Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

АСИММЕТРИЧНАЯ МЕХАНИКА ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

В. Н. Николаевский

(Москва)

В работе [1] было предложено отказаться от гипотезы о симметрии тензора рейнольдсовых напряжений в турбулизованной жидкости и вводить в рассмотрение уравнение сохранения момента количества движения. Это уравнение оказывается нетривиальным, если, например, пульсационный перенос импульса через сечение потока зависит от ориентации рассматриваемого сечения в пространстве.

В предлагаемой статье уравнения асимметричной механики турбулентных потоков выводятся путем перехода от интегральных законов сохранения (в предположении, что микродвижения описываются уравнением Навье — Стокса). При этом феноменологические характеристики турбулизованной жидкости вводятся естественным образом — как средние (для рассматриваемого элемента жидкой массы) значения соответствующих микрохарактеристик или их потоков. Даны формулировки замыкающих кинетических гипотез о внутреннем кинетическом моменте (турбулентных вихрей) и пульсационном переносе импульса и момента количества движения.

1. Законы сохранения массы, импульса и момента количества движения для эйлерова объема V, ограниченного поверхностью S, как известно [2], имеют следующий вид:

$$\int\limits_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dV + \int\limits_S \rho u_n dS = 0 \tag{1.1}$$

$$\int\limits_V \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}\,dV + \int\limits_S \rho u_i u_n dS = \int\limits_V \rho F_i dV + \int\limits_S t_{in} dS \tag{1.2}$$

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_{ijk}\rho u_j x_k)\,dV + \int\limits_S \varepsilon_{ijk}\rho u_j x_k u_n dS = \int\limits_V (\rho G_i + \rho\varepsilon_{ijk}x_j F_k)\,dV + \int\limits_S (c_{in} + \varepsilon_{ijk}x_j t_{kn})\,dS \tag{1.3}$$

Здесь ρ — плотность жидкой частицы, u_i — ее скорость, F_i — объемная сила, t_{ij} — тензор напряжений, x (x_k) — радиус-вектор жидкой частицы, G_i — объемный момент, c_{ij} — моментные напряжения, ε_{ijk} — альтернирующий тензор Леви-Чевита. Индексом n помечены компоненты по нормали к элементу поверхности dS.

Интерпретация динамических величин, фигурирующих в подынтегральных выражениях (1.1) — (1.3), зависит от выбора масштабов ассоциированных микрообъемов dV, т. е. от размеров жидких частиц, для которых определены величины ρ, u_i, ... Если движение этих частиц описывается уравнениями Навье — Стокса, а микрообъемы dV достаточно малы, то имеем

$$t_{ij} \equiv t_{ji} = \left(-p + \frac{2}{3}\rho\nu \frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)\delta_{ij} + \rho\nu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{1.4}$$

$$G_i = 0, \qquad c_{ij} = 0$$

Для простоты не будем рассматривать действия объемных сил: $F_i \equiv 0$.

Если исходить из рассмотрения несколько больших жидких частиц, то баланс моментов количества движения сводится к уравнению диффузии вихря, и, например, величины c_{ij} определяются переносом (молекулярным) вихря, см. [1].

Пусть объем V заполнен турбулизованной жидкостью, т. е. жидкостью с турбулентными вихрями, составляющими особую [1] микроструктуру масштаба большего, чем дифференциальный объем $dV = dx_1dx_2dx_3$. Примем, что линейный масштаб турбулентных вихрей настолько меньше характерной длины Δ объема V, что средние по объему V плотность $\langle\rho\rangle$ и массовая скорость U_i

$$\langle\rho\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V \rho dV, \qquad \langle\rho\rangle U_i = \langle\rho u_i\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V \rho u_i dV \tag{1.5}$$

как и другие, определяемые ниже средние величины, уже не будут случайными величинами.

Как обычно, будем относить скорость U_i к центру масс жидкости, заполняющей объем V, т. е. к точке с радиусом-вектором $\mathbf{X}$ (X_1, X_2, X_3), определяемым следующим образом:

$$\langle\rho\rangle X_i = \frac{1}{V}\int\limits_V \rho x_i dV, \qquad \int\limits_V \rho\xi_i dV = 0 \tag{1.6}$$

Здесь $\xi_i = x_i - X_i$ — вектор, определяющий положение точки внутри объема V относительно его центра масс.

Пусть введенное поле средних скоростей $U_i(X_j, t)$ таково, что характерный линейный масштаб градиента скорости порядка L. В дальнейшем ограничимся рассмотрением объемов V, линейные размеры Δ которых гораздо меньше L.

В данной работе изучаются течения турбулизованной жидкости, а именно такие течения, при которых скорость микрочастицы $u_i(\xi_j, t)$ может быть представлена как сумма регулярной и нерегулярной составляющих

$$u_i(\xi_j, t) = \left(U_i + \frac{\partial U_i}{\partial X_j}\xi_j + O\left(\frac{\Delta^2}{L^2}\right)\right) + v_i(\xi_j, t) \tag{1.7}$$

где v_i — турбулентная пульсация (нерегулярная часть) скорости, $L \gg \Delta \gg \xi_j \gg 0$.

