

ОБ ЭНТРОПИЙНОМ СЛОЕ В ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ СО СКАЧКАМИ УПЛОТНЕНИЯ, ФОРМА КОТОРЫХ ЗАДАЕТСЯ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ

О. С. Рыжов, Е. Д. Терентьев

(Москва)

Большое число результатов в теории обтекания тонких тел гиперзвуковым потоком базируется на аналогии с нестационарными течениями в пространстве с меньшим на единицу числом измерений, эта аналогия была установлена Цянем [1], Хейзом [2], А. А. Ильюшиным [3] и Г. М. Бам-Зеликовичем, А. И. Бунимовичем, М. П. Михайловой [4]. Однако ее применение к расчету параметров газа вблизи поверхности тела приводит в ряде случаев к заметным погрешностям. Чтобы правильно получить характеристики потока во всей области, Ченом [5], В. В. Сычевым [6-8] и Якура [9] была разработана концепция высокоэнтропийного слоя, которая содержит оценки искомых величин на линиях тока, пересекающих фронт сильной головной ударной волны. Особенно просто использовать методы теории энтропийного слоя оказалось в обратных задачах аэродинамики, когда заранее предписанным считается положение скачка уплотнения, а форма тела определяется в ходе решения. В частности, в работах [6-9] рассматривался вопрос, какому телу соответствует движение газа, вызываемое сильным взрывом.

Анализ результатов В. В. Сычева и Якура, предпринятый авторами [10], показал, что в первом приближении взрывную аналогию можно применять к расчету гиперзвуковых течений во всей области за фронтом скачка уплотнения, в том числе и в прилегающем к телу слое газа. Для определения контура тела достаточно правильно выбрать значение энтропии вдоль образующей его траектории частицы. Поскольку тело должно омываться элементарной струйкой, пересекающей фронт ударной волны под прямым углом, значение энтропии получается путем применения соотношений Гюгонио для прямого скачка уплотнения. Использование результатов теории сильного взрыва, принадлежащей Л. И. Седову [11, 12] и Тейлору [13] не сопряжено со внесением в нее каких-либо поправок.

Ниже рассматривается более общая обратная задача, в которой форма ударной волны определяется степенной функцией координат, отсчитываемой по направлению скорости потока на бесконечности. Эта задача рассматривалась в работах Майрлса [14] и Гиро, Валле и Золвера [15], но в них не содержится анализа многих важных качественных особенностей течения в высокоэнтропийном слое. Устанавливается, что определение контура тела по траектории частицы со значением энтропии, найденным из соотношений для прямого скачка уплотнения в стационарном потоке, вообще говоря, не приводит к правильным результатам. Более того, в указанном еще В. В. Сычевым [6] предельном случае коэффициент в поправочном члене, который входит в уравнение контура, обращается в бесконечность. Если зафиксировать значение продольной координаты, обусловленная высокоэнтропийным слоем поправка может неограниченно возрастать. Наиболее важная в приложениях теория сильного взрыва с этой точки зрения представляет исключение.

§ 1. Вспомогательные преобразования. Будем рассматривать плоскопараллельные и осесимметричные стационарные движения газа. Число M_∞ Маха на бесконечности положим неограниченно большим. Обозначим через x и r оси декартовой либо цилиндрической системы координат, причем ось x направим по вектору скорости невозмущенного потока.

Будем считать, что форма скачка уплотнения $r = r_s(x)$ предписывается заранее, а контур обтекаемого тела подлежит определению в процессе решения получающейся таким образом обратной задачи. Следуя работе В. В. Сычева [6], положим

$$r_s = Cx^n \quad (1.1)$$

где C и n — произвольные постоянные. Дальнейшие результаты существенным образом основываются на аналогии между гиперзвуковым обтеканием тонких тел и нестационарными течениями в пространстве с на единицу меньшим числом измерений. На основании работ С. С. Григоряна [16], Лиза и Кубота [17] заключаем, что

$$2/(v + 2) = n_* \leq n$$

причем параметр $v = 1$ для плоскопараллельных течений и $v = 2$ для течений с осевой симметрией. Значение $n = n_*$ отвечает задаче о сильном взрыве, решение которой было найдено Л. И. Седовым [11, 12] и Тейлором [13]. Чтобы получить решение задачи о расширяющемся в газе поршне, необходимо выполнение строгого неравенства $n_* < n$. На нем будет базироваться весь последующий анализ, так как вопрос о применении взрывной аналогии к расчету гиперзвуковых движений газа рассматривался ранее [10].

Основное содержание работы [5] состоит в выводе распределения поперечной координаты вблизи поверхности тела, когда в качестве независимых приняты переменные Мизеса. Имеем

$$r = Cx^n \left\{ 1 + \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \int_1^\eta G \left[1 - \frac{4\kappa}{(\kappa + 1)^2} \frac{n^2 C^2}{x^{2(1-n)}} H(\eta) G \right]^{-1/2} d\eta \right\}^{1/v} \quad (1.2)$$

Здесь κ означает показатель адиабаты Пуассона, функция H равна отношению давления p в области возмущенного течения к давлению за скачком уплотнения, а величина

$$G = G(x, \eta) = \left\{ \frac{x^{2(1-n)}}{H(\eta)} [n^2 C^2 + x^{2(1-n)} \eta^{2(1-n)/vn}]^{-1} \right\}^{1/\kappa} \quad (1.3)$$

При небольших значениях x формула (1.2) теряет силу, так как возмущения поля скоростей оказываются конечными и не могут описываться теорией, которая опирается на аналогию между обтеканием тел стационарным гиперзвуковым потоком и нестационарными одномерными течениями. Напротив, эта формула становится тем точнее, чем больше значения координаты x , поэтому целесообразно упростить ее, переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$.

Для этого воспользуемся связью между переменной η в интеграле из правой части равенства (1.2) и автомодельной переменной λ , использованной Л. И. Седовым [18]. Если обозначить через f отношение скорости v в зоне возмущенного течения к скорости за ударным фронтом, то [6]

$$\eta = \exp \left[-v \int \left(\frac{2}{\kappa + 1} f - \lambda \right) d\lambda \right]$$

Введем в рассмотрение функцию g , отношение плотности ρ в произвольной точке между скачком уплотнения и телом к плотности, полученной в результате сильного ударного сжатия газа. Между функциями f и g и их первыми производными существует соотношение

$$\left(f - \frac{\kappa + 1}{2} \lambda\right) \frac{dg}{d\lambda} + \left(\frac{df}{d\lambda} + \frac{\nu - 1}{\lambda} f\right) g = 0$$

указанное в книге В. П. Коробейникова, Н. С. Мельниковой и Е. В. Рязанова [19]. Это соотношение легко преобразовать к виду, позволяющему вычислить интеграл, который входит в определение переменной η . В итоге

$$\eta = \frac{2}{\kappa - 1} \lambda^{\nu-1} g \left(\frac{\kappa + 1}{2} \lambda - f\right)$$

Если воспользоваться теперь интегралом адиабатичности [19]

$$\lambda^{2(\nu-1)(1-n)/\nu n} g^{2(1-n)/\nu n} h \left[\frac{2}{\kappa - 1} \left(\frac{\kappa + 1}{2} \lambda - f\right)\right]^{2(1-n)/\nu n} = g^\kappa$$

то выражение для переменной η еще более упрощается

$$\eta = \left(\frac{g^\kappa}{h}\right)^{\nu n / (2 - 2n)} \quad (1.4)$$

причем по определению $h(\lambda) = H(\eta)$. Написанное соотношение позволяет преобразовать формулу (1.3) для функции G к виду

$$G = [g^\kappa + n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h]^{-1/\kappa} \quad (1.5)$$

Переходя в равенстве (1.2) для поперечной координаты от переменной η к переменной λ , имеем

$$r = C x^n \left\{ 1 + \nu \int_1^\lambda \lambda^{\nu-1} g(\lambda) G(x, \lambda) \left[1 - \frac{4x}{(\kappa + 1)^2} \frac{n^2 C^2 h(\lambda) G(x, \lambda)}{x^{2(1-n)}} \right]^{-1/2} d\lambda \right\}^{1/\nu} \quad (1.6)$$

В автомодельных решениях, известных в газодинамике одномерных нестационарных течений, поверхности расширяющегося поршня соответствует отличная от нуля величина $\lambda = \lambda_0$. При $\lambda \rightarrow \lambda_0$ для функций f , g и h верны асимптотические формулы

$$\begin{aligned} f &= f_0 = 1/2 (\kappa + 1) \lambda_0 + \dots, & g &= g_0 (\lambda - \lambda_0)^{2(1-n)/[\nu n \kappa - 2(1-n)]} + \dots, \\ & & h &= h_0 + \dots \end{aligned} \quad (1.7)$$

