

## О ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

В. М. Е н т о в (Москва)

Ряд плоских задач фильтрации с предельным градиентом сводится [1] к отысканию функции тока  $\psi$  как решения первой краевой задачи для уравнения

$$w(w + \lambda) \frac{\partial^2 \psi}{\partial w^2} + (w - \lambda) \frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (0.1)$$

в полуполосе  $0 \leq w < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  с разрезом вдоль линии  $\theta = \theta_1 < \theta_0$ , идущим из точки  $w = a$  до  $w = 0$  (задача А) или из точки  $w = a$  до  $w = \infty$  (задача В).

Ниже (§ 1) эти задачи сводятся к парным (дуальным) интегральным уравнениям, содержащим в ядрах гипергеометрические функции  $F(s, -u) = F(2 + is, 2 - is, 3, -u)$ , зависящие от аргумента  $u = w / \lambda$  и одного параметра  $s$ . Эти гипергеометрические функции выражаются через присоединенные функции Лежандра. Это позволяет получить для них интегральные представления в виде синус- и косинус-преобразований Фурье, а затем, действуя по аналогии с работой А. Н. Руховец и Я. С. Уфлянда [2] (см. также [3]), свести парные уравнения к уравнению Фредгольма второго рода (§ 2). Это уравнение может быть эффективно решено при малых  $a$  ( $a_0 = a / \lambda \ll 1$ ), что позволяет определить основные представляющие интерес характеристики фильтрационного движения. В качестве примера в §§ 3, 4 определяется положение и размеры застойных зон, возникающих при расположении источника вблизи непроницаемой границы, что отвечает задаче А, и вблизи прямолинейного контура питания (частный случай задачи В).

§ 1. Рассмотрим следующие две задачи.

*Задача А.* Найти решение уравнения (0.1) в полуполосе  $0 \leq w < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  с разрезом  $\theta = \theta_1$ ,  $0 \leq w \leq a$ , принимающее заданные значения на границе полуполосы и разрезе.

*Задача В.* Найти решение уравнения (0.1) в полуполосе  $0 \leq w < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  с разрезом  $\theta = \theta_1$ ,  $a \leq w < \infty$ , принимающее заданные значения на границе полуполосы и разрезе. Введем в уравнении (0.1) новую независимую переменную  $u = w / \lambda$  и будем искать  $\psi$  как функцию  $u$  и  $\theta$ . Положим

$$\psi(u, \theta) = \Psi(u, \theta) + \psi_1(u, \theta) \quad (1.1)$$

где  $\psi_1(u, \theta)$  — решение уравнения (0.1) в полуполосе  $0 \leq w = \lambda u < \infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$  без разреза, принимающее на границах  $\theta = 0$ ,  $\theta = \theta_0$  и  $w = 0$  те же значения, что и  $\psi(u, \theta)$ . Функция  $\psi_1(u, \theta)$  легко может быть найдена.

Пусть граничные условия имеют вид

$$\psi_1(u, 0) = f_1(u), \quad \psi_1(u, \theta_0) = f_2(u), \quad \psi_1(0, \theta) = \varphi(\theta) \quad (1.2)$$

Выполним интегральное преобразование по переменной  $u$ , полагая [4]

$$\begin{aligned} \psi_1^*(s, \theta) &= \int_0^\infty (1+u) F(s, -u) \psi_1(u, \theta) du \\ \psi_1(u, \theta) &= \frac{1}{2u^2} \int_0^\infty s^3 (1+s^2) \operatorname{cth} \pi s F(s, -u) \psi_1^*(s, \theta) ds \\ F(s, -u) &\equiv F(2 + is, 2 - is, 3, -u) \end{aligned} \quad (1.3)$$

Тогда для определения  $\psi_1^*(s, \theta)$  получим

$$\frac{d^2 \psi_1^*(s, \theta)}{d\theta^2} - s^2 \psi_1^*(s, \theta) = -2\varphi(\theta) \quad (1.4)$$

$$\psi_1^*(s, 0) = f_1^*(s), \quad \psi_1^*(s, \theta_0) = f_2^*(s)$$

$$f_{1,2}^*(s) = \int_0^\infty (1+u) F(s, -u) f_{1,2}(u) du \quad (1.5)$$

Находя отсюда  $\psi^*_1(s, \theta)$ , по формуле обращения (1.3) определим  $\psi_1(s, \theta)$ .

Таким образом, функция  $\psi_1(s, \theta)$  может считаться известной и без ограничения общности задачи А и В можно рассматривать сразу при нулевых граничных условиях на границах  $\theta = 0, \theta = \theta_0, u = 0$ . Рассмотрим теперь задачу А с граничными условиями

$$\begin{aligned} \psi(u, 0) = \psi(0, \theta) = \psi(u, \theta_0) = 0 \\ \psi(u, \theta_1 \pm 0) = f_{\pm}(u), \quad 0 < u < a_0 = a / \lambda \end{aligned} \quad (1.6)$$

Обозначим трансформанту искомого решения (результат применения к нему интегрального преобразования (1.3)) через  $\psi^*(s, \theta)$ . При  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  имеем с учетом граничных условий при  $\theta = 0$  и  $u = 0$

$$\psi^*(s, \theta) = A(s) \operatorname{sh} s\theta \quad (1.7)$$

и аналогично при  $\theta_1 < \theta < \theta_0$

$$\psi^*(s, \theta) = B(s) \operatorname{sh} s(\theta_0 - \theta) \quad (1.8)$$

При  $\theta = \theta_1$  имеем в силу (1.6) и (1.3)

$$\psi^*(s, \theta + 0) - \psi^*(s, \theta - 0) = \int_0^{a_0} (1+u) F(s, -u) [f_+(u) - f_-(u)] du = \sigma(s)$$

Отсюда

$$B(s) = [\sigma(s) + A(s) \operatorname{sh} s\theta_1] / \operatorname{sh} s\theta_2, \quad \theta_2 = \theta_0 - \theta_1 \quad (1.9)$$

Чтобы удовлетворить всем условиям задачи, осталось еще потребовать непрерывности производной  $\partial\psi / \partial\theta$  при  $\theta = \theta_1, u > a_0$  и выполнения условия  $\psi(u, \theta_1 - 0) = f_-(u), u < a_0$ . С учетом формулы (1.3) и (1.9), эти условия дают

$$\int_0^{\infty} s^3 (1+s^2) \operatorname{cth} \pi s F(s, -u) C(s) ds = 0 \quad (a_0 < u < \infty) \quad (1.10)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{s^2(1+s^2)}{\operatorname{th} \pi s} \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0} C(s) F(s, -u) ds = h(u) \quad (0 < u < a_0)$$

$$C(s) = s [A(s) \operatorname{sh} s\theta_0 + \sigma(s) \operatorname{ch} s\theta_2] / \operatorname{sh} s\theta_2 \quad (1.11)$$

$$h(u) = \frac{2f_-(u)}{u^2} + \int_0^{\infty} s^3 (1+s^2) \frac{\operatorname{ch} s\theta_2 \operatorname{sh} s\theta_1}{\operatorname{sh} s\theta_0 \operatorname{th} \pi s} F(s, -u) \sigma(s) ds \quad (1.12)$$

Таким образом, задача А сводится к решению парных уравнений (1.10) для определения  $C(s)$ .

