

О РАСЧЕТЕ ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ ТРАНСЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

Ю. М. Липницкий, Ю. Б. Лифшиц

(Москва)

Излагается численная схема решения задач газодинамики методом установления, пригодная для расчета трансзвуковых потоков около тел вращения. После краткого описания вычислительной процедуры приводятся результаты расчетов течения около сферы, эллипсоида, комбинаций сфер и цилиндра различного удлинения и комбинации сфер и конуса при различных сверхкритических числах Маха. Построенные линии уровня числа Маха иллюстрируют течение в местных сверхзвуковых зонах, их конфигурацию и изменение, а также положение скачков уплотнения.

Численные методы расчета трансзвуковых течений, в которых возникают замкнутые сверхзвуковые зоны, сейчас только начинают развиваться. В особом случае, когда число Маха набегающего потока равно единице и область влияния ограничена вниз по потоку предельными характеристиками, ее расчет для эллипсоида вращения был произведен П. И. Чушкиным [1] при помощи метода интегральных соотношений. Ниже исследуется возможность расчета трансзвуковых течений около тел вращения при помощи метода установления. Применяемая неявная разностная схема подробно описана в работе [2], где она использовалась для решения прямой задачи сопла Лаваля.

1. Для применения метода установления возьмем уравнения нестационарных движений идеального газа в цилиндрической системе координат xu . Сокращенно их можно записать в виде

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + A \frac{\partial Z}{\partial x} + B \frac{\partial Z}{\partial y} + F = 0 \quad (1.1)$$

Здесь Z и F векторы (столбцы) имеют следующие компоненты

$$Z = \{p, u, v, \rho r^{-\kappa}\}, \quad F = \{\kappa r a^2 v y^{-1}, 0, 0, 0\}$$

а матрицы A и B даются формулами

$$A = \begin{vmatrix} u & \kappa r a^2 & 0 & 0 \\ \kappa^{-1} \rho^{-1} & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} v & 0 & \kappa r a^2 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ \kappa^{-1} \rho^{-1} & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

Давление p , плотность ρ и скорость звука a отнесены к своим значениям в невозмущенном потоке. Проекции вектора скорости u и v на оси цилиндрической системы координат отнесены к скорости звука на бесконечности. Координаты x , y и время t также считаются безразмерными; κ — показатель адиабаты Пуассона.

Смешанная краевая задача для исходной гиперболической системы (1.1) формулируется следующим образом. На оси симметрии и обтекае

мом теле вращения $y = Y(x)$ зададим условие непротекания. В бесконечности скорость и давление должны быть равны их значениям в невозмущенном потоке. В качестве начальных условий можно взять любое достаточно разумное поле параметров.

Численное решение задачи будем проводить в новых переменных $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, которые осуществляют отображение меридионального сечения поля потока на внутренность единичного квадрата. В переменных ξ, η выбирается сетка с постоянным шагом h_1 по ξ и h_2 по η , поэтому преобразование координат должно удовлетворять определенным требованиям, связанным как с удобством проведения расчетов, так и с требуемой точностью численного решения.

В приведенных ниже примерах в меридиональной плоскости xy брались полярная система координат $r\vartheta$ и полагалось

$$\xi = 1 - r^{-1}R(\vartheta), \quad \eta = \eta(\vartheta) \quad (1.2)$$

Здесь $R = R(\vartheta)$ — контур обтекаемого тела.

Построение схемы численного расчета основано на замене системы (1.1) на эквивалентную ей, в которой каждое уравнение есть условие совместности вдоль специальной характеристической поверхности, проходящей через линию $t = \text{const}$, $\xi = \text{const}$. Чтобы получить ее, достаточно умножить (1.1) слева на матрицу.

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & \kappa r a \sin \varphi & \kappa r a \cos \varphi & 0 \\ 1 & -\kappa r a \sin \varphi & -\kappa r a \cos \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Здесь через

$$\sin \varphi = \xi_x (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{-1/2}, \quad \cos \varphi = \xi_y (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{-1/2} \quad (1.3)$$

обозначены пространственные составляющие нормалей к характеристическим поверхностям.