Между входящими сюда постоянными λ_0 , g_0 и h_0 существует зависимость

$$\lambda_0^{\nu-1} = \frac{n\kappa(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)[\nu n \kappa - 2(1-n)]} h_0^{-1/\kappa} \left(\frac{g_0^\kappa}{h_0}\right)^{[\nu n \kappa - 2(1-n)]/2\kappa(1-n)} \quad (1.8)$$

При $x \rightarrow \infty$ и конечных значениях разности $\lambda - \lambda_0$ функция $G \rightarrow g^{-1}$. Когда $\lambda \rightarrow \lambda_0$, то $g \rightarrow 0$, а $h \rightarrow h_0$, как это требуется асимптотическими разложениями (1.7). Поэтому при $\lambda \rightarrow \lambda_0$ и $x \rightarrow \infty$ второе из двух слагаемых, которые заключены в квадратные скобки в правой части равенства (1.5), может оказаться больше первого, а при $\lambda = \lambda_0$ имеем

$$G = (n^2 C^2 h_0)^{-1/\kappa} x^{2(1-n)/\kappa}$$

Отсюда следует, что отношение $G/x \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ и любых значениях разности $\lambda - \lambda_0$. Воспользовавшись этим обстоятельством, напишем разложение

$$\left[1 - \frac{4\kappa}{(\kappa + 1)^2} n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h G\right]^{-1/2} = \left[1 + \frac{2\kappa}{(\kappa + 1)^2} n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h G + \dots\right] \quad (1.9)$$

Чтобы найти распределение поперечной координаты вблизи образующей тела на больших расстояниях от носка ударной волны, при вычислении интеграла, стоящего в правой стороне (1.6), нужно использовать только первый член ряда (1.9). Эта операция равносильна пренебрежению отклонением продольной составляющей v_x вектора скорости частиц от скорости V_∞ в невозмущенной области, где газ имеет нулевую температуру. Нетрудно показать, что остальные члены ряда (1.9) дают в рассматриваемый интеграл вклад более низкого порядка по x . Отсюда в первом приближении находим

$$r = Cx^n \left\{1 + \nu \int_1^\lambda \lambda^{\nu-1} g [g^\kappa + n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h]^{-\frac{1}{\kappa}} d\lambda\right\}^{\frac{1}{\nu}} \quad (1.10)$$

Здесь прямое разложение в ряд подынтегрального выражения становится уже невозможным для больших значений координаты. Поэтому пишем

$$\begin{aligned} & \int_1^\lambda \lambda^{\nu-1} g [g^\kappa + n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h]^{-\frac{1}{\kappa}} d\lambda = \\ & = \left(\int_1^{\lambda_0 + \varepsilon} + \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^\lambda \right) \lambda^{\nu-1} g [g^\kappa + n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h]^{-\frac{1}{\kappa}} d\lambda = J_2 + J_1 \end{aligned}$$

причем параметр ε выбираем так, чтобы, с одной стороны

$$g^\kappa (\lambda_0 + \varepsilon) \gg n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h (\lambda_0 + \varepsilon) \quad (1.11)$$

а с другой стороны, $\varepsilon \ll 1$. Согласно условию (1.11), разложение подынтегрального выражения в J_2 допустимо. Используя его, находим

$$J_2 = \frac{1}{\nu} [(\lambda_0 + \varepsilon)^\nu - 1] - \frac{1}{\kappa} n^2 C^2 x^{-2(1-n)} \int_1^{\lambda_0 + \varepsilon} \lambda^{\nu-1} g^{-\kappa} h d\lambda + \dots$$

Для вычисления интеграла J_1 преобразуем предварительно сумму

$$g^\kappa + n^2 C^2 x^{-2(1-n)} h = g_0^{-\kappa} (\lambda - \lambda_0)^{-1/\theta} g^\kappa \mu (1 + m)$$

Здесь

$$\mu = g_0^\kappa (\lambda - \lambda_0)^{1/\theta} + n^2 C^2 h_0 x^{-2(1-n)}, \quad \theta = \frac{\nu \kappa - 2(1-n)}{2\kappa(1-n)}$$

$$m = n^2 C^2 x^{-2(1-n)} g^{-\kappa} \mu^{-1} [g_0^\kappa (\lambda - \lambda_0)^{1/\theta} h - h_0 g^\kappa]$$

Коэффициенты g_0 и h_0 берутся из разложений (1.7). Принимая во внимание эти разложения, легко показать, что при больших значениях x и $0 \leq \lambda - \lambda_0 \leq \varepsilon$ величина $m \ll 1$. Учитывая последнее неравенство, находим в первом приближении

$$J_1 = g_0 \int_{\lambda_0 + \varepsilon}^\lambda \lambda^{\nu-1} \mu^{-1/\kappa} (\lambda - \lambda_0)^{1/\kappa \theta} d\lambda$$

Пусть

$$n^2 C^2 g_0^{-\kappa} h_0 \varepsilon^{-1/\theta} x^{-2(1-n)} = 1/\sigma, \quad (\lambda - \lambda_0)/\varepsilon = u^\theta \quad (1.12)$$

Вспоминая неравенство (1.11), которому удовлетворяет параметр ε , видим, что $\sigma \gg 1$. Эта оценка будет играть весьма существенную роль в дальнейшем. Переходя теперь от интегрирования по λ к интегрированию по u в соответствии со второй из формул (1.12), можно записать значение J_1 в следующем виде

$$J_1 = \varepsilon \theta \sigma^{1/\kappa} \left(\int_{\frac{1}{2}}^0 + \int_0^u \right) \left\{ [\lambda_0 + \varepsilon u^\theta]^{v-1} u^{\theta-1+1/\kappa} \frac{du}{(1+\sigma u)^{1/\kappa}} \right\} \quad (1.13)$$

Дальнейшие преобразования полученного выражения основаны на хорошо известном представлении [20] гипергеометрических функций $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$

$$\int_0^u \frac{u^{\beta-1} du}{(1+\sigma u)^\alpha} = \frac{u^\beta}{\beta} F(\alpha, \beta, 1+\beta; -\sigma u) \quad (1.14)$$

Чтобы наиболее простым образом применить формулу (1.14) к вычислению J_1 , целесообразно плоскопараллельные и осесимметричные движения газа рассматривать по отдельности. ■

§ 2. Плоскопараллельные течения. Полагая в формуле (1.13) параметр $v = 1$, имеем]

$$J_1 = \varepsilon \frac{n\kappa - 2(1-n)}{n\kappa} \sigma^{1/\kappa} [u^{1/2n/(1-n)} F_1(-\sigma u) - F_1(-\sigma)] \quad (2.1)$$

Здесь в обозначениях

$$F_1(x) = F\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{n}{2(1-n)}; \frac{2-n}{2(1-n)}; x\right)$$

для гипергеометрических функций ради краткости опущены первые три аргумента, аналогичные обозначения будут применяться в дальнейшем.

Полученное соотношение теряет силу при $\beta = \alpha + 1$, когда в него должны быть введены логарифмические члены [21]. Как указывалось выше, параметр $\sigma \gg 1$, поэтому вторую из гипергеометрических функций, которые содержатся в правой части равенства (2.1), следует преобразовать таким образом, чтобы аргументом вместо σ являлась обратная ей величина σ^{-1} . Согласно стандартной процедуре, имеем [21]

$$F_1(-\sigma) = \Gamma\left(\frac{2-n}{2(1-n)}\right) \Gamma(-\theta_1) \frac{\sigma^{-1/2n/(1-n)}}{\Gamma(1/\kappa)} + \frac{n\kappa}{n\kappa - 2(1-n)} \sigma^{-1/\kappa} F\left(\frac{1}{\kappa}, -\theta_1; \frac{\kappa(2-n) + 2(1-n)}{2\kappa(1-n)}; -\frac{1}{\sigma}\right) \quad (2.2)$$

$$\theta_1 = \theta(v=1) = \frac{n\kappa - 2(1-n)}{2\kappa(1-n)}$$

и через Γ обозначена гамма-функция Эйлера. При условии, что $\alpha + 1 < \beta$ или

$$n < n_{**} = \frac{2 + 2/\kappa}{3 + 2/\kappa} \quad (2.3)$$

выводим отсюда асимптотическое представление

$$F_1(-\sigma) = \frac{n\kappa}{n\kappa - 2(1-n)} \sigma^{-1/\kappa} + \Gamma\left(\frac{2-n}{2(1-n)}\right) \Gamma(-\theta_1) \frac{\sigma^{-n/(2-2n)}}{\Gamma(1/\kappa)} \quad (2.4)$$

Окончательно для J_1 имеем

$$J_1 = \varepsilon \frac{n\kappa - 2(1-n)}{n\kappa} \sigma^{1/\kappa} \left[u^{n/(2-2n)} F_1(-\sigma u) - \frac{n\kappa}{n\kappa - 2(1-n)} \sigma^{-1/\kappa} + \Gamma\left(\frac{2-n}{2(1-n)}\right) \Gamma(-\theta_1) \frac{\sigma^{-n/(2-2n)}}{\Gamma(1/\kappa)} \right]$$

Если в формуле (2.3) знак неравенства сменить на обратный, то в разложении по обратным степеням σ гипергеометрической функции, входящей в правую часть (2.2), нужно сохранить два члена. В соответствии с этим изменится и формула (2.4), но, как показано В. В. Сычевым [6], учет толщины высокоэнтропийного слоя при $n_{**} \leq n$ не будет существенным.