Рассмотрим теперь задачу В при условиях

$$\psi(u, 0) = \psi(0, \theta) = \psi(u, \theta_0) = 0, \quad \psi(u, \theta_1 \pm 0) = F_{\pm}(u), \quad u > a_0 \quad (1.13)$$

Аналогично предыдущему трансформанта  $\psi^*(s, \theta)$  вновь может быть представлена в виде (1.7), (1.8), где  $B(s)$  и  $A(s)$  связаны соотношением (1.9) с заменой  $\sigma(s)$  на

$$\sigma_1(s) = z_+(s) - z_-(s), \quad z_{\pm}(s) = \int_{a_0}^{\infty} (1+u) F_{\pm}(u) F(s, -u) du \quad (1.14)$$

Удовлетворяя после этого условию непрерывности  $\partial\psi / \partial\theta$  при  $\theta = \theta_1, u < a_0$  и условию  $\psi(u, \theta_1 - 0) = F_-(u), u > a_0$ , получим парные уравнения

$$\int_0^{\infty} s(1+s^2) \operatorname{cth} \pi s C(s) F(s, -u) ds = 0 \quad (a_0 < u < \infty) \quad (1.15)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{s^2(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta_0}{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{th} \pi s} C(s) F(s, -u) ds = h_2(u) \quad (0 \leq u \leq a_0)$$

$$C(s) = s^2 \left[ A(s) \operatorname{sh} s\theta_1 - \int_{a_0}^{\infty} (1+u) F_-(u) F(s, -u) du \right] \quad (1.16)$$

$$h_2(u) = \int_0^{\infty} \frac{s^4 (1+s^2)}{\operatorname{th} \pi s} \left[ \frac{\sigma_1(s)}{\operatorname{th} s\theta_2} + \frac{z_-(s) \operatorname{sh} s\theta_0}{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2} \right] F(s, -u) ds \quad (1.17)$$

Для последующего удобно проинтегрировать парные уравнения (1.10) и (1.15) по  $u$  в пределах от  $u$  до  $\infty$ . Имея в виду соотношение

$$\int_u^{\infty} F(2+is, 2-is, 3, -u) du = \frac{2}{1+s^2} F(1+is, 1-is, 2, -u) \quad (1.18)$$

следующее из формул дифференцирования гипергеометрических функций [5, 6], получим для задачи А

$$\int_0^{\infty} s^3 \operatorname{cth} \pi s F_1(s, -u) C(s) ds = 0 \quad (a_0 < u < \infty) \quad (1.19)$$

$$\int_0^{\infty} s^2 F_1(s, -u) C(s) \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} ds = - \int_u^{\infty} \frac{f_-(u)}{u^2} du + \\ + \int_0^{\infty} s^3 \frac{\operatorname{ch} s\theta_2 \operatorname{sh} s\theta_1}{\operatorname{sh} s\theta_0 \operatorname{th} \pi s} F_1(s, -u) \sigma(s) ds \equiv H_1(u) + r_1$$

для задачи В

$$\int_0^{\infty} s \operatorname{cth} \pi s F_1(s, -u) C(s) ds = 0 \quad (u > a_0) \quad (1.20)$$

$$\int_0^{\infty} s^2 \operatorname{cth} \pi s C(s) F_1(s, -u) \frac{\operatorname{sh} s\theta_0}{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2} ds = \frac{1}{2} \int_u^{\infty} h_2(u) du \equiv H_2(u) + r_2 \quad (0 < u < a_0)$$

Здесь

$$F_1(s, -u) = F(1+is, 1-is, 2, -u), \quad F_0(s, -a_0) = F(is, -is, 2, -a_0) \quad (1.21)$$

Постоянные интегрирования  $r_1$  и  $r_2$  определяются впоследствии из требований на решение.

§ 2. 1°. Чтобы свести парные уравнения вида (1.19) и (1.20) к уравнениям Фредгольма второго рода, воспользуемся методом, примененным в работах [2, 3] для решения парных уравнений, содержащих присоединенные функции Лежандра. Этот метод решения существенно использует интегральные представления функций Лежандра в виде синус- и косинус-преобразований. Соответствующие представления могут быть получены и для встречающихся в данной работе гипергеометрических функций. В частности, для  $F_1(s, -u)$  можно получить

$$F_1(s, -u) = \frac{2}{\pi s u} \int_0^{\beta} \frac{\sin 2\eta s \operatorname{sh} \eta d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \beta - \operatorname{sh}^2 \eta}}, \quad u = \operatorname{sh}^2 \beta \quad (2.1)$$

$$F_1(s, -u) = -(\pi s u)^{-1} \operatorname{th} \pi s [R_+(s, u) + R_-(s, u)] = \\ = \frac{2 \operatorname{th} \pi s}{\pi s u} \left[ \frac{\sin 2\beta s}{2s} - \int_{\beta}^{\infty} \frac{\cos 2\eta s (\operatorname{sh} \eta - \sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \beta}) d\eta}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \beta}} \right] \quad (2.2)$$

Функции

$$R_{\pm}(s, u) = \pm \frac{e^{\mp 2is\beta}}{2is} + \int_{\beta}^{\infty} e^{\mp 2is\eta} \frac{\operatorname{sh} \eta - \sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \beta}}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \beta}} d\eta \quad (2.3)$$

аналитичны соответственно в полуплоскостях  $\operatorname{Im} s < 1$  и  $\operatorname{Im} s > -1$ .

Эти формулы можно получить, преобразуя гипергеометрическую функцию к аргументу  $1/u$  по формулам аналитического продолжения, а затем используя их представление через интеграл Эйлера. Непосредственно, хотя и более громоздко, их можно получить и из интегральных представлений для функций Лежандра [5,6], учитывая соотношение

$$F(n+is, n-is, c, -u) = (-1)^n \frac{\Gamma(c) \Gamma(is) \Gamma(-is)}{2\Gamma(n+is) \Gamma(n-is)} \times \\ \times \frac{d^n}{du^n} \left[ \left( \frac{u}{u+1} \right)^{1/2(n-c+1)} (P_{-is}^{n-c+1}(1+2u) + P_{is}^{n-c+1}(1+2u)) \right] \quad (2.4)$$

связывающее встречающиеся в данной работе гипергеометрические функции с присоединенными функциями Лежандра.