В переменных ξ, η полученная система уравнений записывается следующим образом:

$$Q \frac{\partial Z}{\partial t} + \Lambda Q \frac{\partial Z}{\partial \xi} = -Q (\eta_x A + \eta_y B) \frac{\partial Z}{\partial \eta} - Q F \quad (1.4)$$

Входящая в нее матрица Λ является диагональной, и ее элементами будут временные составляющие характеристических нормалей

$$\Lambda_{11} = u \xi_x + v \xi_y + a (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}$$

$$\Lambda_{22} = u \xi_x + v \xi_y - a (\xi_x^2 + \xi_y^2)^{1/2}$$

$$\Lambda_{33} = \Lambda_{44} = u \xi_x + v \xi_y$$

Выбором функции $\xi(x, y)$ всегда можно добиться выполнения неравенств $\Lambda_{11} > 0$, $\Lambda_{22} < 0$. Они означают, что поток вдоль координаты ξ дозвуковой. Знак последних двух элементов матрицы Λ меняется в поле

течения. В частности, из-за условия непротекания на обтекаемом теле $\Lambda_{33} = \Lambda_{44} = 0$. Поэтому для аппроксимации левых частей первых двух уравнений системы (1.4) возьмем четырехточечную неявную схему, рассмотренную в работе [3]. Для аппроксимации производных по t и ξ остальных уравнений системы (1.4) применим шеститочечную схему [2]. Обобщение на вторую пространственную переменную выполним по аналогии с [3].

Таким образом, имеем для двух первых уравнений системы (1.4)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{m+1/2, l}^{n+1/2} &= \frac{1}{2\tau} (Z_{m+1, l}^{n+1} + Z_{m, l}^{n+1} - Z_{m+1, l}^n - Z_{m, l}^n) - \\ &- \frac{\sigma_1 k_2}{\tau} (Z_{m+1, l+1}^n - 2Z_{m+1, l}^n + Z_{m+1, l-1}^n + Z_{m, l+1}^n - 2Z_{m, l}^n + Z_{m, l-1}^n) \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)_{m+1/2, l}^{n+1/2} &= \frac{k_1}{\tau} [\alpha (Z_{m+1, l}^{n+1} - Z_{m, l}^{n+1}) + \beta (Z_{m+1, l}^n - Z_{m, l}^n)] \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_{m+1/2, l}^{n+1/2} &= \frac{k_2}{4\tau} [\alpha (Z_{m+1, l+1}^{n+1} + Z_{m, l+1}^{n+1} - Z_{m+1, l-1}^{n+1} - Z_{m, l-1}^{n+1}) + \\ &+ \beta (Z_{m+1, l+1}^n + Z_{m, l+1}^n - Z_{m+1, l-1}^n - Z_{m, l-1}^n)] \end{aligned}$$

$$Z_{m+1/2, l}^{n+1/2} = \frac{1}{4} (Z_{m+1, l}^{n+1} + Z_{m, l}^{n+1} + Z_{m+1, l}^n + Z_{m, l}^n) \quad (m = 0, 1, \dots, M-1, l = 0, 1, \dots, L) \quad (1.5)$$

Для последних уравнений положим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial Z}{\partial t}\right)_{m, l}^{n+1/2} &= \frac{1}{\tau} (Z_{m, l}^{n+1} - Z_{m, l}^n) - \frac{\sigma_2 k_2}{\tau} (Z_{m, l+1}^n - 2Z_{m, l}^n + Z_{m, l-1}^n) \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial \xi}\right)_{m, l}^{n+1/2} &= \frac{k_1}{2\tau} [\alpha (Z_{m+1, l}^{n+1} - Z_{m-1, l}^{n+1}) + \beta (Z_{m+1, l}^n - Z_{m-1, l}^n)] \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial \eta}\right)_{m, l}^{n+1/2} &= \frac{k_2}{2\tau} [\alpha (Z_{m, l+1}^{n+1} - Z_{m, l-1}^{n+1}) + \beta (Z_{m, l+1}^n - Z_{m, l-1}^n)] \\ Z_{m, l}^{n+1/2} &= 1/2 (Z_{m, l}^{n+1} + Z_{m, l}^n) \quad (m = 0, 1, \dots, M; l = 0, 1, \dots, L) \quad (1.6) \end{aligned}$$

$$k_i = \tau / h_i, \quad t = n\tau, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha > \beta, \quad \sigma_i > 0$$