§ 3. Течения с осевой симметрией. Подставляя в соотношение (1.13) значение $\nu = 2$, получим

$$J_1 = \varepsilon \frac{n\kappa - (1-n)}{n\kappa} \sigma^{1/\kappa} \left\{ \lambda_0 [u^{n/(1-n)} F_2(-\sigma u) - F_2(-\sigma)] + \right. \\ \left. + \varepsilon \frac{n\kappa}{2n\kappa - (1-n)} \left[u^{\frac{2n\kappa - (1-n)}{\kappa(1-n)}} F_3(-\sigma u) - F_3(-\sigma) \right] \right\} \\ F_2(x) = F\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{n}{1-n}; \frac{1}{1-n}; x\right) \\ F_3(x) = F\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{2n\kappa - (1-n)}{\kappa(1-n)}; \frac{\kappa(n+1) - (1-n)}{\kappa(1-n)}; x\right) \quad (3.1)$$

Как и выше, здесь гипергеометрические функции параметра σ следует преобразовать к виду, где аргументом служит величина σ^{-1} . В результате при

$$n < n_{**} = \frac{1 + 1/\kappa}{2 + 1/\kappa} \quad (3.2)$$

получим асимптотическое разложение

$$F_2(-\sigma) = \frac{n\kappa}{n\kappa - (1-n)} \sigma^{1/\kappa} + \Gamma\left(\frac{1}{1-n}\right) \Gamma(-\theta_2) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\kappa}\right) \sigma^{-n/(1-n)} \\ \theta_2 = \theta(\nu=2) = \frac{n\kappa - (1-n)}{\kappa(1-n)}$$

и совершенно аналогично

$$F_3(-\sigma) = \frac{2n\kappa - (1-n)}{2[n\kappa - (1-n)]} \sigma^{-1/\kappa} + \Gamma\left(\frac{\kappa(n+1) - (1-n)}{\kappa(1-n)}\right) \frac{\Gamma(-2\theta_2)}{\Gamma(1/\kappa)} \sigma^{-\frac{2n\kappa - (1-n)}{\kappa(1-n)}}$$

Заметим сразу, что вторым членом в правой части последнего равенства в дальнейшем анализе можно пренебречь, так как он содержит наибольшие отрицательные степени σ . Кроме того, легко убедиться, что при вычислении J_1 в формуле (3.1) член с

$$u^{\frac{2n\kappa - (1-n)}{\kappa(1-n)}} F_3(-\sigma u)$$

дает наименьший вклад по сравнению с остальными; в последующем он также будет опущен. Учитывая сделанные замечания, выражение для J_1 запишем как

$$J_1 = \varepsilon \frac{n\kappa - (1-n)}{n\kappa} \sigma^{\frac{1}{\kappa}} \left\{ \lambda_0 \left[u^{\frac{n}{1-n}} F_2(-\sigma u) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n\kappa}{n\kappa - (1-n)} \sigma^{-\frac{1}{\kappa}} - \Gamma\left(\frac{1}{1-n}\right) \Gamma(-\theta_2) \frac{\sigma^{-n/(1-n)}}{\Gamma(1/\kappa)} \right] - \varepsilon \frac{n\kappa}{2[n\kappa - (1-n)]} \sigma^{-\frac{1}{\kappa}} \right\}$$

Когда $n_{**} \leq n$, представление (3.1) теряет силу, причем при $n = n_{**}$ вместо него нужно использовать соотношение, куда входят логарифмические члены [21]. Однако как для рассмотренных выше плоскопараллельных течений, так и для движений газа с цилиндрической симметрией учет высокоэнтропийного слоя не важен, если $n_{**} \leq n$; этот вывод следует из работы [6].

§ 4. Форма обтекаемого тела. Подставив разложения (1.7) в формулу (1.4), находим, что при $\lambda \rightarrow \lambda_0$

$$\eta = \left(\frac{g_0 x}{h_0}\right)^{\nu n/2(1-n)} (\lambda - \lambda_0)^{\nu n \kappa / [\nu n \kappa - 2(1-n)]}$$

С другой стороны, [6]

$$\eta = \psi_1 x^{-\nu n}, \quad \psi_1 = \frac{\nu}{\rho_\infty V_\infty C^\nu} \psi$$

если через ψ обозначить функцию тока, а через ρ_∞ — плотность на бесконечности вверх по потоку. Из сравнения различных определений переменной η следует

$$\lambda - \lambda_0 = \left(\frac{g_0 x}{h_0}\right)^{-[\nu n \kappa - 2(1-n)]/2\kappa(1-n)} \left(\frac{\psi_1}{x^{\nu n}}\right)^{[\nu n \kappa - 2(1-n)]/\nu n \kappa} \quad (4.1)$$

Обратимся к основному соотношению (1.10), задающему распределение поперечной координаты. Прежде всего отметим, что согласно (2.3) и (3.2) рассматриваемый диапазон изменения показателя степени n ограничен неравенствами

$$\frac{2}{\nu + 2} = n_* < n < n_{**} = \frac{2 + 2/\kappa}{\nu + 2 + 2/\kappa} \quad (4.2)$$

С ростом отношения κ удельных теплоемкостей газа этот диапазон сужается. Соберем теперь вместе полученные результаты и подставим их в соотношение (1.10). Вводя обозначения

$$k = \frac{\nu n \kappa - 2(1-n)}{\kappa}, \quad N_1 = \frac{g_0 x}{n^2 C^2 h_0}, \quad N_2 = \Gamma\left(\frac{\nu n}{2(1-n)} + 1\right) \times \\ \times \Gamma\left(-\frac{k}{2(1-n)}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\kappa}\right) \quad (4.3)$$

и переходя к переменным x, ψ_1 , имеем

$$r = C x^n \left\{ \lambda_0 - \frac{k}{\nu n} N_1^{-k/(2-2n)} x^{-k} \left[N_2 - (n^2 C^2)^{-\nu n/(2-2n)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \psi_1 F\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{\nu n}{2(1-n)}; \frac{\nu n + 2(1-n)}{2(1-n)}; - (n^2 C^2)^{-1} \psi_1^{2(1-n)/\nu n}\right) \right] \right\} \quad (4.4)$$

Обтекаемому телу соответствует нулевая линия тока, поэтому его контур $r = r_b(x)$, будет иметь вид

$$r_b = C x^n \left(\lambda_0 - \frac{k}{\nu n} N_1^{-k/(2-2n)} N_2 x^{-k} \right) \quad (4.5)$$

Сравним полученные результаты с теми, которые даются прямым применением теории малых возмущений к расчету гиперзвуковых течений газа [1-4]. Из формулы (4.1) следует сразу

$$r = C x^n \left[\lambda_0 + \left(\frac{g_0 x}{h_0}\right)^{-k/(2-2n)} x^{-k} \psi_1^{k/\nu n} \right] \quad (4.6)$$

Как легко убедиться непосредственной проверкой, при $\psi_1 \rightarrow \infty$ соотношения (4.4) и (4.6) для поперечной координаты совпадают (что касается главных членов, то они одинаковы и от ψ_1 не зависят). Этот вывод является закономерным, так как при больших значениях функции тока верна гипотеза плоских сечений и параметры газа внутри высокоэнтропийного слоя должны сопрягаться с соответствующими параметрами, которые получаются в теории малых возмущений. Более отчетливо подобная точка зрения будет сформулирована далее в методе сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений. При небольших значениях ψ_1 поправочные члены в правых частях формул (4.4) и (4.6) различаются.

