ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Н. В. Хуснутдинова

(Новосибирск)

Исследуется асимптотика задачи обтекания криволинейного препятствия потоком вязкой несжимаемой жидкости в приближениях пограничного слоя.

Выясняются условия, при которых решение этой задачи устанавливается к решению Блазиуса, соответствующего обтеканию пластинки.

Направим ось x вдоль границы обтекаемого препятствия, ось y в направлении нормали, через u, v. Обозначим компоненты скорости соответственно вдоль оси x и y через $U(x)$ продольную компоненту скорости внешнего потока, ν — коэффициент вязкости и положим плотность $\rho = 1$. Система уравнений Прандтля в области $P\{0 < x < \infty,\ 0 < y < \infty\}$ и соответствующие граничные условия в этих обозначениях имеют вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U(x)\frac{dU(x)}{dx}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$u|_{y=0} = 0, \quad v|_{y=0} = 0, \quad u|_{x=0} = u_0(y), \quad \lim_{y\to\infty} u(x, y) = U(x) \tag{2}$$

где предел существует и конечен для каждого x, $x \in [0, \infty]$. Функция $U(x)$ связана с давлением $p(x)$ законом Бернулли

$$2p(x) + U^2(x) = C = \text{const}$$

Будем предполагать, что решение u, v системы (1) с условиями (2) в области P существует и компонента $u(x, y)$ обладает следующими свойствами: при $y > 0$ $u(x, y) > 0$, $u(x, y)$ непрерывна и ограничена в области $\overline{P}\{0 \leqslant x < \infty,\ 0 \leqslant y < \infty\}$.

Соответствующая теорема существования решения задачи (1), (2) установлена в работе О. А. Олейник [1] в предположении, что первоначальный профиль $u_0(y)$ и функция $U(x)$ являются достаточно гладкими, $u_0(y) > 0$ при $y > 0$, $u_0'(0) > 0$

$$u_0(0) = 0, \quad u_0(\infty) = U(0), \quad dp/dx \leqslant 0$$

В работе О. А. Олейник [2] в случае $(dp/dx \leqslant 0)$ изучалось поведение компоненты скорости $u(x, y)$ в пограничном слое (1), (2) при $x \to \infty$. Было показано, что при больших x влияние первоначального профиля $u_0(y)$ мало, разность решений, соответствующих различным профилям $u_0(y)$, стремится вдоль линий тока к нулю при $x \to \infty$.

В работе Дж. Серрина [3] доказывается, кроме того, что эта разность стремится к нулю и в физической плоскости переменных x и y. В указанных работах профили скорости $u^1(x, y)$ и $u^2(x, y)$, соответствующие различным начальным функциям $u_0^i(y)$ $(i = 1, 2)$, формируются под воздействием одного и того же внешнего потока $U(x)$. В данной работе при больших значениях x сравниваются скорости $u^1(x, y)$ и $u^2(x, y)$, соответствующие как различным начальным функциям $u_0^i(y)$, так и различным компонентам $U_i(x)$ $(i = 1, 2)$ внешнего потока в случае, когда

$$\lim_{x\to\infty} U_i(x) = U_\infty = \text{const} \qquad (i = 1, 2)$$

Доказывается, что, если

$$\lim_{x\to\infty} |U_1(x) - U_2(x)| = \lim_{y\to\infty} |u_0^1(y) - u_0^2(y)| = 0$$

то при $x \to \infty$ разность компонент $u^1(x, y)$ и $u^2(x, y)$ стремится к нулю равномерно относительно y, $y \in [0, \infty)$. Отсюда, в частности, следует, что профиль скорости $u(x, y)$, формирующийся для больших x в пограничном слое (1), (2), асимптотически сходится к известному решению Блазиуса [4]

$$u_1 = U_\infty f'(\eta), \qquad \eta = \sqrt{U_\infty}\, y / \sqrt{2\nu(x+1)}$$

которое соответствует обтеканию пластинки в продольном направлении со скоростью $U(x) \equiv U_\infty$. Заметим, что входящая в решение Блазиуса функция тока $f(\eta)$ является решением краевой задачи

$$ff'' + f''' = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1 \tag{3}$$

и представляет собой монотонно возрастающую вместе с первой производной функцию.

Получены также оценки, характеризующие порядок сходимости соответствующих решений друг к другу.