Здесь τ — шаг по времени, а M и L — число интервалов по ξ и η . Значения искомых функций при $l = -1$ и $l = L + 1$ берутся из условия симметрии.

После подстановки формул (1.5) и (1.6) в систему уравнений (1.4) получим систему нелинейных уравнений. Для ее решения воспользуемся итерационным методом, изложенным в [3]. Точно так же, как и в [3], все величины со слоя $n + 1$, входящие в коэффициенты и правые части уравнений, возьмем с итерации с номером i , тогда для расчета искомых величин на итерации $i + 1$ на каждом луче $\eta = \text{const}$ получим систему линейных уравнений.

Выбор функции $\xi(x, y)$ по формуле (1.2) приводит к тому, что величины $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ не зависят от ξ . Поэтому система уравнений на луче расщеп-

ляется на три группы систем, которые можно записать следующим образом:

$$a_{m+1/2}X_m + b_{m+1/2}X_{m+1} = f_{m+1/2} \quad (m=0, 1, \dots, M-1) \quad (1.7)$$

$$\alpha k_1 c_m T_{m-1} - 2T_m - \alpha k_1 c_m T_{m+1} = g_m \quad (1.8)$$

$$\alpha k_1 c_m S_{m-1} - 2S_m - \alpha k_1 c_m S_{m+1} = h_m \quad (m=0, 1, \dots, M) \quad (1.9)$$

Здесь

$$a = \begin{vmatrix} \lambda & \text{кра} \lambda \\ 1 & -\text{кра} \end{vmatrix}, \quad b = \begin{vmatrix} 1 & \text{кра} \\ \mu & -\text{кра} \mu \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} p \\ u \sin \varphi + v \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$\lambda = (1 - 2\alpha k_1 \Lambda_{11}) / (1 + 2\alpha k_1 \Lambda_{11}), \quad \mu = (1 + 2\alpha k_1 \Lambda_{22}) / (1 - 2\alpha k_1 \Lambda_{22})$$

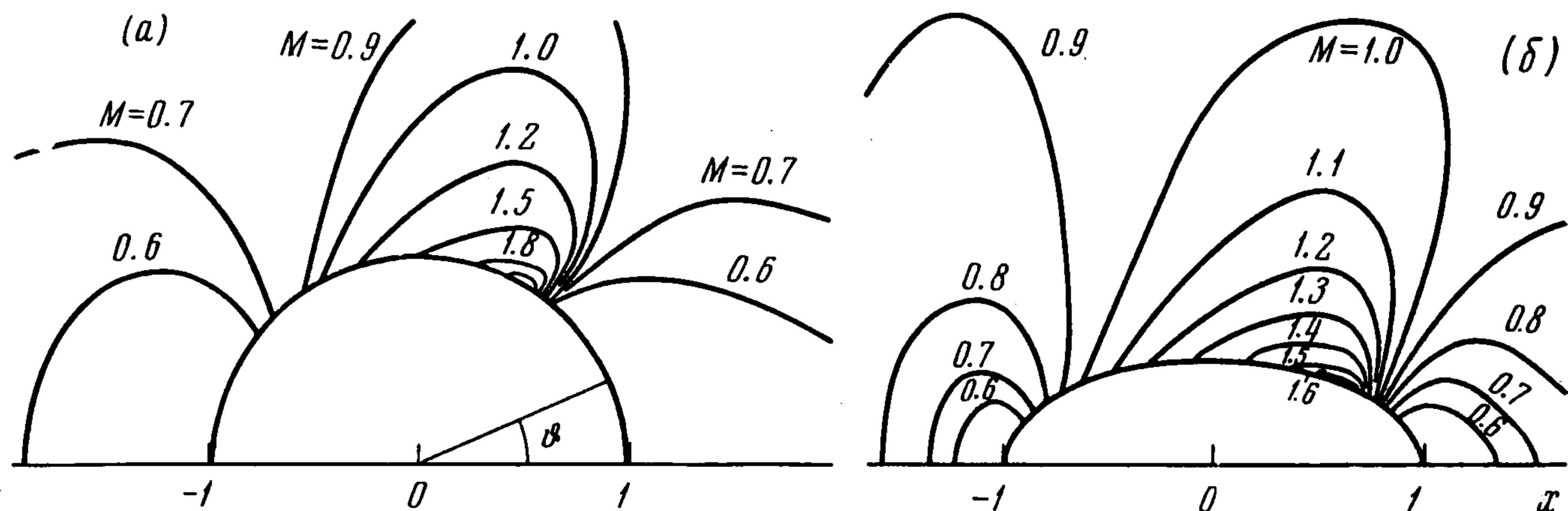
$$c = \Lambda_{33}, \quad T = u \cos \varphi - v \sin \varphi, \quad S = p \rho^{-x}$$