Как правило, принято считать, что в рамках гипотезы плоских сечений уравнение контура обтекаемого тела получается из закона расширения поршня в задачах газодинамики нестационарных одномерных движений. Определим его иначе, потребовав, чтобы на образующей его линии тока энтропия s принимала значение, к которому приводит сжатие газа на фронте прямого скачка уплотнения. В стационарных течениях это значение

$$s_{\max} = \left(\frac{p}{\rho^{\kappa}} \right)_{\max} = \frac{2(\kappa-1)^{\kappa}}{(\kappa+1)^{\kappa+1}} \frac{V_{\infty}^2}{\rho_{\infty}^{\kappa-1}} \quad (4.7)$$

является максимально допустимым, так как за косо́й ударной волной энтропия должна иметь меньшую величину. В приближении теории малых возмущений на ударном фронте [1-4]

$$p = \frac{2}{\kappa+1} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 n^2 C^2 x^{-2(1-n)} = \frac{2}{\kappa+1} \rho_{\infty} V_{\infty}^2 n^2 C^2 \psi_1^{-2(1-n)/vn}, \quad \rho = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \rho_{\infty} \quad (4.8)$$

Сопоставление равенств (4.7) и (4.8) позволяет найти величину

$$\psi_{1b} = (n^2 C^2)^{vn/(2-2n)} \quad (4.9)$$

Подставив ее в соотношение (4.6), выводим уравнение контура искомого тела

$$r_b = C x^n (\lambda_0 + N_1^{-k/(2-2n)} x^{-k}) \quad (4.10)$$

Поправочные члены в формулах (4.5) и (4.10) имеют одинаковую степень у координаты x , но входящие в них коэффициенты различны. Отношение N этих коэффициентов задается при помощи равенств (4.3). В итоге

$$N = - \frac{vn\kappa - 2(1-n)}{vn\kappa} \Gamma\left(\frac{vn + 2(1-n)}{2(1-n)}\right) \Gamma\left(-\frac{vn\kappa - 2(1-n)}{2\kappa(1-n)}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{1}{\kappa}\right)$$

Аргумент второй из гамма-функций в числителе дроби, определяющей N , отрицателен при изменении показателя степени в диапазоне (4.2), поэтому $N > 0$. Если $n \rightarrow n_*$, то $N \rightarrow 1$. Этот вывод подтверждает чрезвычайно простой рецепт работы [10]: результатами теории сильного взрыва можно пользоваться без внесения каких-либо изменений во всей области между ударным фронтом и телом, контур которого образуется траекторией

частицы с энтропией, соответствующей сжатию газа в стационарном гиперзвуковом потоке на прямом скачке уплотнения. Решение задачи о сильном взрыве таким образом применимо и к расчету параметров высокоэнтропийного слоя. Сформулированное правило иллюстрируется фиг. 1, где показаны фронт скачка уплотнения, траектории частиц и контур обтекаемого тела. Гиперзвуковому потоку отвечает область из решения задачи о сильном взрыве с $s < s_{\max}$, траектории частиц с $s > s_{\max}$ поглощаются телом.

При $n = n_*$ постоянная $\lambda_0 = 0$, а разложения (1.7) теряют силу, вместе с ними теряют силу и формулы (4.4) — (4.6) и (4.10). Однако основные закономерности легко усмотреть из того факта, что в этом особом случае [21]

$$F\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{\nu n}{2(1-n)}; \frac{\nu n + 2(1-n)}{2(1-n)}; \frac{\psi_1}{n^2 C^2}\right) = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{n_*^2 C^2}{\psi_1} \left\{ \left[1 + \frac{\psi_1}{n_*^2 C^2} \right]^{(\kappa-1)/\kappa} - 1 \right\}$$

Поправочный член в соотношении (4.4) записывается как

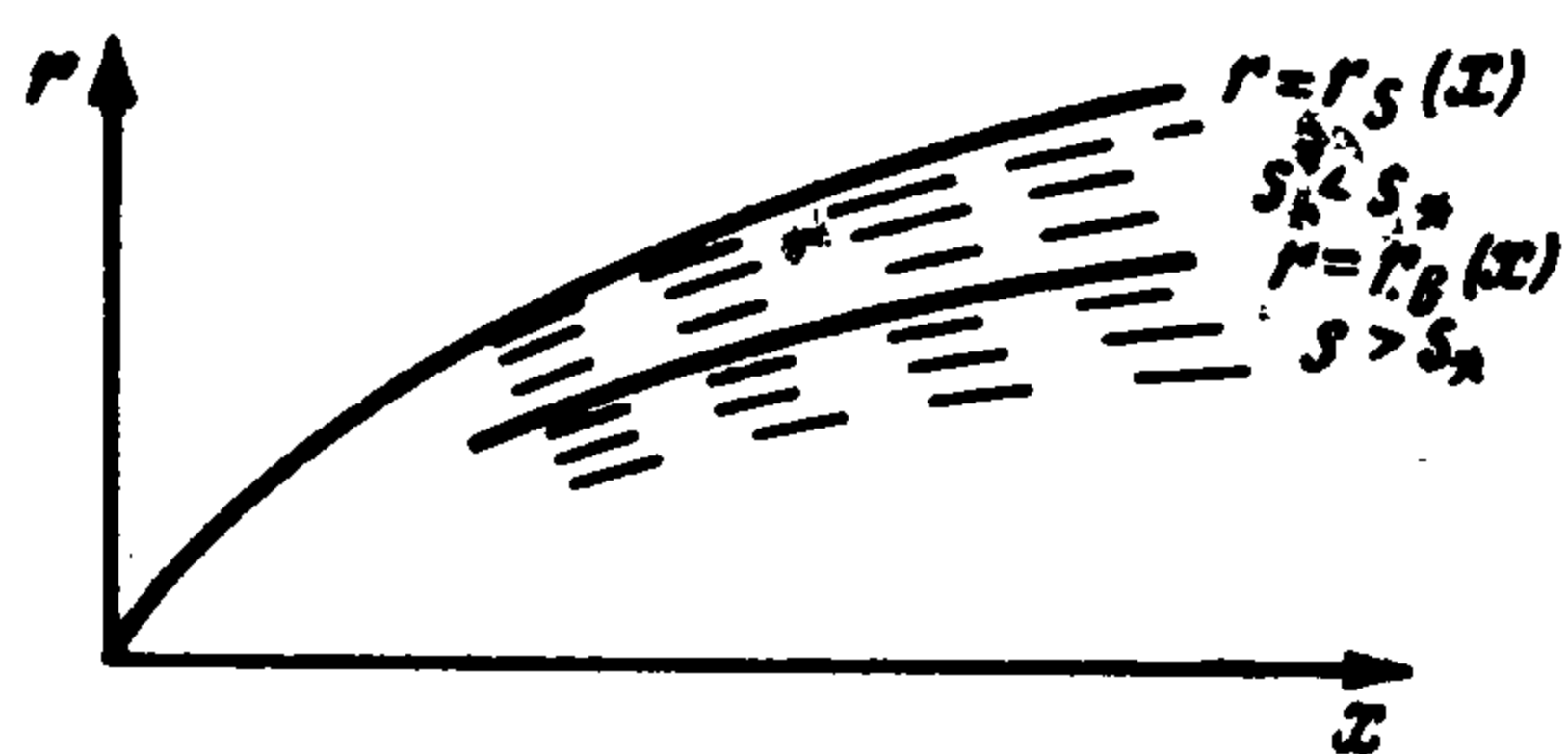
$$\left(\frac{g_0^\kappa}{h_0}\right)^{-(\kappa-1)/\kappa} \frac{x^{-2\nu(\kappa-1)/\kappa(\nu+2)}}{(n_*^2 C^2 + \psi_1)^{(\kappa-1)/\kappa}} \quad (4.11)$$

Переход от (4.11) к поправочному члену в формуле (4.6) достигается сдвигом функции тока на величину $-n_*^2 C^2$, как раз это значение диктуется равенством (4.9). Указанное свойство было положено в основу анализа результатов В. В. Сычева [8] и Якура [9], проведенного в работе [10].

