta]^2 - k^2} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

причем функция $\sqrt{\lambda_n{}^2}$ ($|n| > 0$) определяется в плоскости комплексного переменного n^2 с разрезом вдоль луча $\operatorname{Re}\lambda_n{}^2 < 0$, $\operatorname{Im}\lambda_n{}^2 = 0$ и принимает значение $\sqrt{\lambda_n{}^2} = 1$ при $k = 0$.

Прямым подсчетом получается следующее неравенство:

$$\operatorname{Re} \lambda_n > 0 \text{ при } |n| > 0, \ |k| < (\pi / 2c)$$

которое с учетом (4) позволяет переписать (6) так:

$$Pe^{-ik\beta y} = ae^{-ik\alpha x} + be^{ik\alpha x} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left\{\frac{\pi n}{c}\left[-|x|\left[\left(1 - \frac{kc}{\pi n}\beta\right)^2 - \left(\frac{kc}{\pi n}\right)^2\right]^{1/2} - iy\right]\right\} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left\{\frac{\pi n}{c}\left[-|x|\left[\left(1 + \beta\frac{kc}{\pi n}\right)^2 - \left(\frac{kc}{\pi n}\right)^2\right]^{1/2} + iy\right]\right\}$$

Если теперь учесть, что при $|k| < (\pi / 2c)$ и $|n| > 0$

$$\operatorname{Re}[(\pi |n| / c)\lambda_{|n|}] < \operatorname{Re}\{[\pi(|n| + 1) / c]\lambda_{|n|+1}\}$$

то получим, что

$$Pe^{-ik\beta y} = ae^{-ik\alpha x} + be^{ik\alpha x} + O(e^{-\sigma|x|}) \quad \text{при } |x| \to \infty$$

$$\sigma = \frac{\pi}{c} \min \operatorname{Re}\left[\left(1 \pm \beta\frac{kc}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{kc}{\pi}\right)^2\right]^{-1/2} \qquad (|k| \leqslant \varepsilon < \pi/2c)$$

Исходя из изложенного выше будем искать функции P_1 и P_2 соответственно в следующих видах:

$$P_1 = -\rho_1 e^{ik_1\beta_1 y}[e^{-ik_1\alpha_1 x} + V(k_1, \alpha_1, \beta_1)e^{ik_1\alpha_1 x} + u(x, y; k_1)] \qquad (7)$$

$$P_2 = -\rho_2 e^{ik_2\beta_2 y}[W(k_2, \alpha_2, \beta_2)e^{-ik_2\alpha_2 x} + v(x, y; k_2)]$$

Здесь u, v, V и W связаны следующими соотношениями:

$$\left(\Delta + 2ik_1\beta_1\frac{\partial}{\partial y} + k_1{}^2\alpha_1{}^2\right)u = 0 \qquad (x, y) \in D^+$$

$$\left(\Delta + 2ik_2\beta_2\frac{\partial}{\partial y} + k_2{}^2\alpha_2{}^2\right)v = 0 \qquad (x, y) \in D^- \qquad (8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + ik_1\beta_1\frac{\partial y}{\partial n}u\Big|_{\gamma^+} = ik_1\alpha_1(e^{-ik_1\alpha_1 x} - Ve^{ik_1\alpha_1 x})\frac{\partial x}{\partial n} - ik_1\beta_1(e^{-ik_1\alpha_1 x} + Ve^{ik_1\alpha_1 x})\frac{\partial y}{\partial n}\Big|_{\gamma^+}$$

γ^+ — часть γ при $x > 0$) (9)

$$\frac{\partial v}{\partial n} + ik_2\beta_2 \frac{\partial y}{\partial n} v \bigg|_{\gamma^-} = ik_2\alpha_2 W e^{-ik_2\alpha_2 x} \frac{\partial x}{\partial n} - ik_2\beta_2 W e^{-ik_2\alpha_2 x} \frac{\partial y}{\partial n} \bigg|_{\gamma^-} \tag{10}$$