В качестве граничных условий для системы (1.7) брались равенства

$$(u \sin \varphi + v \cos \varphi)_0 = 0, \quad p_M = 1 \quad (1.10)$$

Граничными условиями для систем (1.8) и (1.9) является обращение в нуль коэффициента c при $m=0$ и $m=M$.

Согласно [4], краевая задача для систем (1.8) и (1.9) является хорошо обусловленной. Ее решение осуществляется прогонкой, которая детально исследована в работе [5].

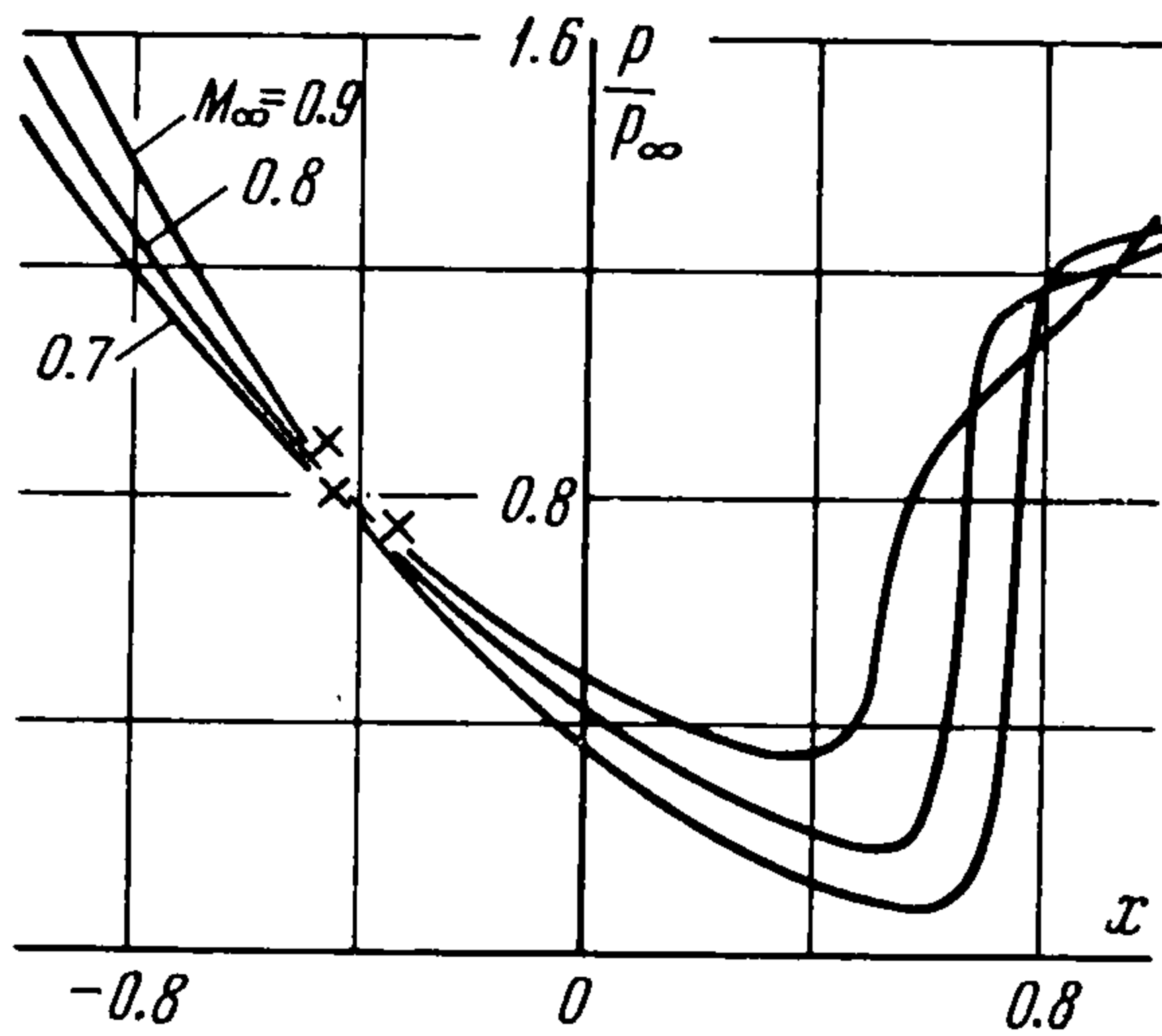


Фиг. 1

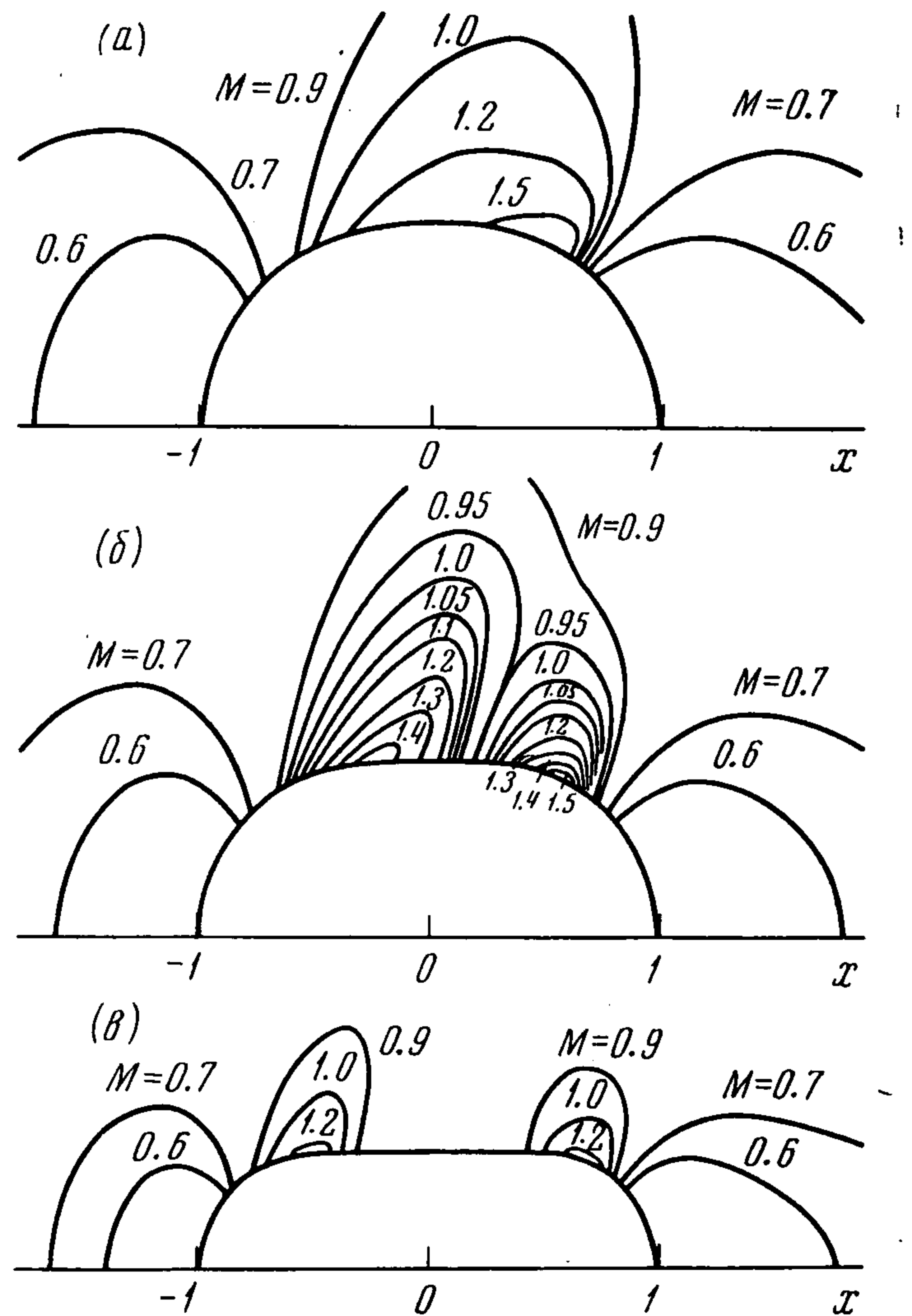
Краевая задача (1.7), (1.10) хорошо обусловлена [4], если $|\lambda| < 1$ и $|\mu| < 1$. Для выполнения этих условий необходимо и достаточно, чтобы $\Lambda_{11} > 0$ и $\Lambda_{22} < 0$. Последние неравенства теряют силу только при $m = M$, где $\Lambda_{11} = \Lambda_{22} = 