Рассмотрим второй предельный случай, когда $n \rightarrow n_{**}$, а отношение

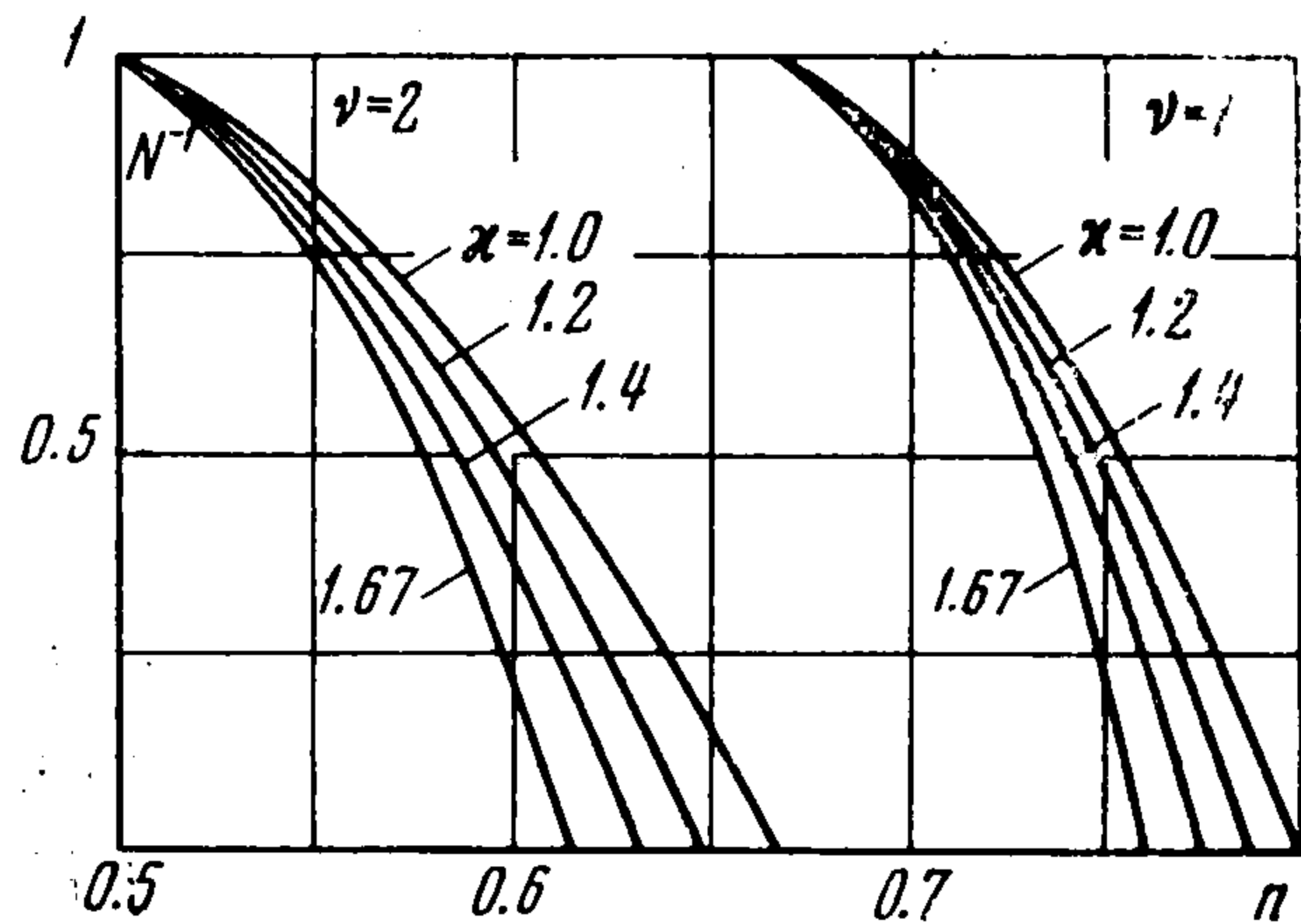
$$\frac{\nu \kappa - 2(1-\nu)}{2\kappa(1-n)} \rightarrow 1$$

Аргумент одной из гамма-функций, входящей в выражение для N , обращается в минус единицу, а сама эта величина оказывается бесконечной. Как следствие заключаем, что при любом фиксированном значении координаты x и $n \rightarrow n_{**}$ поправочные члены в формулах (4.4) и (4.5) неограниченно возрастают. Выводы работ [5-7] о том, что толщина высокоэнтропийного слоя уменьшается с увеличением n , имеют лишь следующий смысл. Если устремить к бесконечности x , то энтропийный слой будет тем тоньше, чем больше значения n из диапазона (4.2). Высказанное утверждение основано на рассмотрении показателя степени κ у поправочных членов в соотношениях (4.4) и (4.5), поэтому при сравнении двух различных решений величина n в них должна оставаться строго определенной. Но если вначале зафиксировать координату x , то результат получается прямо противоположным: толщина энтропийного слоя возрастает с увеличением n , а при $n \rightarrow n_{**}$ становится больше любого наперед заданного числа. Переход к пределу при $x \rightarrow \infty$ в формулах (4.4) и (4.5) неравномерный, чем и объясняется установленный выше факт.



Фиг. 1

В свою очередь неравномерность предельного перехода вытекает как следствие из того, что исследуется решение обратной задачи газовой динамики, возникновение подобной ситуации в прямой задаче невозможно.



Фиг. 2

Характер изменения величины N^{-1} для различных значений параметров ν , n и κ виден из фиг. 2.

В несколько более сложном виде по сравнению с (4.5) уравнение для контура обтекаемого тела было впервые получено в работе Майрлса [14], однако никаких выводов качественного порядка в ней сделано не было. Наоборот, в качественном анализе полученных результатов Майрлс целиком следовал более ранним работам Чена [5] и

В. В. Сычева [6]. Кроме того, явных выражений для распределения поперечной координаты внутри высокоэнтропийного слоя в работе [14] вообще не содержится.

§ 5. Внешняя область течения. До сих пор все исследование базировалось на уравнении (1.2) для поперечной координаты. Между тем это уравнение было получено В. В. Сычевым [6] путем качественных рассуждений, в результате чего в нем содержатся члены различного порядка по x . Для обоснования приведенного выше анализа и следующих из него выводов воспользуемся известным методом сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений, существо которого обстоятельно описано в книгах Ван Дайка [22] и Коула [23]. Теория асимптотических разложений позволит нам также уточнить значения всех параметров газа в зоне возмущенного течения, в том числе значения давления p и компонентов v_x и v_r вектора скорости.

В качестве исходной примем систему уравнений газодинамики в переменных x, ψ , которые были введены Мизесом. Имеем для совершенного газа

$$r^{\nu-1} \frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{\partial v_r}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{\rho^\kappa} = 0, \quad r^{\nu-1} \frac{\partial r}{\partial \psi} = \frac{1}{\rho v_x}; \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{v_r}{v_x}$$

$$\frac{1}{2} (v_x^2 + v_r^2) + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = V_\infty^2 \quad (5.1)$$

Если скачок уплотнения имеет вид (1.1), то условия Гюгонио для искомых функций на ударном фронте

$$\psi = \frac{1}{\nu} \rho_\infty V_\infty C^\nu x^{\nu n}$$

можно записать как

$$r = Cx^n, \quad p = \frac{2}{\kappa+1} \rho_\infty V_\infty^2 \frac{n^2 C^2 x^{-2(1-n)}}{1+n^2 C^2 x^{-2(1-n)}} \quad \rho = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \rho_\infty$$

$$v_x = V_\infty \left[1 - \frac{2}{\kappa+1} \frac{n^2 C^2 x^{-2(1-n)}}{1+n^2 C^2 x^{-2(1-n)}} \right], \quad v_r = \frac{2}{\kappa+1} V_\infty \frac{n C x^{-(1-n)}}{1+n^2 C^2 x^{-2(1-n)}} \quad (5.2)$$

Отсюда сразу находится энтропия

$$s = \frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{2(\kappa-1)^\kappa}{(\kappa+1)^{\kappa+1}} \frac{V_\infty^2}{\rho_\infty^{\kappa-1}} \frac{n^2 C^2}{n^2 C^2 + \psi_1^{2(1-n)/\nu n}} \quad (5.3)$$

зависящая только от приведенной функции тока ψ_1 . При $n = n_*$ получим

$$s = \frac{2(\kappa - 1)^\kappa}{(\kappa + 1)^{\kappa+1}} \frac{V_\infty^2}{\rho_\infty^{\kappa-1}} \frac{n_*^2 C^2}{n_*^2 C^2 + \psi_1} \quad (5.4)$$

в то время как в рамках теории малых возмущений согласно соотношениям (4.8) в этом случае имеем

$$s = \frac{2(\kappa - 1)^\kappa}{(\kappa + 1)^{\kappa+1}} \frac{V_\infty^2}{\rho_\infty^{\kappa-1}} \frac{n_*^2 C^2}{\psi_1} \quad (5.5)$$

Сдвигом функции тока ψ_1 на величину $-n_*^2 C^2$ выражение (5.4) приводится к виду (5.5), отсюда и следует упоминавшаяся выше возможность [10] применения взрывной аналогии к расчету гиперзвукового потока во всей области между ударной волной и обтекаемым телом.