2°. Будем искать решение уравнений (1.19) в виде

$$C(s) = s^{-1} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau d\tau, \quad \text{sh}^2 \beta_0 = a_0 \quad (2.5)$$

где  $\varphi(\tau)$  — непрерывно дифференцируемая на отрезке  $(0, 2\beta_0)$  функция. Первое уравнение (1.19) при этом будет удовлетворено тождественно. Действительно левую часть уравнения (1.19) можно, используя (2.2), представить в виде

$$I(u) = \frac{1}{2\pi u} \int_{-\infty}^{\infty} s^\circ R_+(s, u)^\circ C(s) ds$$

В нижней полуплоскости, как это следует из (2.3), функция  $R_+$  убывает при  $s \rightarrow \infty$  не медленнее, чем  $s^{-1/2} e^{2i\beta s}$ , функция  $C(s)$  в силу (2.5) — целая аналитическая функция, возрастающая при  $s \rightarrow \infty$  не быстрее, чем  $s^{-2} e^{2i\beta s}$ . В результате, поскольку  $\beta > \beta_0$  при  $u > a_0$ , имеем  $I(u) = 0$ . Положим

$$2\text{cth } \pi s \text{ sh } s\theta_1 \text{ sh } s\theta_2 / \text{sh } \theta_0 = 1 + \varepsilon_1(s) \quad (2.6)$$

Подставляя выражения (2.1), (2.5) и (2.6) во второе уравнение (1.19), преобразуем его к виду

$$\frac{1}{\pi u} \int_0^{\infty} [1 + \varepsilon_1(s)] \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\eta s \text{ sh } \eta d\eta}{\sqrt{\text{sh}^2 \beta - \text{sh}^2 \eta}} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau d\tau ds = H_1(u) + r_1 \quad (2.7)$$

Обозначим через

$$E_1(\alpha) = \int_0^{\infty} \varepsilon_1(s) \cos \alpha s ds \quad (2.8)$$

косинус-преобразование функции  $\varepsilon_1(s)$ .

Легко убедиться, что произведение

$$(1 + \varepsilon_1(s)) \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau d\tau$$

представляет собой синус-преобразование величины

$$X(\tau) = \varphi(\tau) + \pi^{-1} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\alpha) [E_1(\tau - \alpha) - E_1(\tau + \alpha)] d\alpha \quad (2.9)$$

В свою очередь второй сомножитель в подынтегральном выражении (2.7) представляет собой синус-преобразование функции, равной

$$1/2 \text{sh}^{1/2} \eta / \sqrt{\text{sh}^2 \beta - \text{sh}^{21/2} \eta}$$

при  $\eta < 2\beta$  и нулю при  $\eta > 2\beta$ . Поэтому, применяя теорему о свертке для синус-преобразований [7], получим из (2.7)

$$\int_0^{2\beta} X(\tau) \frac{\text{sh}^{1/2}\tau d\tau}{\sqrt{\text{sh}^2\beta - \text{sh}^2 1/2\tau}} = 4uH_1(u) + 4ur_1 \quad (2.10)$$

Подстановкой  $\text{ch}^{1/2}\tau = \xi$  уравнение (2.10) преобразуется в интегральное уравнение Абеля [8], решая которое, получим

$$X(\tau) = \frac{4}{\pi \text{sh}^{1/2}\tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\text{sh}^{21/2}\tau} \frac{uH_1(u) + ur_1}{\sqrt{\text{sh}^2 1/2\tau - u}} du \quad (2.11)$$

§ 3.1°. Применим результаты предыдущих параграфов к задачам, фактически возникающим при исследовании плоских фильтрационных движений, следующих закону фильтрации с предельным градиентом. Рассмотрение течения, создаваемого батареей из нескольких источников равной интенсивности, расположенных в вершинах правильного  $n$ -угольника, приводит [1] к следующему частному случаю задачи А:

$$\begin{aligned} \psi(u, 0) = 0, \quad \psi(0, \theta) = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \theta_1), \quad \psi(u, \theta_1) = 0 \quad (0 \leq u \leq a_0) \quad (3.1) \\ \psi(0, \theta) = Q(\theta - \theta_1) / \theta_2 \quad (\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0) \\ \psi(u, \theta_0) = Q \quad (\theta_0 = \pi, \theta_1 = \pi(n-1)/n) \end{aligned}$$

При этом наиболее важной задачей является определение границы застойной зоны, которая в пределах элемента симметрии течения определяется положением вершины застойной зоны от источника

$$z_0 = x_0 + iy_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \frac{\partial\psi(u, 0)}{\partial\theta} \frac{du}{u^2} \quad (3.2)$$

и формой дуги границы

$$z(\theta) - z_0 = x(\theta) + iy(\theta) - z_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\theta \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{1}{u} \frac{\partial\psi(u, \theta)}{\partial u} \right) e^{i\theta} d\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_1 \quad (3.3)$$

Здесь  $x$  и  $y$  — координаты в плоскости течения, причем начало координат помещено в одном из источников, а ось направлена к центру симметрии течения. При  $n = 2$  получается течение, создаваемое двумя источниками равной интенсивности.

Важный частный случай задачи В возникает при рассмотрении течения, создаваемого  $n$ -источниками интенсивности  $2Q$ , расположенными в вершинах правильного  $n$ -угольника и стоком интенсивности  $2Qn$ , расположенным в его центре ( $n = 1, 2, \dots$ ). При этом

$$\theta_1 = \pi, \quad \theta_0 = \pi(1+n)/n, \quad \psi_2(u, \theta) = 0, \quad F_+(u) = F_-(u) = Q = \text{const} \quad (3.4)$$

В этом случае возникает внешняя застойная зона, граница которой определяется соотношениями (3.2) и (3.3), причем  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , начало координат выбрано в одном из источников, а сток лежит на отрицательной оси  $x$ .

При  $n = 1$  указанная задача соответствует системе источник-сток равной интенсивности.

Во всех случаях величина  $a_0$  считается заданной, а радиус батареи источников подлежит определению (т. е. решается по существу обратная задача).

Более подробно эти и другие течения, приводящие к задачам А и В, рассматриваются в [1].