Теорема. Пусть выполнены неравенства

$$0 \leqslant u_0(y) \leqslant U(0), \quad u_0'(0) > 0, \quad u_0(0) = 0 \tag{4}$$

$$0 \leqslant dU/dx \leqslant M_0/(x+1)^{\gamma_0+1}, \quad \gamma_0 > 0 \tag{5}$$

Тогда при $x \to \infty$ равномерно относительно y, $y \in [0, \infty)$ $|u(x, y) - u_1(x, y)| \to 0$, где $u_1(x, y) = U_\infty f'(\eta)$, $f(\eta)$ — решение краевой задачи (3).

Если выполняются дополнительные неравенства

$$U(0) f'(y - N) \leqslant u_0(y) \qquad y \in [N, \infty) \tag{6}$$

$$|u_0(y) - U(0)| \leqslant M_1 \exp\{-\gamma_1 y^2\} \qquad y \in [0, \infty) \tag{7}$$

для некоторых постоянных N, M_1, $\gamma_1 > 0$, то имеет место оценка

$$|u(x, y) - u_1(x, y)| \leqslant M/(x+1)^\gamma \tag{8}$$

где M, $0 < \gamma < \gamma_0$ — некоторые постоянные, зависящие лишь от начальных данных задачи.

Доказательство. В переменных Мизеса

$$x = x, \qquad \psi = \psi(x, y) = \int_0^y u(x, y)\, dy \tag{9}$$

система Прандтля относительно функции $\omega = u^2(x, \psi)$ в области $Q\{0 < x < \infty, 0 < \psi < \infty\}$ сводится к уравнению

$$\nu \sqrt{\omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \omega}{\partial x} = -2U(x)\, dU/dx \tag{10}$$

а условия (2) преобразуются к виду

$$\omega|_{\psi=0} = 0, \quad \omega|_{x=0} = \omega_0(\psi), \quad \lim_{\psi\to\infty} \omega(x, \psi) = U^2(x) \tag{11}$$

Рассмотрим функцию

$$\omega_2(x, \psi) = u_2^2(x, \psi) = [U(x) - \delta]^2 [f'(\eta)]^2, \quad \eta = \sqrt{U_\infty}(y - N)/\sqrt{2\nu(x+1)}$$

$$N > 0, \qquad y = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_1}$$

Пусть δ удовлетворяет условию $0 < \delta < U(0)$.

С ростом N функция $f'(\eta)$ убывает и

$$\lim_{\psi\to\infty} \omega_2(0, \psi) = [U(0) - \delta]^2 < U^2(0) = \lim_{\psi\to\infty} \omega_0(\psi)$$

поэтому в силу неравенств (4) при достаточно большом значении N и всех $\psi \geqslant N$ будет выполняться неравенство

$$\omega_2(0, \psi) \leqslant \omega_0(\psi) \tag{12}$$

Для простоты дальнейших рассуждений положим сначала $N = 0$ и докажем, что всюду в области Q

$$\omega_2(x, \psi) \leqslant \omega(x, \psi) \tag{13}$$

Разность $z = \omega - \omega_2$ удовлетворяет уравнению

$$L(z) \equiv \nu \sqrt{\omega}\, \frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} - \frac{\partial z}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial \psi^2} \frac{z}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}} = F_0(x, \psi)$$

$$F_0(x, \psi) = -2U(x) \frac{dU}{dx} [1 - (f'(\eta))^2] + \nu \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial \psi^2} \frac{\omega_1 - \omega_2}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}} - 2\delta \frac{dU}{dx} [f'(\eta)]^2$$

$$\omega_1 = u_1^2(\eta) = U_\infty^2 [f'(\eta)]^2$$

Так как

$$|f'(\eta)| \leqslant 1, \ \omega_1 - \omega_2 \geqslant 0, \ \frac{\partial^2 \omega_2}{\partial \psi^2} \leqslant 0, \text{ то } F_0(x, \psi) \leqslant 0,$$

отсюда вытекает справедливость в области Q неравенства $z \geqslant 0$. Действительно, предположим противное $z(x_0, \psi_0) < 0$ в некоторой точке $(x_0, \psi_0) \in Q$. Функция $z(x, \psi) \geqslant 0$ на границе $\Gamma\{x = 0, \psi = 0\}$ области Q и

$$\lim_{\psi \to \infty} z(x, \psi) = 2U(x)\, \delta - \delta^2 > 0$$

Поэтому в области $Q_1 \{0 < x \leqslant x_0, 0 < \psi < \infty\}$ в некоторой точке (x_1, ψ_1) достигается отрицательный минимум функции $z(x, \psi)$. В этой точке

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \psi^2} \geqslant 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} \leqslant 0, \qquad z < 0$$

Отсюда $L(z) > 0$. С другой стороны, $L(z) = F_0(x, \psi) \leqslant 0$. Итак, сделанное предположение привело к противоречию. Следовательно, всюду в области Q выполняется неравенство (13). Пусть

$$u_1(x, \psi) = u_1(\eta)$$

Лемма 1. В области Q имеет место оценка

$$|u(x, \psi) - u_1(x, \psi)| \leqslant M_2 / (x + 1)^{\gamma_2} + \varepsilon_2 \tag{14}$$

где M_2, $0 < \gamma_2 \leqslant \gamma_0$ — некоторые постоянные, $\varepsilon_2 > 0$ сколь угодно мало.