Разобьем все поле возмущенного течения на две области. Во внешней из них, которую ограничивает фронт ударной волны, в первом приближении должна быть справедлива гипотеза плоских сечений [1-4]. Ясно, что решение во внешней области представляется в форме разложений

$$\begin{aligned} r &= Cx^n [r_1(\eta) - n^2 C^2 x^{-2(1-n)} r_2(\eta)] \quad \left(\eta = \frac{\psi_1}{x^{\nu n}} \right) \\ p &= \frac{2}{\kappa + 1} \rho_\infty V_\infty^2 n^2 C^2 x^{-2(1-n)} [p_1(\eta) - n^2 C^2 x^{-2(1-n)} p_2(\eta)] \\ \rho &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \rho_\infty [\rho_1(\eta) - n^2 C^2 x^{-2(1-n)} \rho_2(\eta)] \\ v_x &= V_\infty \left\{ 1 - \frac{2}{\kappa + 1} n^2 C^2 x^{-2(1-n)} [v_{x1}(\eta) - n^2 C^2 x^{-2(1-n)} v_{x2}(\eta)] \right\} \\ v_r &= \frac{2}{\kappa + 1} V_\infty n C x^{-(1-n)} [v_{r1}(\eta) - n^2 C^2 x^{-2(1-n)} v_{r2}(\eta)] \end{aligned} \quad (5.6)$$

Подставляя их в систему уравнений (5.1), выводим обыкновенные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют искомые функции переменной η . Система для основных функций получается нелинейной

$$\begin{aligned} r_1^{\nu-1} \frac{dp_1}{d\eta} - \eta \frac{dv_{r1}}{d\eta} &= -\frac{n-1}{\nu n} v_{r1}, \quad p_1 = \eta^{-2(1-n)\nu n} \rho_1^\kappa, \quad r_1^{\nu-1} \rho_1 \frac{dr_1}{d\eta} = \frac{\kappa-1}{\nu(\kappa+1)} \\ \nu \eta \frac{dr_1}{d\eta} &= r_1 - \frac{2}{\kappa+1} v_{r1}, \quad v_{x1} = \frac{1}{\kappa+1} \left(v_{r1}^2 + \kappa \frac{p_1}{\rho_1} \right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Наоборот, поправки к ним находятся из решения линейной системы

$$\begin{aligned} r_1^{\nu-1} \frac{dp_2}{d\eta} - \eta \frac{dv_{r2}}{d\eta} &= -(\nu-1) \frac{dp_1}{d\eta} r_2 + \frac{3(1-n)}{\nu n} v_{r2}, \quad p_2 = \eta^{-4(1-n)/\nu n} \rho_1^\kappa + \frac{\kappa p_1}{\rho_1} \rho_2 \\ r_1^{\nu-1} \rho_1 \frac{dr_2}{d\eta} &= -\frac{2}{\kappa+1} r_1^{\nu-1} \rho_1 v_{x1} \frac{dr_1}{d\eta} - (\nu-1) \rho_1 \frac{dr_1}{d\eta} r_2 - r_1^{\nu-1} \frac{dr_1}{d\eta} \rho_2 \\ \nu \eta \frac{dr_2}{d\eta} &= -\frac{2}{\kappa+1} \left(\nu \eta \frac{dr_1}{d\eta} - r_1 \right) v_{x1} + \frac{3n-2}{n} r_2 - \frac{2}{\kappa+1} v_{r2} \\ v_{x2} &= \frac{1}{\kappa+1} \left(-v_{x1}^2 + \frac{\kappa}{\rho_1} p_2 - \frac{\kappa p_1}{\rho_1^2} \rho_2 + 2v_{r1} v_{r2} \right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Отметим сразу, что последние из уравнений в системах (5.7) и (5.8) отделяются от остальных, с точностью до обозначений (5.7) дает решение задачи о расширении поршня в первоначально покоявшемся газе в теории одномерных нестационарных течений. Указанная задача в интересующем нас диапазоне изменения n рассматривалась

Н. Л. Крашенинниковой [24], Н. Н. Кочиной и Н. С. Мельниковой [25, 26] и Г. Л. Гродзовским и Н. Л. Крашенинниковой [27]. Наиболее важные с качественной точки зрения результаты были установлены С. С. Григоряном [16], Лизом и Кубота [17], в частности, им принадлежит вывод неравенства $n < n_*$. На основании анализа системы уравнений (5.7), данного в цитированных работах, асимптотика основных функций при $\eta \rightarrow 0$ имеет вид

$$r_1 = \lambda_0 + a_1 \lambda^{1-\vartheta} + \dots, \quad p_1 = h_0 + a_2 \eta + a_3 \eta^{2-\vartheta} + \dots \left(\vartheta = \frac{2(1-n)}{v n \kappa} \right) \quad (5.9)$$

$$\rho_1 = a_4 \eta^\vartheta + a_5 \eta^{1+\vartheta} + \dots, \quad v_{r_1} = \frac{\kappa+1}{2} \lambda_0 + a_6 \eta^{1-\vartheta} + \dots$$

где коэффициенты $a_1 - a_6$ выражаются через использованные ранее постоянные λ_0 и h_0 посредством формул

$$a_1 = \frac{n \kappa (\kappa - 1)}{(\kappa + 1) [v n \kappa - 2(1-n)]} \lambda_0^{1-v} h_0^{-1/\kappa}, \quad a_2 = \frac{(1-n)(\kappa+1)}{2v n} \lambda_0^{2-v}$$

$$a_3 = - \frac{n \kappa^2 (\kappa - 1)}{2 [v n \kappa - 2(1-n)] [2v n \kappa - 2(1-n)]} \times$$

$$\times \left\{ (v-1)(1-n) \lambda_0^{2-v} + \frac{[v n \kappa - (2-\kappa)(1-n)] [(v-1)n \kappa - 2(1-n)]}{n \kappa^2} \right\} \lambda_0^{2(1-n)} h_0^{-\frac{1}{\kappa}}$$

$$a_4 = h_0^{\frac{1}{\kappa}}, \quad a_5 = \frac{(1-n)(\kappa+1)}{2v n \kappa} \lambda_0^{2-v} h_0^{-(\kappa-1)/\kappa}$$

$$a_6 = - \frac{(\kappa-1) [(v-1)n \kappa - 2(1-n)]}{2 [v n \kappa - 2(1-n)]} \lambda_0^{1-v} h_0^{-1/\kappa}$$

Используя соотношение (4.6), можно проверить, что первая из написанных формул в точности соответствует равенству (1.8).

При анализе системы линейных уравнений (5.8) из них удобно вначале исключить поправку ρ_2 к плотности. В результате получим два дифференциальных уравнения и одно конечное соотношение

$$r_1^{v-1} \frac{dp_2}{d\eta} - \eta \frac{dv_{r_2}}{d\eta} = - (v-1) \frac{dp_1}{d\eta} r_2 - \frac{3(n-1)}{v n} v_{r_2}$$

$$\frac{dr_2}{d\eta} = \left[\frac{1}{\kappa} \eta^{-4(1-n)/v n} \frac{\rho_1^\kappa}{p_1} - \frac{2}{\kappa+1} v_{x_1} \right] \frac{dr_1}{d\eta} - \frac{v-1}{r_1^{v-1}} \frac{dr_1}{d\eta} r_2 - \frac{1}{\kappa p_1} \frac{dr_1}{d\eta} p_2 \quad (5.10)$$

$$\left[(v-1) \frac{dr_1}{d\eta} + \frac{3n-2}{v n} \frac{r_1^{v-1}}{\eta} \right] r_2 + \frac{r_1^{v-1}}{\kappa p_1} \frac{dr_1}{d\eta} p_2 - \frac{2}{v(\kappa+1)} \frac{r_1^{v-1}}{\eta} v_{r_2} =$$

$$= \frac{1}{\kappa} \eta^{-4(1-n)/v n} \frac{r_1^{v-1} \rho_1^\kappa}{p_1} \frac{dr_1}{d\eta} - \frac{2}{v(\kappa+1)} \frac{r_1^v v_{x_1}}{\eta}$$

для определения функций r_2 , p_2 и v_{r_2} . Отсюда ясно, что общее решение исходной системы можно построить при помощи двух линейно независимых интегралов соответствующих (5.10) однородных уравнений и частного решения неоднородных уравнений. При $\eta \rightarrow 0$ асимптотическое разложение первого линейно независимого решения однородной системы, соответствующей исходной, принимает вид

$$r_2 = A_1 \eta^{k/v n} + \dots, \quad p_2 = A_2 + \dots, \quad \rho_2 = A_3 \eta^{2(1-n)/v n \kappa} + \dots, \quad v_{r_2} = A_4 \eta^{k/v n} + \dots \quad (5.11)$$