---

[1] В отличие от микроструктуры твердых сред рассматриваемая здесь микроструктура меняется случайно и по пространству и во времени.

В силу соотношений (1.5) — (1.7) имеем

$$\int_V \rho v_i dV = 0$$

Дальнейшие предположения относительно поля $v_i(\xi_j, t)$ будут сформулированы ниже.

2. Предположим теперь, что в качестве объема V взят элементарный макрообъем $V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$. Тогда уравнения (1.1) — (1.3) принимают вид

$$\frac{\partial \langle\rho\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle\rho u_j\rangle_j = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \langle\rho u_i\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle\rho u_i u_j\rangle_j = \frac{\partial \langle t_{ij}\rangle_j}{\partial X_j} \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle\varepsilon_{ijk}\rho u_j x_k\rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle\varepsilon_{ilk}\rho u_l x_k u_j\rangle_j = \frac{\partial}{\partial X_j} \langle\varepsilon_{ilk} t_{lj} x_k\rangle_j \tag{2.3}$$

Здесь символом $\langle\varphi_{ij}\rangle_j$ обозначены результаты осреднения величины φ_{ij} по площадке, нормалью к которой служит ось X_j, т. е. по одной из граней объема V.

Интегрирование по объему уравнений, справедливых для микродвижений, и связанное с этим введение средних по объему и по поверхностям величин применялось ранее автором при анализе динамики гетерогенных сред (см., например, [3]). Эринген [4] дал общее рассмотрение этого перехода, проведя сопоставление с известными ранее моделями микрополярной упругости и анизотропных жидкостей.

Умножив уравнение (2.2) векторно на X, получим баланс момента количества поступательного движения

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_{ijk} \langle\rho u_j\rangle X_k) + \frac{\partial}{\partial X_j} (\varepsilon_{ilk} \langle\rho u_l u_j\rangle_j X_k) -$$
$$- \varepsilon_{ilk} \langle\rho u_l u_k\rangle_k = \frac{\partial}{\partial X_j} (\varepsilon_{ilk} \langle t_{lj}\rangle_j X_k) - \varepsilon_{ilk} \langle t_{lk}\rangle_k \tag{2.4}$$

Вычитание из уравнения (2.3) балансового соотношения (2.4) приводит к уравнению сохранения внутреннего момента количества движения для элементарного объема

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle\varepsilon_{ijk}\rho u_j \xi_k\rangle + \frac{\partial}{\partial X_j} \langle\varepsilon_{ilk}\rho u\, \xi_k u_j\rangle_j +$$
$$+ \varepsilon_{ilk} \langle\rho u_l u_k\rangle_k = \frac{\partial}{\partial X_j} \langle\varepsilon_{ilk} t_{lj} \xi_k\rangle_j + \varepsilon_{ilk} \langle t_{lk}\rangle_k \tag{2.5}$$

Теперь введем вместо фигурирующих в уравнениях (2.1), (2.2), (2.5) средних характеристик и их потоков феноменологические параметры турбулентного течения: скорость U_i, тензор рейнольдсовых напряжений R_{ji}, тензор вязких напряжений T_{ij}, внутренний момент инерции J_{ij}, внутреннюю скорость вращения турбулентных вихрей ω_j, тензор моментных напряжений μ_{ij}.

Прежде всего примем, что результаты осреднения векторных величин по объему V и по его граням эквивалентны, т. е.

$$\langle\rho u_i\rangle_j = \langle\rho u_i\rangle = \langle\rho\rangle U_i, \qquad \langle\varepsilon_{ilk}\rho u_l\xi_k\rangle_j = \langle\varepsilon_{ilk}\rho u_l\xi_k\rangle \tag{2.6}$$

и т. д. Тогда, в частности, можно выполнить следующее преобразование:

$$\langle\rho u_i u_j\rangle_j = \langle\rho\rangle U_i U_j - R_{ij} + o\left(\frac{\Delta}{L}\right) \tag{2.7}$$

которое и вводит в уравнение импульса (2.2) рейнольдсовы напряжения

$$R_{ij} = -\langle\rho v_i\ v_j\rangle_j \tag{2.8}$$

Существенно, что тензор R_{ij} в общем случае несимметричен. Вопрос о симметрии (или несимметрии) тензора R_{ij} может быть решен (как и обычно в механике сплошных сред) на основе анализа уравнения для моментов количества движения. Укажем, что в своей оригинальной работе [5] Рейнольдс различал компоненты R_{ij} и R_{ji}.