2°. Как легко убедиться, решение  $\psi_1(u, \theta)$  (см. § 1) при краевых условиях (3.1) имеет вид ( $0 < \theta < \theta_1$ )

$$\psi_1(u, \theta) = \frac{u^2 Q}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{1+s^2}{\text{th} \pi s} \frac{\text{sh} s\theta_2 \text{sh} s\theta}{\text{sh} s\theta_0} F(s, -u) ds \quad (3.5)$$

так что

$$f_+(u) = f_-(u) = -\psi_1(u, \theta_1) \quad (u \leq a_0), \sigma(s) = 0 \quad (3.6)$$

и в соответствии с (1.12), (1.21) и (1.18)

$$H_1(u) = -\frac{2Q}{\theta_2} \int_0^\infty \frac{F_1(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s} \frac{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0} ds \quad (3.7)$$

Заменяя здесь функцию  $F_1(s, -u)$  ее интегральным представлением (2.1) и подставляя полученное выражение в (2.11), получим после преобразований

$$X_1(\tau) = -\frac{2Q}{\theta_2} \left[ 1 + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \varepsilon_1(s) \frac{\sin s\tau}{s} ds \right] + \frac{4}{\pi} r_1 \operatorname{sh} \tau \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon_1(s)$  определено соотношением (2.6). Далее ядро уравнения (2.9) с учетом (2.8) и (2.6) допускает представление в виде равномерно сходящегося ряда

$$E_1(\tau - \alpha) - E_1(\tau + \alpha) = 2\tau\alpha E_{11} - \frac{1}{3}\tau\alpha(\tau^2 + \alpha^2) E_{12} + \dots \quad (3.9)$$

$$E_{1k} = \int_0^\infty s^{2k} \varepsilon_1(s) ds$$

С учетом (3.8) и (3.9) из уравнения (2.9) находим, что при любом  $r_1$  решение  $\varphi(\tau)$  представляется в виде

$$\varphi(\tau) = -2Q/\theta_2 + \varphi_1(\tau) \quad (3.10)$$

где  $\varphi_1(\tau)$  — функция, разлагающаяся в степенный ряд по нечетным степеням  $\tau$ .

3°. Решение исходной задачи при  $0 \leq \theta \leq \theta_1$  дается выражением

$$\begin{aligned} \psi(u, \theta) &= \Psi(u, \theta) + \psi_1(u, \theta) = \\ &= \frac{1}{2} u^2 \int_0^\infty \left[ s^2 C(s) + \frac{2Q}{\theta_2} \right] (1 + s^2) \frac{\operatorname{sh} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} F(s, -u) ds \end{aligned} \quad (3.11)$$

где  $C(s)$  определено формулой (2.5).

При  $u < a_0$ ,  $\theta = \theta_1$  имеем  $\psi(u, \theta_1) \equiv 0$ , а производная  $\partial\psi/\partial\theta$  должна быть интегрируемой функцией  $u$ . Имеем с учетом (1.18), (2.2) и (3.10)

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi(u, \theta_1)}{\partial\theta} &= \frac{1}{4} u^2 \int_0^\infty \frac{s^3 (1 + s^2) F(s, -u)}{\operatorname{th} \pi s} \left[ C(s) + \frac{2Q}{s^2 \theta_2} \right] \left( 1 + \frac{\varepsilon_1(s)}{\operatorname{th} \theta_1 s} \right) ds = \\ &= -u^2 \frac{1}{du} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2}{\pi u \operatorname{sh} s\theta_0} \left[ \int_0^{2\beta_0} \varphi'(\tau) \cos s\tau d\tau - \varphi(2\beta_0) \cos 2\beta_0 s \right] \times \\ &\times \left[ \frac{\sin 2\beta s}{s} - 2 \int_\beta^\infty \frac{\cos 2\eta s [\operatorname{sh} \eta - \sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \beta}]}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 \eta - \operatorname{sh}^2 \beta}} d\eta \right] ds \end{aligned} \quad (3.12)$$

Поведение решения вблизи точки  $u = a_0$  ( $\beta = \beta_0$ ) легко определить, рассматривая интеграл (3.12) как обратное косинус-преобразование Фурье. При  $s \rightarrow \infty$  выражение в квадратных скобках порядка

$$s^{-1} \sin 2\beta s + C s^{-1/2} e^{2i\beta s}$$

так что при  $\beta \rightarrow \beta_0$  асимптотика интеграла имеет вид

$$C_1 (\beta_0 - \beta)^{-1/2} \varphi(2\beta_0) + C_2 \varphi(2\beta_0) + O(1)$$

Поэтому из требования интегрируемости  $\partial\psi/\partial\theta$  следует условие

$$\varphi(2\beta_0) = 0 \quad (3.13)$$

с лужащее для определения постоянной  $r_1$ . Наконец, подставляя в выражение (3.3

для координат границы застойной зоны (3.11) с учетом (3.10) и (3.13), получим

$$\lambda [z(\theta) - z_0] = \left[ e^{i\theta} \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{ch} s\theta - i \operatorname{sh} s\theta}{s \operatorname{ch} s\theta_0} \operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{cth} \pi s \times \right. \\ \left. \times \left( \varphi'(2\beta_0) \sin 2s\beta_0 - \int_0^{2\beta_0} \varphi''(\tau) \sin s\tau d\tau \right) ds \right]_{\theta=0}^{\theta=\theta_0} \quad (3.14)$$

Выражение (3.11) остается конечным при  $0 \leq \theta \leq \theta_1$ .

4°. Получим теперь приближенное решение задачи при малых  $\beta_0$ .

Из интегрального уравнения (2.9) имеем, используя (3.8), (3.9) и (3.13), выражение

$$\varphi(\tau) = \frac{2Q}{\theta_2} \left[ -1 + \left( \frac{1}{2\beta_0} - \frac{1}{3}\beta_0 - \frac{4}{3\pi} E\beta_0^2 \right) \tau + \frac{\tau^3}{3\pi} \left( \frac{\pi}{4\beta_0} + E \right) + O(\beta_0^4) \right] \\ E = E_{11} + E_{12} \quad (3.15)$$

Подставив  $\varphi(\tau)$  в (3.14), получим

$$\lambda [z(\theta) - z_0] = \frac{2Q}{\theta_2} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\theta} (s \operatorname{ch} s\theta - i \operatorname{sh} s\theta) - s}{\operatorname{sh} s\theta_0} \operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{cth} \pi s \times \\ \times \left[ \frac{\sin 2\beta_0 s}{s} \left( \frac{1}{2\beta_0} + \frac{2}{3}\beta_0 + \frac{8}{3\pi} \beta_0^2 E + O(\beta_0^3) \right) - \left( \frac{1}{2\beta_0} + \frac{2}{\pi} E \right) \int_0^{2\beta_0} \tau \frac{\sin s\tau}{s} d\tau \right] ds \quad (3.16)$$