Доказательство. Разность $\sigma = \omega - \omega_1 + c$ $(c = c(x) = U_\infty^2 - U^2(x))$ удовлетворяет уравнению

$$L^1(\sigma) \equiv \nu \sqrt{\omega}\, \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \psi^2} \frac{\sigma}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}} = \nu \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \psi^2} \frac{c(x)}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$W(x, \psi) = \sigma(x, \psi) - \mu(x, \psi) + \varepsilon_1, \ \mu(x, \psi) = M \exp\{-\alpha\theta(\eta)\} / (x + 1)^\gamma$$

При произвольно фиксированном $\varepsilon_1 > 0$ выберем постоянные M, $\gamma > 0$, $\alpha > 0$ и функцию $\theta(\eta)$ так, чтобы $W(x, \psi)$ была неотрицательной на границе Γ области Q и всюду в области Q выполнялось неравенство

$$L^1(W) \equiv -\nu \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial \psi^2} \frac{\mu(x, \psi) - c(x)}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}} - \left[\nu \sqrt{\omega}\, \frac{\partial^2 \mu}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \mu}{\partial x}\right] \geqslant 0 \tag{15}$$

Тогда рассуждениями, аналогичными приведенным при доказательстве неравенства (13), получим $W(x, \psi) \leqslant 0$ в области Q. Для второго слагаемого в формуле (15) имеем

$$L_1(\mu) = \nu \sqrt{\omega}\, \frac{\partial^2 \mu}{\partial \psi^2} - \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{U_\infty \alpha \mu(x, \psi)}{2(x+1)} \left\{ \frac{\sqrt{\omega}}{\omega_1} \left[\alpha \left(\frac{d\theta}{d\eta} \right)^2 - \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{f''(\eta)}{f'(\eta)} \frac{d\theta}{d\eta} \right] - \frac{f(\eta)}{U_\infty f'(\eta)} \frac{d\theta}{d\eta} \right\} + \frac{\gamma \mu(x, \psi)}{(x+1)}$$

Если $\theta_\eta' \geqslant 0$, то

$$L_1(\mu) \leqslant \frac{B(x,\psi)}{f'(\eta)} L_2[\theta(\eta)] + \frac{\gamma\mu(x,\psi)}{(x+1)}, \qquad B(x,\psi) = \frac{\alpha\mu(x,\psi)}{(x+1)} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_1}} \tag{16}$$

$$L_2[\theta(\eta)] = \alpha\left(\frac{d\theta}{d\eta}\right)^2 - \frac{d^2\theta}{d\eta^2} + \left[\frac{f''(\eta)}{f'(\eta)} - k(\eta) f(\eta)\right]\frac{d\theta}{d\eta}$$

Здесь $k(\eta)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условию

$$k(\eta) > 0 \text{ при } \eta > 0, \quad 0 \leqslant k(\eta) \leqslant \sqrt{\omega_1/\omega}$$

Пусть $\theta(\eta)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\theta_\eta' \geqslant 0, \quad L_2[\theta(\eta)] \leqslant -\delta_0 [f'(\eta)], \quad \delta_0 > 0 \tag{17}$$

Такая функция существует при достаточно малом значении α. Действительно, условиям (17) при некотором δ_0 удовлетворяет функция $\theta_1(\eta) = [\omega_1]^{3/2}$ на отрезке $[0, \eta_0]$ при достаточно малом η_0 и функция $\theta_2(\eta) = [f(\eta)]^2 + c_0$ на интервале $[\eta_0, \infty)$ при достаточно малом значении α.

Очевидно, для построения указанной функции достаточно продолжить функцию $\theta_1(\eta)$ на некоторый интервал (η_0, η_1) так, чтобы полученная функция с требуемой гладкостью переходила в функцию $\theta_2(\eta)$ при $\eta \geqslant \eta_1$ и на интервале (η_0, η_1) удовлетворяла условиям (17).