с постоянными

$$\frac{A_2}{A_1} = -\frac{kx(x+1)}{n(x-1)} \lambda_0^{v-1} h_0^{(x+1)/x}, \quad \frac{A_3}{A_1} = -\frac{k(x+1)}{n(x-1)} \lambda_0^{v-1} h_0^{1/x}$$

$$\frac{A_4}{A_1} = \frac{(x+1)[x(3n-vn-2)+2(1-n)]}{2nx} \left(k = \frac{vnx-2(1-n)}{x} \right)$$

Для второго линейно независимого решения названной системы находим

$$r_2 = B_1 + \dots, \quad p_2 = B_2 \eta + \dots, \quad \rho_2 = B_3 \eta^{\frac{vnx+2(1-n)}{vnx}} + \dots, \quad v_{r_2} = B_4 + \dots \quad (5.12)$$

где коэффициенты

$$\frac{B_2}{B_1} = B, \quad \frac{B_3}{B_1} = \frac{B}{x} h_0^{-(x-1)/x}, \quad \frac{B_4}{B_1} = \frac{(x+1)(3n-2)}{2n}$$

$$B = \frac{(1-n)(x+1)(10n-vn-6)}{2vn^2} \lambda_0^{1-v}$$

Что касается частного решения исходной системы (5.8), то для него имеют место формулы

$$r_2 = C_1 \eta^{1-\vartheta(x+1)} + \dots, \quad p_2 = C_2 \eta^{1-\vartheta} \quad (5.13)$$

$$\rho_2 = C_3 \eta^{-\vartheta(x-1)} + \dots, \quad v_{r_2} = C_4 \eta^{-\vartheta} + \dots \quad \left(\vartheta = \frac{2(1-n)}{vnx} \right)$$

Все входящие сюда постоянные связаны с величинами λ_0 и h_0 при помощи соотношений

$$C_1 = \frac{n(x-1)}{(x+1)[vnx-2(1-n)(x+1)]} \lambda_0^{1-v} h_0^{-1/x}, \quad C_3 = -\frac{1}{x} h_0^{1/x}$$

$$C_2 = \frac{x(1-n)(3x-2)}{(x+1)[vnx-2(1-n)]} \lambda_0^{2-v} h_0^{(x-1)/x}, \quad C_4 = \frac{x}{x+1} \lambda_0 h_0^{(x-1)/x}$$

Постоянные λ_0 и h_0 находятся численным интегрированием системы нелинейных уравнений (5.7), решение линейной системы (5.10) дает величины коэффициентов A_1 и B_1 . Чтобы сделать задачу полностью определенной, нужно указать начальные значения всех искомых функций. Очевидно, они получаются разложением в ряды при $x \rightarrow \infty$ условий Гюгонио (5.2) на фронте скачка уплотнения. В итоге при $\eta = 1$ для основных функций имеем

$$r_1 = p_1 = \rho_1 = v_{x1} = v_{r1} = 1 \quad (5.14)$$

а для поправок к ним верны формулы

$$r_2 = \rho_2 = 0, \quad p_2 = v_{x2} = v_{r2} = 1$$

Данные о результатах численного решения задачи Коши (5.14) для уравнений (5.7) приведены в монографии Г. Г. Черного [28], при интегрировании в качестве независимой выбиралась автомобильная переменная λ .

§ 6. Внутренняя область течения. Главный член в разложении функции ρ_2 при $\eta \rightarrow 0$ задается третьим из равенств (5.13). При его сопоставлении с соответствующим равенством из (5.9) видно, что во внутренней области течения, занятой высокоэнтропийным слоем, разность

$$a_4 - n^2 C^2 C_3 x^{-2(1-n)} \eta^{-2(1-n)/vn}$$

должна состоять из членов одного порядка малости. Отсюда сразу следует, что в качестве внутренней переменной нужно выбрать функцию

тока ψ или пропорциональную ей величину ψ_1 . Особенности в остальных функциях-поправках r_2 , p_2 и v_{r_2} оказываются более слабыми по сравнению с особенностью в функции ρ_2 . Исходя из указанного свойства решение уравнений (5.1) для энтропийного слоя ищем в форме

$$\begin{aligned} r &= Cx^n [R_1(\psi_1) + x^{-\frac{vnx-2(1-n)}{\kappa}} R_2(\psi_1)] \\ p &= \frac{2}{\kappa+1} \rho_\infty V_\infty^2 n^2 C^2 x^{-2(1-n)} \left[P_1(\psi_1) + x^{-2(1-n)} P_2(\psi_1) + \right. \\ &\quad \left. + x^{-vn} P_3(\psi_1) + x^{-\frac{vnx+2(1-n)(\kappa-1)}{\kappa}} P_4(\psi_1) \right] \\ \rho &= \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \rho_\infty x^{-\frac{2(1-n)}{\kappa}} [P_1(\psi) + x^{-2(1-n)} P_2(\psi_1)] \\ v_x &= V_\infty \left[V_{x1}(\psi_1) + x^{-\frac{2(1-n)(\kappa-1)}{\kappa}} V_{x2}(\psi_1) \right] \\ v_r &= \frac{2}{\kappa+1} V_\infty n C x^{-(1-n)} \left[V_{r1}(\psi_1) + x^{-\frac{2(1-n)(\kappa-1)}{\kappa}} V_{r2}(\psi_1) \right] \end{aligned} \quad (6.1)$$

Подстановка асимптотических разложений (5.9), (5.11) и (5.13) в представление (5.6) газодинамических параметров для области течения, граничащей с ударным фронтом, позволяет найти условия, которым должны удовлетворять искомые функции при $\psi_1 \rightarrow \infty$. Подобная процедура является стандартной для метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений [22, 23]. Итак, при $\psi_1 \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} R_1 &\rightarrow \lambda_0, & R_2 &\rightarrow \frac{n(\kappa-1)}{\kappa+1} \lambda_0^{1-v} h_0^{-1/\kappa} \left[\frac{\kappa}{vnx-2(1-n)} \psi_1^{1-\vartheta} - \frac{n^2 C^2}{vnx-2(1-n)(\kappa+1)} \psi_1^{1-\vartheta(\kappa+1)} \right] \\ P_1 &\rightarrow h_0, & P_2 &\rightarrow \frac{(\kappa+1)[vnx-2(1-n)]}{n(\kappa-1)} \lambda_0^{v-1} h_0^{(\kappa+1)/\kappa} n^2 C^2 A_1 \\ P_3 &\rightarrow \frac{(1-n)(\kappa+1)}{2vn} \lambda_0^{2-v} \psi_1, & P_4 &\rightarrow -\frac{\kappa(1-n)(3\kappa-2)}{(\kappa+1)[vnx-2(1-n)]} h_0^{(\kappa-1)/\kappa} n^2 C^2 \psi_1^{1-\vartheta} \\ P_1 &\rightarrow h_0^{1/\kappa} \left[\psi_1^\vartheta + \frac{n^2 C^2}{\kappa} \psi_1^{-\vartheta(\kappa-1)} \right] & \left(\vartheta = \frac{2(1-n)}{vnx} \right) \\ P_2 &\rightarrow \frac{(\kappa+1)[vnx-2(1-n)]}{n\kappa(\kappa-1)} h_0^{2/\kappa} n^2 C^2 A_1 \psi_1^\vartheta \\ V_{x1} &\rightarrow 1, & V_{x2} &\rightarrow -\frac{2\kappa}{(\kappa+1)^2} h_0^{(\kappa-1)/\kappa} n^2 C^2 \left[\psi_1^{-\vartheta} - \frac{n^2 C^2}{\kappa} \psi_1^{-\vartheta(\kappa+1)} \right] \\ V_{r1} &\rightarrow \frac{\kappa+1}{2} \lambda_0, & V_{r2} &\rightarrow -\frac{\kappa}{\kappa+1} \lambda_0 h_0^{(\kappa-1)/\kappa} n^2 C^2 \psi_1^{-\vartheta} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Отметим, что предельные соотношения (6.2) вообще не зависят от разложений (5.12); учет последних важен только при отыскании членов более высокого порядка малости, входящих в представления параметров потока в энтропийном слое.