Множитель перед квадратной скобкой в (3.16) при  $s \rightarrow \infty$  ведет себя как  $1/2 (s - i) e^{s(\theta - \theta_1) + i\theta}$ . Поэтому для малых  $\beta_0$  имеем

$$\lambda [z(\theta) - z_0] = \frac{2Q}{\theta_2} e^{i\theta} \left[ \int_0^{\infty} \left( \frac{s \operatorname{ch} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0} - \frac{1}{2} s e^{s(\theta - \theta_1)} \right) ds + \frac{1}{2 [4\beta_0^2 + (\theta_1 - \theta)^2]} \times \right. \\ \times \left( 1 + \frac{4}{3}\beta_0^2 + \frac{16}{3\pi} \beta_0^3 E \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{4\beta_0}{\pi} E \right) \left( 2 - \frac{\theta_1 - \theta}{2\beta_0} \operatorname{arctg} \frac{2\beta_0}{\theta_1 - \theta} \right) - \\ - i \left\{ \left( \frac{1}{4\beta_0} + \frac{1}{3}\beta_0 \right) \operatorname{arctg} \frac{2\beta_0}{\theta_1 - \theta} - \frac{1}{8\beta_0} \left[ (4\beta_0^2 + (\theta_1 - \theta)^2) \operatorname{arctg} \frac{2\beta_0}{\theta_1 - \theta} - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\beta_0 (\theta_1 - \theta) \right] + \int_0^{\infty} \left[ \frac{\operatorname{sh} s\theta \operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s\theta_0} - \frac{1}{2} e^{-s(\theta_1 - \theta)} \right] ds \right\} \left. - \right. \\ \left. - \frac{2Q}{\theta_2} \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s\theta_0} ds \right] \quad (3.17)$$

Чтобы полностью определить положение застойной зоны, необходимо вычислить еще величину  $z_0$ . Используя (3.11), (1.18) и (3.13), имеем по формуле (3.2)

$$\lambda z_0 = \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2} \frac{\partial \psi(u, 0)}{\partial \theta} du = \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{sh} s\theta_2 \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s\theta_0} \int_0^{2\beta_0} \varphi'(\tau) \cos s\tau d\tau ds = \\ = \frac{2Q}{\theta_2} \int_0^{\infty} \frac{s \operatorname{sh} s\theta_2}{\operatorname{sh} s\theta_0} \operatorname{cth} \pi s ds + O(\beta_0^2) \quad (3.18)$$

5°. В работе [1] было построено предельное решение задачи А ( $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ ), позволяющее строить нижние оценки для размеров застойных зон. Однако граница застойной зоны для предельного решения имела ветви, уходящие в бесконечность, в результате чего это решение не имело самостоятельного значения. Приведенное выше решение при малых  $\beta_0$  близко к предельному решению для всех  $\theta$  таких, что  $\theta_1 - \theta \gg \beta_0$ , и лишь в окрестности  $\theta = \theta_1$  граница застойной зоны существенно отличается от предельной, не имея неограниченных ветвей.

В качестве примера рассмотрим течение, создаваемое парой равнодебитных источников (с дебитом  $q = 2Q$ ).

В этом случае  $\theta_0 = 2\theta_1 = \pi$ ; предельное решение было построено в [1].

Имеем при этом

$$E_{10} = 3E_{11} = -\frac{1}{\pi}, \quad E = -\frac{4}{3\pi}$$

$$\begin{aligned} \lambda(z(\theta) - z_0) = & \frac{Q}{\pi} e^{i\theta} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\pi \cos \theta} + \frac{2\theta \sin \theta}{\pi \cos^2 \theta} - \frac{8}{(\pi - 2\theta)^2} + \right. \\ & + \left( 2 + \frac{8}{3}\beta_0^2 - \frac{128}{9\pi^2}\beta_0^3 \right) \frac{1}{4\beta_0^2 + (\frac{1}{2}\pi - \theta)^2} + \left( 1 - \frac{16\beta_0}{3\pi^2} \right) \left( -2 + \right. \\ & + \left. \frac{\pi - 2\theta}{2\beta_0} \operatorname{arctg} \frac{4\beta_0}{\pi - 2\theta} \right) - i \left[ \left( \frac{1}{\beta_0} - \frac{2}{3}\beta_0 - \frac{(\pi - 2\theta)^2}{8\beta_0} \right) \operatorname{arctg} \frac{4\beta_0}{\pi - 2\theta} + \right. \\ & \left. \left. + \frac{\pi}{2} - \theta + \operatorname{tg} \theta + \frac{2\theta}{\pi \cos \theta} - \frac{4}{\pi - 2\theta} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\lambda z_0 = \frac{4Q}{\pi} \int_0^\infty \frac{s \operatorname{sh} \frac{1}{2}s\pi \operatorname{ch} s\pi}{\operatorname{sh}^2 s\pi} ds = \frac{2 + \pi}{\pi^2} Q = 0.521Q \quad (3.20)$$

Для вершины застойной зоны ( $\theta = \frac{1}{2}\pi$ ) имеем

$$\lambda z(\frac{1}{2}\pi) = \frac{Q}{2\beta_0} - \frac{2Q}{\pi^2} + i \frac{Q}{\pi} \left( \frac{1}{2\beta_0^2} + \frac{5}{6} \right) \quad (3.21)$$

На фиг. 1 приведены границы застойных зон для различных значений  $\beta_0$  ( $a_0 = \operatorname{sh}^2 \beta_0$ ).

С достаточной для практических целей точностью уравнение границы застойной зоны можно представить в виде

$$\left( \frac{L - x}{L - x(0)} \right)^{2/3} + \left( \frac{y}{y(\frac{1}{2}\pi)} \right)^{2/3} = 1 \quad (3.22)$$

(точки на фиг. 1), где  $L = x(\frac{1}{2}\pi)$  и  $y(\frac{1}{2}\pi)$  даются выражением (3.21). При этом граница застойной зоны представляет собой вытянутую вдоль оси  $y$  астроиду, и полная площадь застойной зоны составляет

$$\begin{aligned} S &= \frac{3}{16}\pi (L - x(0)) y(\frac{1}{2}\pi) \approx \\ &\approx \frac{3}{8} \frac{\lambda L^3}{Q} \left( 1 + \frac{2Q}{\pi \lambda L} \right)^2 \left( 1 - \frac{\pi + 2}{\pi \lambda L} Q \right) \\ &\frac{\lambda L}{Q} \gg 1 \end{aligned} \quad (3.23)$$