(γ^- — часть γ при $x < 0$)

$$u = O(e^{-\sigma x}) \text{ при } x \to \infty, \quad v = O(e^{\sigma x}) \text{ при } x \to -\infty \tag{11}$$

$$u(x, y - c) = u(x, y + c), \quad v(x, y - c) = v(x, y + c) \tag{12}$$

$$\rho_1(1 + V + u) = \rho_2(W + v) \exp\left[i(k_2\beta_2 - k_1\beta_1)y\right]_L \tag{13}$$

$$ik_1\alpha_1(1 - V) - \frac{\partial u}{\partial x} = \left(ik_2\alpha_2 W - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \exp\left[i(k_2\beta_2 - k_1\beta_1)y\right] \bigg|_L \tag{14}$$

$$2ic\left[k_1\alpha_1(1 - V) - k_2\alpha_2 W\right] = -\frac{1}{\rho_1}\int_{\gamma_0^+} P_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} dl - \frac{1}{\rho_2}\int_{\gamma_0^-} P_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dl \tag{15}$$

$$2ck_1k_2\alpha_1\alpha_2\left[\rho_1(1 + V) - \rho_2 W\right] = -k_2\alpha_2\int_{\gamma_0^+} P_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial n} dl - k_1\alpha_1\int_{\gamma_0^-} P_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial n} dl \tag{16}$$

Здесь γ_0^+, γ_0^- — части границы одного элемента решетки, лежащего в полосе $|y| < c$, а функции Φ_1, Φ_2, Ψ_1 и Ψ_2 определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \cos(k_1\alpha_1 x)\, e^{-ik_1\beta_1 y}, & \Phi_2 &= \cos(k_2\alpha_2 x)\, e^{-ik_2\beta_2 y} \\ \Psi_1 &= \sin(k_1\alpha_1 x)\, e^{-ik_1\beta_1 y}, & \Psi_2 &= \sin(k_2\alpha_2 x)\, e^{-ik_2\beta_2 y} \end{aligned} \tag{17}$$

Уравнения (8), краевые условия (9) и (10), а также условие периодичности (12) и условия на L (13) и (14) получаются в результате подстановки P_1 и P_2, определенных равенствами (7), в соотношения (1)—(5).

Чтобы получить равенство (15), достаточно дважды применить формулу Грина соответственно для функций P_1 и Φ_1 по области D_0^+ (D_0^+ — часть D^+, лежащая в полосе $|y| < c$) и для функций P_2 и Φ_2 по D_0^- (D_0^-—часть D^-, расположенная в полосе $|y| < c$)

$$-2i\rho_1 k_1\alpha_1 c(1 - V) = \int_{\gamma_0^+} P_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} dl - \int_{L_0} \frac{\partial P_1}{\partial x} e^{-ik_1\beta_1 y} dy \tag{18}$$

$$2i\rho_2 k_2\alpha_2 c W = \int_{\gamma_0^-} P_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} dl + \int_{L_0} \frac{\partial P_2}{\partial x} e^{-ik_2\beta_2 y} dy \tag{19}$$

(L_0 — часть L при $|y| < c$)

Если левую и правую части (18) разделить на ρ_1, а соответственно (19) на ρ_2 и полученные результаты сложить, то с учетом равенства (5) и следующего соотношения:

$$k_1\beta_1 = k_2\beta_2 \tag{20}$$

получим (15).

Если формулу Грина для функций P_1 и Ψ_1 применить по области $D^+{}_0$ и ту же формулу для функций P_2 и Ψ_2 по $D^-{}_0$, то подобно предыдущему получим (16).

Так как u и v — периодические функции, то все дальнейшие исследования будут проводиться в одной полосе, например $D_0 = D^+{}_0\, U D^-{}_0$.

Если теперь u, v, V и W разложить в ряды по k в окрестности $k = 0$

$$u = \sum_{p=1}^{\infty} u_p k_1^p, \qquad v = \sum_{p=1}^{\infty} v_p k_2^p, \qquad V = \sum_{p=0}^{\infty} V_p k_1^p, \qquad W = \sum_{p=0}^{\infty} W_p k_2^p \tag{21}$$