Если осреднять величины пульсационных скоростей v_i и v_j во времени (как это делается в практике измерений микроструктуры турбулентных течений), то результирующий тензор $\overline{v_i v_j}$ будет корреляционным моментом поля пульсационных скоростей; вообще говоря, он не совпадает с R_{ij}.

Статистическое осреднение (по ансамблю возможных реализаций) уравнений Навье — Стокса приводит к балансовым соотношениям для среднего движения жидкости в элементарном объеме масштаба dx_i (но не dX_i). Укажем, что элементы обсуждения проблемы статистического и объемного осреднений содержит работа [6]. Обычно применяемая форма эргодической гипотезы (эквивалентности всех способов осреднения) исключает изучение асимметричных эффектов.

Рассмотрим средний кинетический момент турбулизованной жидкости. Имеем

$$\langle\varepsilon_{ilk}\rho u_l\xi_k\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V \varepsilon_{ilk}\rho u_l\xi_k dV =$$
$$= \varepsilon_{ilk}\frac{\partial U_l}{\partial X_m}\frac{1}{V}\int\limits_V \rho\xi_m\xi_k dV + \frac{1}{V}\int\limits_V \varepsilon_{ijk}\rho v_j\xi_k dV \tag{2.9}$$

Для дальнейших преобразований необходимо сделать дополнительные предположения о поле пульсаций v_j. Будем считать, что рассматриваемый объем V можно разбить на множество таких малых объемов ΔV с характерным масштабом $2d$, что в каждом из них справедливо представление

$$v_j(\xi_m, t) = w_j + \frac{\partial w_j}{\partial\bar{\xi}_m}\zeta_m \tag{2.10}$$

где $d \geqslant \zeta_m \geqslant 0$, $\bar{\xi}_m = \xi_m - \zeta_m$ — координаты центра масс малого объема ΔV, а $w_j = v_j(\bar{\xi}_m)$ — скорость движения этого центра масс, т. е.

$$\frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V}\rho v_j dV = \bar{\rho}w_j, \qquad \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V}\rho\xi_m dV = \bar{\rho}\bar{\xi}_m$$

$$\int\limits_{\Delta V}\rho\zeta_m dV = 0, \qquad \frac{1}{\Delta V}\int\limits_{\Delta V}\rho dV = \bar{\rho}$$

Тогда интегралы (2.9) можно представить в виде сумм по объемам ΔV

$$\langle \varepsilon_{ilk} \rho u_l \xi_k \rangle = \varepsilon_{ilk} \frac{\partial U_l}{\partial X_m} \frac{1}{V} \sum \bar{\rho} \bar{\xi}_m \bar{\xi}_k \Delta V +$$

$$+ \frac{1}{V} \sum \varepsilon_{ilk} w_l (\bar{\xi}_m, t) \bar{\xi}_k \bar{\rho} \Delta V + \frac{1}{V} \sum \varepsilon_{ilk} \left(\frac{\partial U_l}{\partial X_m} + \frac{\partial w_l}{\partial \bar{\xi}_m} \right) \int\limits_{\Delta V} \rho \zeta_m \zeta_k dV \qquad (2.11)$$

Ограничимся случаем, когда $\Delta \gg d$ и суммы в соотношении (2.11) можно заменить интегралами и соответственно радиусы-вектора $\bar{\xi}_m$ меняются непрерывным образом ($dV = d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 d\bar{\xi}_3$)

$$\langle \varepsilon_{ilk} \rho u_l \xi_k \rangle = \varepsilon_{ilk} \frac{\partial U_l}{\partial X_m} \left(\frac{1}{V} \int\limits_V \bar{\rho} \bar{\xi}_m \bar{\xi}_k dV \right) +$$

$$+ \frac{1}{V} \int\limits_V \varepsilon_{ilk} w_l (\bar{\xi}_m, t) \bar{\xi}_k \bar{\rho} V + M_i \qquad (2.12)$$

где средний внутренний момент M_i носит объемный характер

$$M_i = \frac{1}{V} \int\limits_V \varepsilon_{ilk} \Phi_{lm} i_{mk} dV = \langle \varepsilon_{ilk} \Phi_{lm} i_{mk} \rangle$$

$$\Phi_{lm} = \left(\frac{\partial U_l}{\partial X_m} + \frac{\partial w_l}{\partial \bar{\xi}_m} \right), \qquad i_{mk} = \frac{1}{\Delta V} \int\limits_{\Delta V} \rho \zeta_m \zeta_k dV = O(d^2) \qquad (2.13)$$

а i_{mk} — момент инерции жидкой частицы в объеме ΔV.

В представлении (2.12) (в отличие от предыдущего (2.9)) выделен средний кинетический момент мелкомасштабных турбулентных вихрей. Примем, что вклад поля пульсационных скоростей ограничивается этим объемным моментом M_i, т. е.

$$\frac{1}{V} \int\limits_V \varepsilon_{ilk} w_l (\bar{\xi}_m, t) \bar{\xi}_k \bar{\rho} dV = 0$$

В том случае, когда возникает необходимость выделения вкладов в кинетический момент объема V от вихрей разных масштабов, можно продолжить процедуру перехода от представления (2.9) к форме (2.12), полагая, что центры мелких вихрей также совершают вращательные движения масштаба, скажем d_* ($\Delta \gg d_* \gg d$).