0$. Поэтому можно ожидать потери точности расчета при близких к единице значениях ξ . Физически это связано с отображением бесконечной области на конечную и ухудшением аппроксимации на больших расстояниях от тела. Более того, при $\xi = 1$, скорость потока должна быть постоянной и равной M_∞ . Это ведет к переопределенности задачи. Специальный расчет с краевым условием $(u \sin \varphi + v \cos \varphi)_M = M_\infty \sin \varphi$ вместо второго из равенств (1.10) показал, что различие в результатах начинается не ранее четвертого знака. Задачи (1.7), (1.10) решались прогонкой, изложенной в работе [3].

2. Приведенный метод был применен для расчета трансзвуковых течений около различных осесимметричных тел.

На фиг. 1, а изображено поле линий уровня числа Маха для сферы, помещенной в поток с $M_\infty = 0.8$. В задней части сферы имеется область сгущения линий $M = \text{const}$, которую нужно принять за место расположения скачка уплотнения. На фиг. 2 приведены графики распределения давления на сфере при различных числах M_∞ . Из них видно, что давление изменяется почти скачком. Любопытно отметить, что потери полного давления в прямом скачке при полученном в расчете числе M перед ним почти равны изменению давления торможения в передней и задней точках торможения сферы. Проверка выполнения интеграла Бернулли дает максимальную ошибку в окрестности скачка уплотнения, которая растет с ростом его интенсивности, но и не превышает 6% при $M_\infty = 0.9$. Крестиками на графиках обозначены звуковые точки.