Тогда неравенство (16) примет вид

$$L_1(\mu) \leqslant \frac{\mu(x,\psi)}{(x+1)}\left[-\frac{\alpha\delta_0}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^{1/2} + \gamma\right]$$

При достаточно малом $\gamma < \dfrac{\alpha\delta_0 U(0)}{2U_\infty}$ имеем

$$\delta_1 = \frac{\alpha\delta_0 U(0)}{2U_\infty} - \gamma > 0, \qquad L_1(\mu) \leqslant -\frac{\mu(x,\psi)\delta_1}{(x+1)}$$

Отсюда

$$L^1(W) \geqslant -\nu\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\psi^2}\frac{\mu(x,\psi) - c(x)}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}} + \frac{\delta_1\mu(x,\psi)}{(x+1)}$$

Всюду в области Q

$$\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\psi^2} = 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2}\frac{1}{u_1} \leqslant 0$$

причем для достаточно больших значений $\eta \geqslant \eta_2$ имеет место оценка

$$\left|\nu\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\psi^2}\frac{1}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}}\right| \leqslant \frac{M_3}{(x+1)}\exp\{-\alpha_0 f^2(\eta)\}, \quad \alpha_0 > 0$$

Поэтому постоянные M, γ, α могут быть выбраны так, чтобы

$$\mu(x,\psi) - c(x) \geqslant 0 \quad \text{при } \eta \leqslant \eta_2$$

$$\nu\frac{\partial^2\omega_1}{\partial\psi^2}\frac{\mu(x,\psi) - c(x)}{\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega_1}} \leqslant \frac{\delta_1\mu(x,\psi)}{(x+1)} \qquad \text{при } \eta \geqslant \eta_2$$

$$\mu(x,\psi) - c(x) \geqslant 0 \quad \text{при } \eta < \eta_2$$

Тогда $L^1(W) \geqslant 0$, а тем самым $W(x,\psi) \leqslant 0$ в области Q.

Учитывая неравенство (13), получим

$$\omega_2 \equiv u_2^2 \leqslant \omega \leqslant \omega_1 + \mu - c + \varepsilon_1$$

т. е.

$$u_2(x,\psi) \leqslant u(x,\psi) \leqslant \sqrt{\omega_1 + \mu + \varepsilon_1} \leqslant u_1 + \sqrt{\mu} + \sqrt{\varepsilon_1}$$

откуда

$$|u(x,\psi) - u_1(x,\psi)| \leqslant |u_1(x,\psi) - u_2(x,\psi)| + \sqrt{\mu(x,\psi)} + \sqrt{\varepsilon_1} \tag{18}$$

Но при некоторых значениях постоянных M, α, γ, δ

$$|u_1(x, \psi) - u_2(x, \psi)| = |U_\infty - U(x) + \delta| f'(\eta) \leqslant \sqrt{\mu(x, \omega)} + \sqrt{\varepsilon_1}$$

Таким образом, оценка (14) следует непосредственно из неравенства (18).

Пусть для данного значения ψ y и y_1 означают соответствующие физические переменные для компонент скорости $u(x, y)$ и $u_1(x, y)$, т. е.

$$y = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u}, \qquad y_1 = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_1}$$

Лемма 2. При всех x, $x \in [0, \infty)$ имеют место неравенства

$$y_1 - y \leqslant M_4 \sqrt{x+1}\, a(x) \ln\left[1 + \frac{bU_\infty}{a(x)}\right] + \frac{a(x)}{bU_\infty} y_1 \tag{19}$$

$$y_1 - y \geqslant \frac{U(x) - U_\infty - \delta}{U(x)} y_1 \tag{20}$$

где

$$a(x) = \frac{M_2}{(x+1)^{\gamma_2}} + \varepsilon_2, \qquad M_4 = [2\nu b^{-1} U_\infty^{-1}]^{1/2}, \qquad b = f'(1)$$

Неравенство (19) доказывается с использованием оценки (14) данной работы полностью аналогично получению соответствующей оценки в лемме 4 работы [3].

Учитывая неравенства

$$u(x, \psi) \geqslant u_2(x, \psi) \geqslant \frac{U(x) - \delta}{U_\infty} u_1(x, \psi)$$

получим

$$y_1 - y = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_1} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{u} \geqslant \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_1} - \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_2} = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_1} - \frac{U_\infty}{U(x) - \delta} \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_1} = \left(1 - \frac{U_\infty}{U(x) - \delta}\right) y_1$$

что и доказывает оценку (20).