Заметим, что выделение объемов d в непрерывном поле скоростей в какой-то степени произвольно, однако изменение выбора приведет к иному определению и величин ассоциированных градиентов поля скорости, так что изменений кинетического момента M_i не будет. Укажем, что соответствующий момент инерции в работе [1] задавался равным моменту инерции жидкости объема V, а это не отражало объемного характера момента M_i.

Далее первое слагаемое представления (2.12) может быть представлено в виде

$$\varepsilon_{ilk} \frac{\partial U_l}{\partial X_m} \left(\frac{1}{V} \int\limits_V \bar{\rho} \bar{\xi}_m \bar{\xi}_k dV \right) = \varepsilon_{ilk} \frac{\partial U_l}{\partial X_m} I_{mk}$$

где $I_{mk} = I_{km}$ — удельный момент инерции жидкости в элементарном объеме V. Это слагаемое имеет порядок $U\Delta^2 / L$ (U — характерная величина средней скорости). Будем считать, что за счет высокой турбулизации жидкости величина M_i имеет достаточно высокий порядок (даже при $\Delta \gg d$), и первым слагаемым можно пренебречь. Тогда окончательно

$$\langle \varepsilon_{ilk} \rho u_l \xi_k \rangle \approx \langle \varepsilon_{ilk} \Phi_{lm} i_{mk} \rangle = M_i \tag{2.14}$$

где $i_{mk} = i_{km}$ — симметричный тензор. Если объемы ΔV частиц, совершающих пульсационное вращение, симметричны, то $i_{mk} = {}^1/_2\, i\delta_{mk}$ и справедливо выражение

$$M_k = \langle i\Phi_k \rangle \tag{2.15}$$

где $\Phi_k = \Omega_k + \Phi_k{}^*$ — полная угловая скорость внутренних вращений а так как в силу представления (1.7) имеем $\langle \Phi \rangle = \Omega = {}^1/_2 \operatorname{rot} U$, то Φ^* — ее пульсационная составляющая. Можно ввести средние величины удельного момента инерции J и эффективной внутренней скорости вращения ω_i турбулентных вихрей

$$M_i = \langle (J + i^*)(\Omega_i + \Phi_i{}^*) \rangle = J(\Omega_i + \omega_i) \tag{2.16}$$

$$J = \langle i \rangle, \quad \omega_i = \langle i^* \Phi_i{}^* \rangle J^{-1}$$

Здесь i^* — пульсация удельного момента инерции, и можно ввести пульсацию $\omega_i{}^*$ собственной угловой скорости вихря

$$J\omega_i{}^* = i^*\Phi_i{}^* - J\omega_i$$

Далее, согласно указанному выше принципу (2.6), преобразуем потоки кинетического момента к виду

$$\langle \varepsilon_{ilk} \rho u_l \xi_k u_j \rangle_j = M_i U_j - \mu_{ij} + o\left(\frac{\Delta}{L}\right) \tag{2.17}$$

который вводит в уравнение баланса момента количества движения (2.5) моментные напряжения

$$\mu_{ij} = -\langle i\Phi_i v_j \rangle_j \tag{2.18}$$

Кроме того, имеем, с той же степенью точности, представление

$$\varepsilon_{ilk} \langle \rho u_l u_k \rangle_k = \varepsilon_{ilk} \langle \rho v_l v_k \rangle_k = -\varepsilon_{ilk} R_{lk} \tag{2.19}$$

Осреднение вязких напряжений t_{kp} в случае несжимаемости в силу соотношений (1.4), (1.7) сводится к следующему преобразованию:

$$\frac{1}{V}\int_S t_{kn} dS = \frac{\partial \langle t_{kp} \rangle_p}{\partial X_p} = \frac{\partial}{\partial X_p} \left\langle -p\delta_{kp} + \nu\rho\left(\frac{\partial u_k}{\partial \xi_p} + \frac{\partial u_p}{\partial \xi_p}\right)\right\rangle_p =$$

$$= \frac{\partial}{\partial X_p}\left\{-P\delta_{kp} + \nu\rho\left(\frac{\partial U_k}{\partial X_p} + \frac{\partial U_p}{\partial X_k}\right) + \nu\rho\left\langle\left(\frac{\partial v_k}{\partial \xi_p} + \frac{\partial v_p}{\partial \xi_k}\right)\right\rangle_p\right\}, \qquad P = \langle p \rangle_p$$

и в пренебрежении влияния поля пульсационных скоростей на осредненные вязкие напряжения, получаем

$$T_{kp} = \langle t_{kp} \rangle_p = -P\delta_{kp} + \nu\rho\left(\frac{\partial U_k}{\partial X_p} + \frac{\partial U_p}{\partial X_k}\right) \tag{2.20}$$

Следует отметить, что наличие пульсационных скоростей может сказаться на появлении антисимметричной составляющей $\varepsilon_{ilk} T_{lk}$ (см. (2.5)). Однако здесь этот эффект рассматривать не будем.