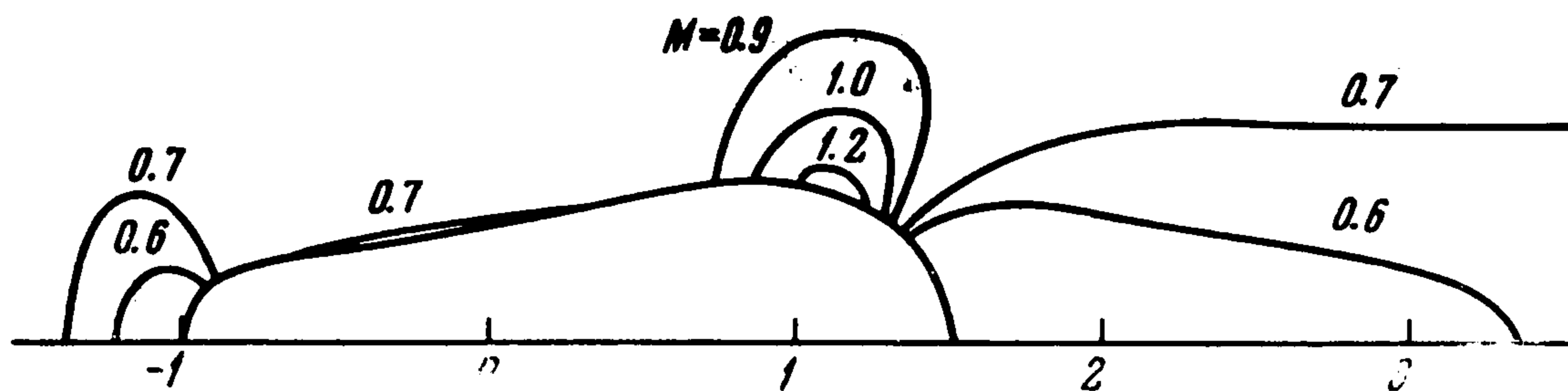


Фиг. 2



Фиг. 3

Полученные результаты показывают, что течения со слабыми скачками уплотнения можно рассчитывать сквозным образом, используя недивергентные неявные схемы.



Фиг. 4

На фиг. 1, б приведено поле линий $M = \text{const}$ при обтекании эллипсоида вращения потоком с $M_\infty = 0.95$. Отношение полуосей эллипсоида равно 0.5. Общая картина течения имеет такой же вид как и на фиг. 1, а. Интенсивность скачка уплотнения убывает при удалении от тела быстрее, чем в потоке у сферы.

На фиг. 3 построены поля течения около комбинации двух сфер с цилиндром при $M_\infty = 0.8$ и различных удлинениях. Хорошо видна эволюция потока. На фиг. 3, а

тело еще мало отличается от сферы и около него возникает одна сверхзвуковая зона. При увеличении длины цилиндра (фиг. 3, б) сверхзвуковая зона распадается на две. Вторая из них, расположенная ниже по потоку, содержит более интенсивный скачок уплотнения, чем первая, хотя и более слабый, чем на теле фиг. 3, а. Тело фиг. 3, в имеет еще более длинный цилиндрический участок, и две слабые сверхзвуковые зоны разнесены еще больше.

На фиг. 4 приведено течение около комбинации двух сфер и 10-процентного конуса также при $M_\infty = 0.8$. Здесь сверхзвуковая зона расположена в задней части тела. После разгона на передней сфере до $M \approx 0.8$ поток затормаживается до $M \approx 0.66$, а затем очень медленно увеличивает свою скорость при движении вдоль конуса.

При $M_\infty = 0.8$ были проведены расчеты течения около 10-процентного затупленного по сфере конуса с различными эллипсоидальными хвостовыми частями. Полученные распределения параметров по телу вплоть до некоторого малого расстояния от точки присоединения эллипсоида практически не отличаются от случая фиг. 4.

Поступила 1 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ч у ш к и н П. И. Расчет некоторых звуковых течений газа. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
2. К и р е е в В. И., Л и ф ш и ц Ю. Б., М и х а й л о в Ю. Я. О решении прямой задачи сопла Лавая. Уч. зап. ЦАГИ, 1970, т. 1, № 1.
3. Б а б е н к о К. И., В о с к р е с е н с к и й Г. П., Л ю б и м о в А. Н., Р у с а н о в В. В. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
4. Р я б е н ь к и й В. С. Необходимые и достаточные условия хорошей обусловленности краевых задач для системы обыкновенных разностных уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 2.
5. С а ф о н о в И. Д. О методе прогонки для решения разностных краевых задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 2.