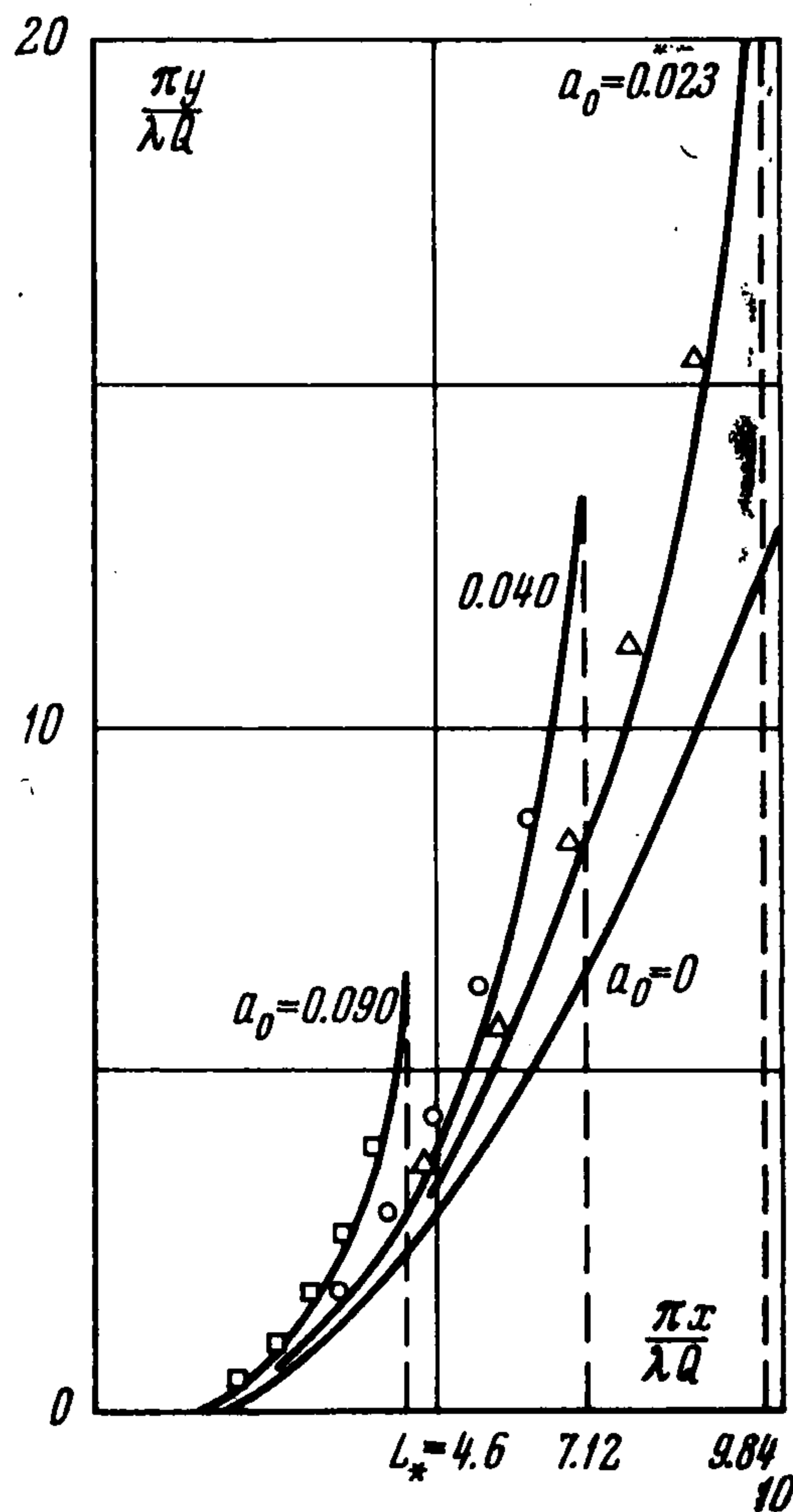
Напомним, что здесь  $Q = \frac{1}{2}q$ , где  $q$  — дебит скважины на единицу мощности пласта.

§ 4.1°. Рассмотрим теперь подробнее указанный в п.1° § 3 случай задачи В, определяемый условиями (3.4). В этом случае из (1.14) получаем

$$z_+ = z_- = 2Qs^{-2}F(is, -is, 2, -a_0), \quad \sigma_1 \equiv 0 \quad (4.1)$$

и согласно (1.17), (1.18) и (1.21)

$$H_2(u) = -2Q \int_0^\infty s^2 \frac{\operatorname{sh} s\theta_0}{\operatorname{th} \pi s} \frac{F_1(s, -u) F_0(s, -a_0)}{\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2} ds \quad (4.2)$$



Фиг. 1

Для функции  $F_0(s, -a_0) \equiv F(is, -is, 2, -a_0)$  можно, используя (2.4) и известные интегральные представления функций Лежандра, получить

$$\begin{aligned} F(is, -is, 2, -a_0) &= \frac{1}{\pi(1+s^2)} \int_0^{2\beta_0} \frac{s \operatorname{cth}^2 \beta_0 \operatorname{sh}^{1/2} \tau \sin s\tau + \operatorname{ch}^{1/2} \tau \cos s\tau}{(\operatorname{sh}^2 \beta_0 - \operatorname{sh}^2 1/2\tau)^{1/2}} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi s} \int_0^{2\beta_0} \frac{\operatorname{sh}^{1/2} \tau (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh}^2 \beta_0) \sin s\tau}{\operatorname{sh}^2 \beta_0 (\operatorname{sh}^2 \beta_0 - \operatorname{sh}^2 1/2\tau)^{1/2}} d\tau, \operatorname{sh}^2 \beta_0 = a_0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для решения задачи В вновь можно воспользоваться представлением  $C(s)$  в виде (2.5). При этом, однако, возникают несколько иные требования на  $\varphi(\tau)$  ввиду того, что первое соотношение (1.20) в отличие от (1.19) содержит в качестве множителя  $s$ , а не  $s^3$ . Повторяя рассуждения п.2° § 2, убеждаемся, что в данном случае достаточно потребовать интегрируемости  $\varphi(\tau)$  на отрезке  $(0, 2\beta_0)$ , но необходимо дополнительно наложить требование

$$\int_0^{2\beta_0} \tau \varphi(\tau) d\tau = 0 \quad (4.4)$$

Это требование в дальнейшем используется для определения постоянной  $r_2$ . Задача определения  $\varphi(\tau)$  вновь приводится к интегральному уравнению вида (2.9) с заменой  $\varepsilon_1(s)$  на

$$\varepsilon_2(s) = 1/2 \operatorname{cth} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0 [\operatorname{sh} s\theta_1 \operatorname{sh} s\theta_2]^{-1} - 1 \quad (4.5)$$

и величины  $H_1(u)$  в (2.11) на  $1/4 H_2(u)$ . Используя выражения (4.2) и (4.3), получаем, что функция  $\varphi(\tau)$  представляется в виде

$$\varphi(\tau) = -\frac{2Q}{\pi} \frac{\operatorname{sh}^{1/2} \tau (\operatorname{ch} \tau - \operatorname{sh}^2 \beta_0)}{\operatorname{sh}^2 \beta_0 (\operatorname{sh}^2 \beta_0 - \operatorname{sh}^2 1/2\tau)^{1/2}} + r_2 \zeta(\tau) \quad (4.6)$$

Здесь  $\zeta(\tau)$  удовлетворяет уравнению

$$\zeta(\tau) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\alpha) K(\alpha, \tau) d\alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{sh} \tau \quad (4.7)$$