Аналогично будем пренебрегать моментом вязких напряжений $\langle \varepsilon_{ilk} t_{lj} \xi_k \rangle_j$, действующих на гранях обема V.

3. Итоговая система уравнений асимметричной механики турбулентного потока несжимаемой жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial U_j}{\partial X_j} = 0, \qquad \rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial U_i U_j}{\partial X_j}\right) = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_j} \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial M_i}{\partial t} + \frac{\partial M_i U_j}{\partial X_j} = \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial X_j} + \varepsilon_{ilk} R_{lk}$$

Динамические переменные, появившиеся в балансовых уравнениях импульса и внутреннего момента количества движения, необходимо связать с кинематическими переменными U_i, ω_i, определяющими уравнениями, в рассматриваемом случае характерными для асимметричной гидромеханики [7]. Вслед за Бусинеском будем считать скалярные коэффициенты в определяющих связях функциями осредненных параметров микроструктуры турбулизованной жидкости. Определяющие связи здесь имеют вид

$$\frac{1}{2}(R_{ij} + R_{ji}) = \varepsilon\left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i}\right)$$

$$\frac{1}{2}(R_{ij} - R_{ji}) = -2\gamma\varepsilon_{ijk}\omega_k, \quad \gamma > 0$$

$$\mu_{ij} = (2\alpha\delta_{ij}\delta_{km} + 2\beta\delta_{im}\delta_{jk} + 2\eta\delta_{ik}\delta_{jm})\frac{\partial(\Omega_k + \omega_k)}{\partial X_m} \tag{3.2}$$

Здесь δ_{ij} — единичный тензор, ε — коэффициент турбулентной сдвиговой вязкости, γ — коэффициент турбулентной вращательной вязкости, α, β, η — коэффициенты турбулентной градиентально-вихревой вязкости (отметим различия в терминологии с работой [7]). Для определения коэффициента переноса ε, γ, α, β, η необходимо вводить гипотезы о кинетике перемешивания в турбулентном потоке, пользуясь, например, идеями Тейлора и Прандтля [8,9] о существовании характерной длины смещения — аналога длины свободного пробега в кинетической теории газов.

Соответствующий анализ будет приведен ниже на примере плоского свободного турбулентного потока, стационарного плоского течения, характеризуемого условиями

$$U_1 = U_1(X_1, X_2), \; U_2 = U_2(X_1, X_2), \; U_3 = 0$$

$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0, \quad \Omega_3 = {}^1/_2\,(\partial U_2/\partial X_1 - \partial U_1/\partial X_2) = \Omega \tag{3.3}$$

Кроме того, будем предполагать, что пульсация скоростей ориентированы в среднем таким образом, что

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \qquad \omega_3 = \omega\,(X_1,\ X_2) \tag{3.4}$$

В монографии Шлихтинга ([10], стр. 382, рус. перев.) отмечается, что «при течении вдоль стенки преобладают вихри с осями, параллельными направлению течения, а при свободной турбулентности — вихри с осями, перпендикулярными направлению главного течения и к направлению градиента скорости». В связи с этим будем считать, что условия (3.3) совместно с (3.4) соответствуют свободно турбулентным течениям.

При течении вдоль плоской стенки имеем соответственно $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 = \omega_3 = 0$, и уравнения импульса и момента количества движения разделяются.

Система уравнений (3.1), (3.2) принимает тогда вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{\partial U_2}{\partial X_2} = 0 \\
\rho\left(U_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right) U_i = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial R_{i1}}{\partial X_1} + \frac{\partial R_{i2}}{\partial X_2} \\
\left(U_1 \frac{\partial}{\partial X_1} + U_2 \frac{\partial}{\partial X_2}\right)[J(\Omega + \omega)] = \frac{\partial \mu_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial \mu_{32}}{\partial X_2} + R_{12} - R_{21} \\
R_{12} + R_{21} = 2\varepsilon\left(\frac{\partial U_1}{\partial X_2} + \frac{\partial U_2}{\partial X_1}\right), \qquad R_{11} = -R_{22} = \varepsilon \frac{\partial U_1}{\partial X_1} \\
R_{12} - R_{21} = -4\gamma\omega \\
\mu_{11} = \mu_{22} = \mu_{33} = \mu_{12} = \mu_{21} = 0, \quad \mu_{31} = 2\eta\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial X_1}, \quad \mu_{32} = 2\eta\,\frac{\partial(\Omega+\omega)}{\partial X_2}
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Будем далее рассматривать течения, для которых возможно представление компонент скорости в виде

$$\begin{gathered}
U_1 = U_\infty - U, \qquad U_2 = W \\
U_\infty / U \gg 1, \qquad W / U \approx L_2 / L_1 \ll 1
\end{gathered}$$