и подставить (21) в (8) — (16), предварительно разложив все функции, стоящие в их правых частях в степенные ряды по k в окрестности $k = 0$, собрать все члены, имеющие одинаковую степень k, и их сумму приравнять нулю, то получим рекуррентную последовательность краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона. В этой работе будет рассмотрена только первая краевая задача из полученной описанным выше способом рекуррентной последовательности, а именно следующая:

$$\Delta u_1 = 0, \text{ если } (x, y) \in D^+_0, \quad \Delta v_1 = 0, \text{ если } (x, y) \in D^-_0 \tag{22}$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{\gamma_0^+} = i\alpha_1(1 - V_0)\frac{\partial x}{\partial n} - i\beta_1(1 + V_0)\left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{\gamma_0^+} \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial n}\right|_{\gamma_0^-} = i\alpha_2 W_0\frac{\partial x}{\partial n} - i\beta_2 W_0\left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{\gamma_0^-} \tag{24}$$

$$u_1 = O(e^{-(\pi/c)x}) \text{ при } x \to \infty, \quad v_1 = O(e^{(\pi/c)x}) \text{ при } x \to -\infty \tag{25}$$

$$u_1(x, c) = u_1(x, -c), \quad v_1(x, c) = v_1(x, -c) \tag{26}$$

$$\rho_1(V_1 + u_1)|_{L_0} = t\rho_2(W_1 + v_1)|_{L_0}, \qquad \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{L_0} = t\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{L_0} \tag{27}$$

где

$$t = \beta_1 / \beta_2 = c_1 / c_2$$

Заметим, что равенства (27) получены из равенств (13) и (14) с учетом (20) и нулевых приближений выражений (15) и (16). Упомянутые выше нулевые приближения, кроме того, дают возможность написать явные формулы для V_0 и W_0 в следующем виде:

$$V_0 = \frac{\alpha_1\rho_2 - t\alpha_2\rho_1}{\alpha_1\rho_2 + t\alpha_2\rho_1}, \qquad W_0 = \frac{2\alpha_1\rho_1}{\alpha_1\rho_2 + t\alpha_2\rho_1}, \qquad \alpha_2 = \left(1 - \frac{\beta_1^2}{t^2}\right)^{1/2}$$

Отсюда видно, что V_0, W_0 являются соответственно коэффициентами отражения и прохождения волны P_0, падающей на свободную границу раздела двух сред (без решетки).

Первые приближения соотношений (15) и (16) дают возможность выписать систему уравнений для V_1 и W_1

$$2ic\,(\alpha_1 V_1 + t^2\alpha_2 W_1) = {}^1/_2\,[\alpha_1^2(1 + V_0) + t^2\alpha_2^2 W_0]S + i(\beta_1\mu_1 + t^2\beta_2\mu_2) \tag{28}$$
$$2d(\rho_1 V_1 - t\rho_2 W_1) = -{}^1/_2 i[\rho_1\alpha_1(1 - V_0) + t\rho_2\alpha_2 W_0]S + \rho_1\lambda_1 + t\rho_2\lambda_2$$

где S — площадь одного элемента решетки, а $2d$ — длина L_0 и

$$\mu_1 = \int_{\gamma_0^+} u_1\frac{\partial y}{\partial n}dl, \quad \mu_2 = \int_{\gamma_0^-} v_1\frac{\partial y}{\partial n}dl, \quad \lambda_1 = \int_{\gamma_0^+} u_1\frac{\partial x}{\partial n}dl, \quad \lambda_2 = \int_{\gamma_0^-} v_1\frac{\partial x}{\partial n}dl$$

Чтобы вычислить последние функционалы, рассмотрим две периодические с периодом $2c$ гармонические в D_0 функции φ и ψ, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_{\gamma_0} = \left.\frac{\partial x}{\partial n}\right|_{\gamma_0}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial n} = \left.\frac{\partial y}{\partial n}\right|_{\gamma_0}, \qquad \gamma_0 = \gamma_0^+ \cup \gamma_0^-$$

$$\varphi = O(e^{-\pi|x|/c}), \quad \psi = O(e^{-\pi|x|/c}) \text{ при } |x| \to \infty$$

Из формулы Грина для функций φ и u_1 по области D_0^+ и для φ и v_1 по области D_0^- находим, что

$$\lambda_1 = \int_{\gamma_0^+} \varphi\frac{\partial u_1}{\partial n}dl - \int_{L_0} u_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy + \int_{L_0}\varphi\frac{\partial u_1}{\partial x}dy$$

$$\lambda_2 = \int_{\gamma_0^-} \varphi\frac{\partial v_1}{\partial n}dl + \int_{L_0} v_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy - \int_{L_0}\varphi\frac{\partial v_1}{\partial x}dy$$