где

$$K(\alpha, \tau) = 2 \int_0^\infty \sin \alpha s \sin \tau s \left[ \frac{\operatorname{cth} \pi s \operatorname{sh} s\theta_0}{2 \operatorname{sh} \theta_1 s \operatorname{sh} \theta_2 s} - 1 \right] ds \quad (4.8)$$

В силу соотношений (4.7) и (4.8)  $\zeta(\tau)$  разлагается в ряд по нечетным степеням  $\tau$  2°. Используя выражения (1.3), (1.7), (1.16), (2.5), (4.3) и (4.6), представим решение  $\psi(u, \theta)$  при  $0 \leq \theta \leq \theta_1$ , в виде

$$\begin{aligned} \psi(u, \theta) &= \frac{u^2}{2} \int_0^\infty \frac{s(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_1} \left[ \frac{1}{s} \int_0^{2\beta_0} \varphi(\tau) \sin s\tau d\tau + 2Q F_0(s, -a_0) \right] F(s, -u) ds = \\ &= \frac{r_2 u^2}{2} \int_0^\infty \frac{(1+s^2) \operatorname{sh} s\theta}{\operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_1} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau ds \end{aligned} \quad (4.9)$$

Координаты границы застойной зоны даются при этом выражениями, следующими из (4.8) и (3.2) и (3.3)

$$\lambda z_0 = r_2 \int_0^\infty s \frac{\operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s\theta_1} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau ds \quad (4.10)$$

$$\lambda [z(\theta) - z_0] = r_2 e^{i\theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \right) \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} s\theta \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s\theta_1} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau ds \quad (4.11)$$

При малых  $\beta_0$  имеем отсюда, определяя  $\zeta(\tau)$  из уравнения (4.7) и постоянную  $r_2$  из (4.4)

$$\lambda z_0 = 2Q \int_0^\infty \frac{s^3 \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s\theta_1} ds + 0(a_0) \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \lambda [z(\theta) - z_0] \approx & - \left\{ 2Q e^{i\theta} \left( i - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \int_0^\infty s \left[ \frac{\operatorname{sh} s\theta \operatorname{cth} \pi s}{\operatorname{sh} s\theta_1} - e^{-s\xi} \right] ds - \right. \\ & - i e^{i\theta} \frac{3Q}{4\beta_0^3} (1 - 2/5\beta_0^2) [23\beta_0 - 1/3\beta_0 \xi^3 + 4/9\beta_0^3 - \xi (1 - 1/6\xi^2) \operatorname{arctg} \frac{2\beta_0}{\xi}] + \\ & \left. + e^{i\theta} \frac{3Q}{4\beta_0^3} (1 - 2/5\beta_0^2) \left[ \xi\beta_0 - \frac{\xi \operatorname{sh} 2\beta_0}{\xi^2 + 4\beta_0^2} + (1 - 1/2\xi^2) \operatorname{arctg} \frac{2\beta_0}{\xi} \right] \right\}_{\theta=0}^{\theta=\theta} \\ & (\xi = \theta_1 - \theta) \end{aligned} \quad (4.13)$$

3°. Наряду с определением границы застойной зоны для движений, приводящих к задаче В, важно знать также перепад приведенного напора  $H$  между источниками и стоками (рассматриваемыми при этом уже как скважины) малого, но конечного радиуса).

Приведенный напор как функция от  $(u, \theta)$  может быть определен интегрированием уравнений (см. [1])

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{1+u}{u^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta} = - \frac{(1+u)^2}{u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \quad (4.14)$$

Определим, используя эти уравнения, перепад напора между точками линии тока  $\psi = 0$ . Выберем вначале точку  $u = u_1 \gg 1$ , т. е. точку, лежащую в физической плоскости в непосредственной близости от источника (на расстоянии порядка  $R_1 = Q / (\pi u_1)$ ). Перепад напора между этой точкой вершины застойной зоны равен

$$\begin{aligned} H_1 - H_0 = & \int_0^{u_1} \frac{1+u}{u^2} \frac{\partial \psi(u, 0)}{\partial \theta} du = r_2 \int_0^\infty \frac{(1+s^2) [1 - F_0(s, -u_1)]}{\operatorname{sh} \pi s \operatorname{sh} s\theta_1} \times \\ & \times \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau ds = \frac{Q \ln u_1}{\theta_1} - \frac{Q}{\theta_1} + 0(a_0) + 0(1/\ln u_1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Для перепада напора между точками границы застойной зоны имеем:

$$H_0 - H(\theta) = \int_0^\theta \chi(\theta) d\theta = r_2 \int_0^\infty \frac{(1+s^2) (\operatorname{ch} s\theta - 1)}{s \operatorname{th} \pi s \operatorname{sh} s\theta_1} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau ds$$

В частности, при  $\theta = \theta_1$

$$\begin{aligned} H_0 - H(\theta_1) = & r_2 \int_0^\infty \frac{1+s^2}{s \operatorname{th} \pi s} \operatorname{th} \frac{s\theta_1}{2} \int_0^{2\beta_0} \zeta(\tau) \sin s\tau d\tau ds \approx \\ \approx & 2Q \int_0^\infty (1+s^2) \left( \frac{\operatorname{th} 1/2 s\theta_1}{\operatorname{th} \pi s} - 1 \right) ds + \frac{3\pi Q}{8\beta_0^3} + \frac{3\pi Q}{5\beta_0} + 0(1) \end{aligned} \quad (4.16)$$

До сих пор рассматривалась часть решения, отвечающая  $0 \leq \theta \leq \theta_1$ . Однако в силу очевидной симметрии задачи В все формулы сохраняют смысл и для области  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_0$ , если заменить  $\theta$  на  $\theta_0 - \theta$ , а  $\theta_1$  на  $\theta_2 = \theta_0 - \theta_1$ , и отсчитывать координаты не от источника, а от стока. Таким образом может быть полностью построена граница застойной зоны.

4°. **Пример.** Приведенные формулы позволяют определить все представляющие практический интерес величины для задачи об источнике и стоке [1] (или, что то же самое, для задачи об источнике вблизи прямолинейного контура питания (т. е. линии постоянного напора)). Этому случаю отвечает  $\theta_1 = \theta_2 = \pi$ .