где $U_\infty = \mathrm{const}$, L_1, L_2 — масштабы течения по осям X_1, X_2. Тогда на основе оценок, характерных для приближений погранслоя [10], можно существенно упростить систему уравнений (3.5)

$$\begin{gathered}
-U_\infty \frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial}{\partial X_2}\left(-\varepsilon_0 \frac{\partial U}{\partial X_2} - 2\gamma_0\omega\right) \\
U_\infty \frac{\partial}{\partial X_1} J(\Omega + \omega) = -4\gamma_0\omega + \frac{\partial}{\partial X_2} 2\eta_0 \frac{\partial}{\partial X_2}(\Omega + \omega)
\end{gathered} \tag{3.6}$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon\rho^{-1}$, $\gamma_0 = \gamma\rho^{-1}$, $\eta_0 = \eta\rho^{-1}$ — соответствующие «кинематические» турбулентные вязкости, $\Omega = {}^1/_2\ \partial U / \partial X_2$.

4. Перейдем теперь к формулировке гипотез о коэффициентах переноса ε, γ, η и моменте инерции J в турбулентном потоке. Для этого вернемся к рассмотрению выражений компонент напряжений Рейнольдса и моментного напряжения через пульсации

$$r_{12} = -\rho\,\langle v_1 v_2\rangle_2, \quad \mu_{32} = -\rho\,\langle i\Phi v_2\rangle_2, \quad J = \langle i\rangle \tag{4.1}$$

поскольку в рассматриваемом случае $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$, $\Phi = \Phi_3$.

Оценку величин (4.1) будем проводить на основе некоторой идеализированной картины движения «среднего» микроэлемента жидкости в турбулентном потоке, подсчитывая его средние пульсации. Будем оценивать пульсации v_1, v_2 поступательной скорости по разнице средних скоростей U в соседних слоях течения, отстоящих друг от друга на малом расстоянии l. Такая оценка объясняется [8,9] возможностью выделения среднего пути смешения l, в течение прохождения которого жидкий микроэлемент сохраняет [9] свой импульс. Совершая переход между указанными слоями, мигрирующий микроэлемент порождает пульсации скорости, поскольку его скорость отлична от скорости частиц-аборигенов. Так как $U \gg W$, то оценки проводятся по компоненте U — в предположении об изотропии распределения абсолютных величин пульсации поступательной скорости $|v_1| \sim |v_2|$.

В рассматриваемом здесь случае также будем считать, что перенос импульса, обусловленный разностью средних поступательных скоростей в слоях $X_2 = \mathrm{const}$, $X_2 + l = \mathrm{const}$, отстоящих друг от друга на длину «свободного пробега» l, также приводит к равным оценкам величин пульсации v_1 и v_2. Так, через границу слоя $X_2 = \mathrm{const}$ происходит обмен микроэлементов жидкости, причем указанная разница Δ_U импульсов приходящих и уходящих частиц будет составлять

$$\Delta_U(\rho v_1) = \rho U_1(X_2 + l) - \rho U_1(X_2) = \rho l \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \tag{4.2}$$

$$|\Delta_U v_2| \sim |\Delta_U v_1| \sim l \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right|, \quad \rho = \mathrm{const}, \quad l > 0 \tag{4.3}$$

Однако теперь «среднее» микродвижение характеризуется также наличием «среднего» поля внутренних угловых скоростей ω. Будем соответственно считать, что частица-мигрант, совершая пробег длины l, проходит через плоскую вихревую пелену интенсивности $l_*\omega$. Тогда частицы, пересекающие пелену навстречу друг другу, перенесут дополнительно импульс, пропорциональный интенсивности пелены

$$\Delta_\omega(\rho v_1) = \rho l_*\omega - (-\rho l_*\omega) = 2\rho l_*\omega \tag{4.4}$$

Существенно, что наличие вихревой пелены сказывается лишь на тангенциальных компонентах скоростей — нормальные компоненты не меняются. Отсюда

$$\rho v_1 = \rho l \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + 2\rho l_*\omega, \qquad |v_2| = l \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right| \tag{4.5}$$

Если воспользоваться оценками (4.5) и, кроме того, учесть выбор [10] знака для v_2 (напряжение должно иметь тот же знак, что и переносимая величина), то из (4.1) получим

$$r_{12} = \rho l \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right| \left(l \frac{\partial U_1}{\partial X_2} + 2 l_*\omega \right) \tag{4.6}$$