Обратимся к системе уравнений (5.1). Подстановка разложений (6.1) в уравнение Эйлера, спроектированного на ось ψ , дает

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{d\psi_1} = 0, \quad \frac{dP_2}{d\psi_1} = 0, \quad R_1^{\nu-1} \frac{dP_3}{d\psi_1} = \frac{1-n}{\nu n} V_{r1} \quad (6.3) \\ R_1^{\nu-1} \frac{dP_4}{d\psi_1} = \frac{(1-n)(3\kappa-2)}{\nu n \kappa} V_{r2} \end{aligned}$$

Условие сохранения энтропии вдоль линий тока удобно взять сразу в виде (5.3). Используя его, находим

$$P_1 P_1^{-\kappa} = [n^2 C^2 + \psi_1^{2(1-n)/\nu n}], \quad P_2 - P_1 P_2 / P_1^{\kappa} = 0 \quad (6.4)$$

Из третьего уравнения системы (5.1) следует

$$\frac{dR_1}{d\psi_1} = 0, \quad R_1^{\nu-1} P_1 V_{x1} \frac{dR_2}{d\psi_1} = \frac{\kappa-1}{\nu(\kappa+1)} \quad (6.5)$$

Уравнение, задающее наклон линий тока, показывает, что

$$R_1 V_{x1} = \frac{2}{\kappa+1} V_{r1}, \quad R_1 V_{x2} = \frac{2}{\kappa+1} V_{r2} \quad (6.6)$$

Наконец, из интеграла Бернулли выводим равенства

$$V_{x1} = 1, \quad V_{x1} V_{x2} + \frac{2\kappa}{(\kappa+1)^2} n^2 C^2 P_1 / P_1 = 0 \quad (6.7)$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений содержит ряд конечных соотношений, поэтому ее интегрирование не представляет затруднений. Наиболее сложно устанавливается вид функций R_2 и P_4 , которые определяются через интеграл

$$\begin{aligned} J = \int [n^2 C^2 + \psi_1^{2(1-n)/\nu n}]^{-1/\kappa} d\psi_1 = \frac{\nu n}{2(1-n)} (n^2 C^2)^{-1/\kappa} \times \\ \times \int u^{\nu n / (2-2n)-1} [1 + (n^2 C^2)^{-1} u]^{-1/\kappa} du, \quad u = \psi_1^{2(1-n)/\nu n} \end{aligned}$$

Последняя его форма в точности соответствует интегралу (1.14), использованному в предыдущих вычислениях. Отметим еще, что для нахождения величины произвольной постоянной, входящей в функцию P_4 , нужно более точно задать ее предельное значение при $\psi_1 \rightarrow \infty$, чем это делается в рассматриваемом приближении.

Для этого требуется написать следующий член в представлении давления для внешней области течения, граничащей с ударной волной. Однако решать полную систему уравнений для функций третьего приближения нет необходимости, так как порядок интересующего нас члена в разложении давления устанавливается путем простых оценок. В итоге решение системы уравнений (6.3) — (6.7), удовлетворяющее при $\psi \rightarrow \infty$ предельным

условиям (6.2), принимает вид

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \lambda_0, & R_2 &= -\frac{\kappa-1}{\nu(\kappa+1)} \lambda_0^{1-\nu} h_0^{-1/\kappa} (n^2 C^2)^{-1/\kappa} [(n^2 C^2)^{\frac{\nu n}{2(1-n)}} N_2 - \psi_1 \Phi(\psi_1)] \\
 P_1 &= h_0, & P_2 &= \frac{k\kappa(\kappa+1)}{n(\kappa-1)} \lambda_0^{\nu-1} h_0^{\frac{\kappa+1}{\kappa}} n^2 C^2 A_1, & P_3 &= \frac{(1-n)(\kappa+1)}{2\nu n} \lambda_0^{2-\nu} \psi_1 \\
 P_4 &= \frac{(1-n)(3\kappa-2)}{\nu n(\kappa+1)} \lambda_0^{2-\nu} h_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} (n^2 C^2)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} [(n^2 C^2)^{\frac{\nu n}{2(1-n)}} N_2 - \psi_1 \Phi(\psi_1)] \\
 R_1 &= h_0^{1/\kappa} \Psi(\psi_1), & R_2 &= \frac{k(\kappa+1)}{n(\kappa-1)} \lambda_0^{\nu-1} h_0^{2/\kappa} n^2 C^2 A_1 \Psi(\psi_1) \\
 V_{x1} &= 1, & V_{x2} &= -\frac{2\kappa}{(\kappa+1)^2} h_0^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \frac{n^2 C^2}{\Psi(\psi_1)} \\
 V_{r1} &= \frac{\kappa+1}{2} \lambda_0, & V_{r2} &= -\frac{\kappa}{\kappa+1} \lambda_0 h_0^{(\kappa-1)/\kappa} \frac{n^2 C^2}{\Psi(\psi_1)}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \Phi &= F\left(\frac{1}{\kappa}, \frac{\nu n}{2(1-n)}, \frac{\nu n + 2(1-n)}{2(1-n)}; - (n^2 C^2)^{-1} \psi_1^{2(1-n)/\nu n}\right) \\
 \Psi &= [n^2 C^2 + \psi_1^{2(1-n)/\nu n}]^{1/\kappa}
 \end{aligned}$$

Подставляя выражения для функций R_1 и R_2 в первое из равенств (6.1), используя связь (1.8) для перехода от постоянной λ_0 к коэффициентам g_0 и h_0 и сравнивая полученное таким образом соотношение с соотношением (4.4), видим, что они полностью совпадают. В рамках сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений обоснование результатов, следующих из рассмотрения интеграла (1.2), завершено. Этот метод позволил не только провести более строгий математический анализ параметров потока в энтропийном слое для обратных задач газодинамики, но и дал возможность существенно уточнить структуру самого слоя. Действительно, найденные поправки к давлению, плотности и компонентам вектора скорости нельзя определить исследованием автомодельных решений задачи о расширении поршня.

Отметим, что построение асимптотических разложений для внешней и внутренней областей течения проводилось ранее Гиро, Валле и Золвером [15]. Выведенные ими формулы для вектора скорости отличаются от установленных в данной работе, причем в выражении для его поперечной составляющей Гиро, Валле и Золвер отбросили член, больший по порядку величины по сравнению с оставленным. Эта ошибка, однако, не сказывается на виде функции $r(x, \psi)$.

Поступила 29 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. T s i e n H. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Phys., 1946, vol. 25, No. 3.
2. H a u e s W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
3. И л ь ю ш и н А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
4. Б а м-З е л и к о в и ч Г. М., Б у н и м о в и ч А. И., М и х а й л о в а М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1, стр. 33—40.

5. Cheng H. K. Similitude of hypersonic real gas flows over slender bodies with blunted noses. *J. Aeronaut. Sci.*, 1959, vol. 26, No. 9.
6. Сычев В. В. К теории гиперзвуковых течений газа со скачками уплотнения степенной формы. *ПММ*, 1960, т. 24, вып. 3.
7. Sychev V. V. On the theory of hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies. *Adv. Aeronaut. Sci.*, vol. 3, Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1961.
8. Сычев В. В. О методе малых возмущений в задачах обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа. *ПМТФ*, 1962, № 6.
9. Якура Дж. Теория энтропийных слоев и затупление носка в гиперзвуковом течении. Сб.: «Исследование гиперзвуковых течений», М., «Мир», 1964.
10. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О применении взрывной аналогии к расчету гиперзвуковых течений. *ПММ*, 1969, т. 33, вып. 4.
11. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
12. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. *ПММ*, 1946, т. 10, вып. 2.
13. Taylor G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. II. The atomic explosion of 1945. *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1950, vol. 201, No. 1065.
14. Mirels H. Hypersonic flow over slender bodies associated with power-law shocks. In: *Adv. Appl. Mech.*, vol. 7. New York — London, Acad. Press, 1962.
15. Guiraud J. P., Vallée D., Zolver R. Bluntness effects in hypersonic small disturbance theory. *Basic developments in fluid dynamics*, vol. 1, New York — London, Acad. Press, 1965.
16. Григорян С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). *ПММ*, 1958, т. 22, вып. 2.
17. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt nosed slender bodies. *J. Aeronaut. Sci.*, 1957, vol. 24, No. 3.
18. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
19. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.
20. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, и произведений, изд. 4, М., Физматгиз, 1962.
21. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G. *Higher transcendental functions*, vol. 1. New York — Toronto — London, McGraw-Hill, 1953.
22. Ван Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
23. Cole J. D. *Perturbation methods in applied mathematics*. Waltham, Mass., Blaisdell, 1968.
24. Крашенинникова Н. Л. О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. *Изв. АН СССР, ОТН*, 1955, № 8.
25. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодействия. *ПММ*, 1958, т. 22, вып. 4.
26. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. Исследование полей интегральных кривых для уравнений, описывающих автомодельные движения газа. *Bul. Inst. Politehnic Iași, Ser. nouă*, 1966, t. 12 (16), fasc. 1—2.
27. Гродзовский Г. Л., Крашенинникова Н. Л. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по степенному закону по покоящемуся газу. *ПММ*, 1959, т. 23, вып. 5.
28. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.