По формуле (4.12) для расстояния от источника до острия застойной зоны имеем

$$\lambda z_0 = 2Q \int_0^{\infty} s^2 \frac{\operatorname{ch} \pi s}{\operatorname{sh}^2 \pi s} ds = \frac{Q}{\pi} \quad (4.17)$$

Далее (4.14) дает

$$\begin{aligned} \frac{\lambda [z(\theta) - z_0]}{Q} = & -e^{i\theta} \left\{ \frac{4}{(\pi - \theta)^3} - \frac{\theta \sin^{1/2} \theta}{2\pi (\cos^{1/2} \theta)^3} - \frac{1}{\pi (\cos^{1/2} \theta)^2} - \right. \\ & - \frac{3}{4\beta_0^3} (1 - 2/5\beta_0^2) \left[ (\pi - \theta) \beta_0 - \frac{(\pi - \theta) \operatorname{sh} 2\beta_0}{(\pi - \theta)^2 + 4\beta_0^2} + (1 - 1/2(\pi - \theta)^2) \operatorname{arctg} \frac{2\beta_0}{\pi - \theta} \right] + \\ & + i \left[ \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2\pi (\cos^{1/2} \theta)^2} - \frac{2}{(\pi - \theta)^2} + \frac{3}{4\beta_0^3} (1 - 2/5\beta_0^2) \times \right. \\ & \left. \left. \times \left( 2\beta_0 - 1/3\beta_0 (\pi - \theta)^2 + 4/9\beta_0^3 - (\pi - \theta) (1 - 1/6(\pi - \theta)^2) \operatorname{arctg} \frac{2\beta_0}{\pi - \theta} \right) \right] \right\} \quad (4.18) \end{aligned}$$

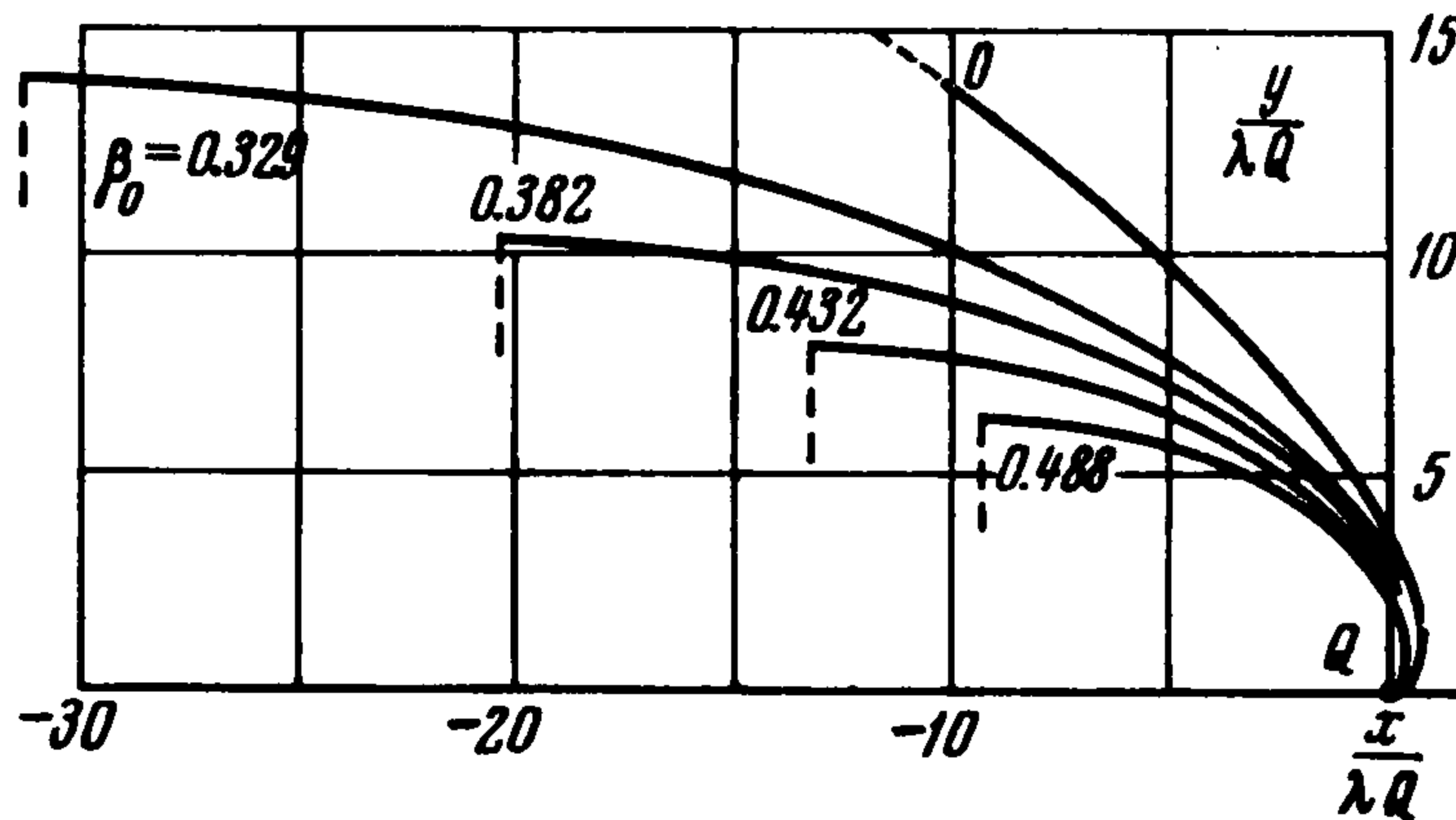
Наконец, из (4.16)

$$H_0 - H(\pi) = 3/8\pi\beta_0^{-3}Q + 3/5\pi\beta_0^{-1}Q - 10/3\pi^{-1}Q \quad (4.19)$$

Полагая в (4.18)  $\theta = \pi$ , находим

$$\lambda [z(\pi) - z_0]/Q = -3/8\pi\beta_0^{-3}(1 - 0.4\beta_0^2) + i(3/2\beta_0^{-2} - 0.1) \quad (4.20)$$

Это соотношение устанавливает связь между параметром  $\beta_0$  и половиной расстояния между источником и стоком  $L_0 = -x(\pi)$ . Граница застойной зоны, рассчитанная по формуле (4.19), при нескольких значениях  $a_0 = \operatorname{sh}^2 \beta_0$  показана на фиг. 2.



Фиг. 2

Автор благодарит Г. И. Баренблатта, Р. Л. Салганика и А. Е. Сегалова за ряд ценных советов.

Поступила 13 XI 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Е н т о в В. М. О некоторых двумерных задачах теории фильтрации с предельным градиентом. ПММ, 1967, т. 31, вып. 5.
2. Р у х о в е ц А. Н., У ф л я н д Я. С. Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
3. У ф л я н д Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, изд. 2, Л., «Наука», 1967.
4. Е н т о в В. М. Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
5. Л е б е д е в Н. Н. Специальные функции и их приложения, М., Физматгиз, 1963.
6. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М., «Наука», 1965.
7. С н е д д о н И. Преобразования Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1955.
8. З а б р е й к о П. П., К о ш е л е в А. И., К р а с н о с е л ь с к и й М. А., М и х л и н С. Г., Р а к о в щ и к Л. С., С т е ц е н к о В. Я. Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.