Сопоставление с формулами (3.5) приводит к оценке турбулентных сдвиговой и вихревой вязкостей

$$\varepsilon = \rho l^2 \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right|, \qquad \gamma = \rho l l_* \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right| \tag{4.7}$$

Отметим, что оценка компоненты $r_{21} = -\rho \langle v_2 v_1 \rangle_1$ отличается от вывода выражения для r_{12} следующим. Рассматривается слой $X_1 = \mathrm{const}$. Для мигрирующих через него частиц будет характерно дополнительное приращение (на величину $2l_*\omega$) тангенциальной компоненты скорости — теперь это v_2. Существенно, однако, что знак приращения будет отрицателен (пересечение поля ω частицей-мигрантом теперь происходит в направлении, ортогональном предыдущему), т. е. имеем

$$|v_1| = l \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right|, \qquad \rho v_2 = \rho l \frac{\partial U_1}{\partial X_2} - 2\rho l_* \omega \tag{4.8}$$

$$r_{21} = \rho l \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right| \left(l \frac{\partial U_1}{\partial X_2} - 2 l_* \omega \right) \tag{4.9}$$

Перейдем теперь к оценке момента количества движения, переносимого в слой $X_2 = \mathrm{const}$, частицей-мигрантом «свободно» пробегающей путь длиной l.

Подсчитаем пульсацию переносимого момента количества движения

$$\begin{aligned} (i\Phi)^* &= i\Phi - \langle i\Phi \rangle = (i^* + J)(\Phi^* + \Omega) - J(\Omega + \omega) = \\ &= i^*\Phi^* - J\omega + J\Phi^* = J(\omega^* + \Phi^*) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Отсюда можно оценить кинетический момент $(i\Phi)^*$, переносимый из-за пульсационного обмена частиц через поверхность (толщины l), ограничивающей слой $X_2 = \mathrm{const}$

$$\omega^* = \omega(X_2 + l) - \omega(X_2) = l \frac{\partial \omega}{\partial X_2}, \qquad \Phi^* = \Omega(X_2 + l) - \Omega(X_2) = l \frac{\partial \Omega}{\partial X_2}$$

$$(i\Phi)^* = Jl \frac{\partial}{\partial X_2} (\omega + \Omega) \tag{4.11}$$

Принимая также соображения о выборе знаков, что и выше, получим выражение для моментного напряжения

$$\mu_{32} = Jl^2 \left| \frac{\partial U_1}{\partial X_2} \right| \frac{\partial}{\partial X_2} (\omega + \Omega) \tag{4.12}$$

Отсюда имеем следующее выражение для градиентально-вихревой вязкости:

$$\eta = \frac{1}{2} J l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial X_2} \right| \tag{4.13}$$

Отметим, что соображения, использованные при нахождении оценки (4.13), восходят к идее Тейлора [8,11] о пульсационном переносе вихря.

Для подсчета удельного момента инерции J турбулентных вихрей примем, что рассматриваемый объем V турбулизованной жидкости заполнен жидкими частицами «среднего» радиуса d. Тогда средний удельный момент инерции J (равный отношению полярного момента инерции i «средней» частицы к ее объему, в рассматриваемом случае плоского течения — к ее площади). Тогда возможна оценка

$$J = {}^1\!/_2\, d^2 \qquad (4.14$$

Таким образом, микроструктура турбулизованной жидкости характеризуется тремя параметрами: длиной перемешивания l, диаметром вращающейся микрочастицы $2d$ и шириной вихревой пелены l_*. По-видимому, будет оправдано считать, что независимым является только один параметр «состояния» турбулентной микроструктуры, т. е. скажем $l_* = Al$, $d = Bl$, где A, B — числовые коэффициенты.

Оценка числовых коэффициентов A, B требует привлечения экспериментальных данных или же гипотетических уточнений картины среднего микродвижения (например, длина перемешивания равна диаметру микрочастицы: $l = 2d$, тогда $A = 1$).

5. В теории турбулентных течений известно осредненное уравнение для вихря [11], которое получают путем применения к уравнениям Навье — Стокса последовательных операций $^1/_2$ rot и осреднения (все способы осреднения считаются эквивалентными). Например, в монографии Таунсенда [12] оно приведено для стационарного трехмерного течения и отмечается, что это уравнение турбулентного переноса вихрей имеет вид уравнения сохранения в плоском случае, когда, например, только компоненты $\Omega_3 = \Omega$, $\Phi_3 = \Phi$ отличны от нуля, а все переменные — функции от X_1, X_2

$$\frac{\partial}{\partial X_j}(\Omega U_j) = -\frac{\partial}{\partial X_j}\overline{\Phi v_j} + \nu\nabla^2\Omega, \qquad j = 1,\, 2 \tag{5.1}$$

Уравнение переноса вихря Тейлора (5.1) можно получить также, если применить процедуру осреднения по объему V к уравнению диффузии вихря Φ в плоском случае, когда последнее имеет дивергентный вид. При этом в уравнении (5.1) следует сделать замену $\overline{\Phi v_j} = \langle \Phi v_j \rangle_j$. Таким образом, составление баланса вихря для объема V турбулизованной жидкости не выявляет наличия средней угловой скорости собственного вращения турбулентных вихрей $\boldsymbol{\omega}$ — кинематически независимой величины. Простое осреднение уравнения вихря и его осреднение с весом (т. е. осреднение кинетического момента) приводят к различным результатам. В тех случаях, когда $\boldsymbol{\omega} = 0$, уравнения баланса вихря (5.1) или уравнение для момента количества движения системы (2.5) должны быть следствием уравнения баланса импульса.