Лемма 3. В области P имеет место неравенство

$$|u_1(x, y_1) - u_1(x, y)| \leqslant M_3/(x+1)^{\gamma_3} + \varepsilon_3 \qquad (\gamma_3 < \gamma_2) \tag{21}$$

Здесь $M_3 > M_1$ — некоторая постоянная, $\varepsilon_3 \to 0$ при $(\varepsilon_2, \delta) \to 0$.

В силу оценки (13) имеем

$$y \leqslant y_2 = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_2} = \frac{U_\infty y_1}{U(x) - \delta} \leqslant \frac{U_\infty}{U(0) - \delta} y_1 = y_*$$

Отсюда, используя оценки (19), (20), получим

$$|u_1(x, y) - u_1(x, y)| \leqslant \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y_*)\right| |y_1 - y| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y_*)\right| M_4 \sqrt{x+1}\, a(x) \ln\left[1 + \frac{bU_\infty}{a(x)}\right] + \left|\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y_*)\right| \frac{M_5 a(x)}{bU_\infty + a(x)} y_1$$

Учитывая при оценке второго слагаемого неравенство

$$\left|\frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y_*)\right| = f''\left(\frac{U_\infty}{U(0) - \delta}\eta\right)\left(\frac{U_\infty}{2\nu(x+1)}\right)^{1/2} \leqslant \frac{U_\infty}{y_*}$$

справедливое в силу условия $\partial^2 u_1/\partial y^2 \leqslant 0$, придем окончательно к оценке (21).

Переходим к доказательству теоремы. Имеем

$$
\begin{aligned}
&| u (x, y) - u_1 (x, y) | \leqslant | u (x, y) - u_1 (x, y_1) | + |u_1 (x, y_1) - u_1 (x, y) | \leqslant \\
&\leqslant \frac{M_2}{(x+1)^{\gamma^2}} + \frac{M_3}{(x+1)^{\gamma_3}} + \varepsilon \leqslant \frac{M}{(x+1)^{\gamma}} + \varepsilon
\end{aligned}
\tag{22}
$$

Так как вместе с ε_1 и δ произвольно также и ε, то равномерно относительно y, $y \in [0, \infty)$

$$\lim_{x\to\infty} | u (x, y) - u_1 (x, y) | = 0$$

Если выполнены неравенства (6) и (7), то оценка (13) имеет место при $\delta = 0$ и при определении функции $W (x, \psi)$ можно положить $\varepsilon_1 = 0$ за счет выбора α и M из условий $\alpha \leqslant \gamma_1$, $M \geqslant M_1$. Тогда в неравенствах (14), (21), (22) $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon = 0$, откуда следует оценка (8).

В случае $N \neq 0$ неравенство (13) имеет место только при $\psi \geqslant N$, поскольку лишь для этих значений определена функция $\omega_2 (x, \psi)$.

В этом случае в лемме 1 неравенство (18) имеет место при $\psi \geqslant N$, а при $\psi \in [0,N]$ выполняется неравенство

$$0 \leqslant u (x, \psi) \leqslant | u_1 (x, \psi) | + \sqrt{\mu (x, \psi)} + \sqrt{\varepsilon_2}$$

Отсюда следует оценка (14).

В лемме 2 оценка снизу проводится следующим образом.

В силу условия $u_0' (0) > 0$ существует такая постоянная m_0 $(0 < m_0 < U (0))$ при $x = 0$

$$m_0 [f' (\eta)] |_{x=0} \leqslant u_0 (y), \qquad \eta = \sqrt{m_0}\, y / \sqrt{2\nu (x+1)}$$

Отсюда вследствие принципа максимума

$$u (x, y) \geqslant m_0 [f' (\eta)] = \frac{m_0}{U_\infty} u_1 (\eta)$$

Тогда

$$y_1 - y \geqslant -2a (x) \frac{U_\infty}{m_0} J \qquad \left(J = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_1 (u_1 + a (x))} \right)$$

Оценивая далее интеграл J аналогично тому, как это делается в лемме 4 работы [3], получим окончательно

$$y_1 - y \geqslant - \frac{2U_\infty M_4}{m_0} \sqrt{x+1}\, a (x) \ln \left[1 + \frac{bU_\infty}{a (x)} \right] + \frac{2a (x) U_\infty}{m_0 (bU_\infty + a (x))} y_1$$

Доказательство леммы 3 и все последующие рассуждения не отличаются от приведенных для случая $N = 0$. Теорема доказана.

Поступила 15 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
2. Олейник О. А. О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 1.
3. Serrin J. Asymptotic behaviour of velocity profiles in the Prandte boundary layer theory. Proc. Roy. Soc. Ser. A., 1967, vol. 299, No. 1459.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956.