Замечая, что функция φ является нечетной по x, а следовательно, равна нулю на L_0, получим после сложения двух последних равенств с учетом (23), (24) и (27) следующее соотношение:

$$\rho_1\lambda_1 + t\rho_2\lambda_2 = -{}^1/_2 i[\rho_1\alpha_1(1 - V_0) + t\rho_2\alpha_2 W_0]\,\lambda_x - 2\,(c - d)[\rho_1 V_1 - t\rho_2 W_1] \quad (29)$$

где λ_x — коэффициент присоединенной массы, который, согласно Л. И. Седову [2], определяется следующим равенством:

$$\lambda_x = -\int\limits_{\gamma_0} \varphi\,\frac{\partial x}{\partial n}\,dl$$

При получении (29) была учтена симметричность решетки относительно осей x и y. Подобно предыдущему получается выражение для функционалов μ_1 и μ_2

$$i\,(\beta_1\mu_1 + t^2\beta_2\mu_2) = -{}^1/_2\,\beta_1^2\,(1 + V_0 + W_0)\,\lambda_y, \quad \lambda_y = -\int\limits_{\gamma_0} \psi\,\frac{\partial y}{\partial n}\,dl \quad (30)$$

Здесь λ_y — коэффициент присоединенной массы [2].

Подставим (29) и (30) в (28)

$$\alpha_1 V_1 + t^2\alpha_2 W_1 = {}^1/_4 ic^{-1}\{(1 + V_0 + W_0)\beta_1^2\lambda_y - [\alpha_1^2(1 + V_0) + t^2\alpha_2^2 W_0]S\}$$

$$\rho_1 V_1 - t\rho_2 W_1 = -{}^1/_4 ic^{-1}\ [\rho_1\alpha_1(1 - V_0) + t\rho_2\alpha_2 W_0](S + \lambda_x)$$

Отсюда при $d > 0$ и $\alpha_1 \neq 0$ окончательно находим

$$V_1 = \frac{i}{4c\,(\alpha_1\rho_2 + t\alpha_2\rho_1)}\,\{\rho_2\,[(1 + V_0 + W_0)\,\beta_1^2\lambda_y - (\alpha_1^2\,(1 + V_0) + t^2\alpha_2^2 W_0)\,S] - $$
$$- t\alpha_2\,[\rho_1\alpha_1\,(1 - V_0) + t\rho_2\alpha_2 W_0]\,(S + \lambda_x)\}$$

$$W_1 = \frac{i}{4ct\,(\alpha_1\rho_2 + t\alpha_2\rho_1)}\,\{\rho_1\,[(1 + V_0 + W_0)\,\beta_1^2\lambda_y - (\alpha_1^2\,(1 + V_0) + t^2\alpha_2^2 W_0)\,S] + $$
$$+ \alpha_1\,[\rho_1\alpha_1\,(1 - V_0) + t\rho_2\alpha_2 W_0]\,(S + \lambda_x)\}$$

Таким образом, найдены асимптотики поля звукового давления при падении плоской полны P_0 на жесткую частую решетку в следующем виде:

$$P_1 \sim -\rho_1 P_0 - \rho_1\,[V_0 + k_1 V_1 + O\,(k_1^2)]\,e^{ik_1(\alpha_1 x + \beta_1 y)} \qquad \text{при } x \to \infty,\ k_1 \to 0$$

$$P_2 \sim -\rho_2\,[W_0 + k_2 W_1 + O\,(k_2^2)]\,e^{-ik_2(\alpha_2 x - \beta_2 y)} \qquad \text{при } x \to \infty,\ k_2 \to 0$$

Итак, знание присоединенной массы решетки позволяет вычислить коэффициенты отражения и пропускания решетки.

Наконец, если рассмотреть частный случай нормального падения плоской волны на исходную решетку при условиях $\rho_1 = \rho_2$ и $c_1 = c_2$, то получим результат, согласующийся с результатом работы [3].

Поступила 5 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Малюжинец Г. Д. Средние краевые условия на плоскости, определяющие дальнее поле при дифракции длинных волн на частой акустически жесткой решетке. Симпоз. по дифракции волн. Аннот. Докл., Одесса, Изд-во АН СССР, 1960.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.— Л., Гостехтеоризат, 1950.
3. Гуревич М. И. Звукопроводность частой решетки. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.