Существенно, что при построении полуэмпирических теорий турбулентности, уравнение переноса вихрей (5.1) рассматривалось Тейлором [11], а вслед за ним и другими исследователями, как уравнение, заменяющее уравнение для импульса, хотя и отмечалась необходимость введения независимой кинетической гипотезы. По-видимому, только Маттиоли [13, 14] принял более общую точку зрения; он рассматривал осредненные уравнения импульса и момента количества движения как фундаментальные, независимые уравнения турбулентных течений. Маттиоли (ограничиваясь, впрочем, гидравлической постановкой анализа турбулентного течения в круглой трубе) вводил дополнительные характеристики турбулентной жидкости — вихрь, момент инерции и момент внутренних сил Г. Однако Маттиоли считал, что вихрь кинематически связан с полем средних скоростей, момент инерции — постоянная величина, а момент внутренних сил Г пропорционален производной от вихря. Отмеченное условие независимости уравнений Маттиоли использует далее для исключения величины турбулентной вязкости (определения длины смешения l).

Элементы новизны, содержащиеся в работе Маттиоли, не были по достоинству оценены и развиты; хотя Карман [15] и заметил «интересную теорию турбулентного переноса» Маттиоли, но при этом отмечал, что силы Маттиоли «несколько непонятны»; указанные работы Маттиоли даже не упомянуты в списке литературы к монографии энциклопедического характера по теории турбулентности [16].

Поступила 5 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Николаевский В. Н. Асимметричная механика континуумов и осредненное описание турбулентных течений. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 6, стр. 1304—1307.
2. Dahler J. S., Scriven L. E. Theory of structured continua. 1. General consideration of angular momentum and polarization. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1963, vol. 275, N 1363, pp. 504—527.
3. Nikolaevskii V. N. Transfer phenomena in fluid-saturated porous media. In: Irreversible aspects of continuum mechanics and transfer of physical characteristics in moving fluids. Symp. Vienna, 1966. Springer-Verlag, Wien — New York, 1968, pp. 250—258.
4. Eringen A. C. Mechanics of micromorphic continua. In: Mechanics of generalized continua. Proc. IUTAM-Sympos. on the generalized Cosserat continuum and the continuum theory of dislocations with applications. Freudenstadt — Stuttgart, 1967. Springer-Verlag, Berlin a. o., 1968, pp. 18—35.
5. Reynolds O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1894, vol. 186, pp. 123—161. (Рус. перев. Сб.: «Проблемы турбулентности», М., ОНТИ, 1936, стр. 185—227.)
6. Буевич Ю. А. О диффузии взвешенных частиц в поле изотропной турбулентности. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
7. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметричная гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
8. Taylor G. I. Eddy motion in the atmosphere. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1915, vol. 215, pp. 1—26.
9. Prandtl L. Führer durch die Strömungslehre. Braunschweig, Vieweg, 1949. (Рус. перев.: Гидроаэромеханика, изд. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1951.)
10. Schlichting H. Grenzschicht-Theorie. Karlsruhe, Braun, 1951. (Рус. перев.: Теория пограничного слоя. М., Изд-во иностр. лит., 1956)
11. Taylor G. I. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1932, vol. 135, No. 828, pp. 685—705. (Рус. перев.: Сб. «Проблемы турбулентности», М., ОНТИ, 1936, стр. 228—248.)
12. Townsend A. A. The structure of turbulent shear flow. Cambridge Univ. Press, 1956. (Рус. перев.: Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
13. Mattioli G. D. Sur la théorie de la turbulence dans les canaux. C. R. Acad. des Sci., Paris, 1933, vol. 196, No. 8, pp. 1282—1284.
14. Mattioli G. D. Teoria della turbolenza. Rend. Accad. naz. dei Lincei, 1933, vol. 17, No. 13, pp. 217—223.
15. Karman Th. v. Some aspects of the theory of turbulent motion. Proc. Internat. Congr. Appl. Mech. (Cambridge), 1934. (Рус. перев. Сб.: «Проблемы турбулентности», М., ОНТИ, 1936, стр. 35—74.)
16. Монин А. С., Яглом А. М., Статистическая гидромеханика. Механика турбулентности, ч. 1, 2. М., Физматгиз, 1965—1967.