

ОБТЕКАНИЕ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА ГИПЕРЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ

А. Л. Гонор

(Москва)

Рассматривается режим обтекания наветренной стороны крыла с сверхзвуковыми передними кромками. Несмотря на ряд исследований [1-4], эта задача не получила корректного решения. Сложность заключается в том, что в поле течения за сильной волной имеются области однородного, потенциального и вихревого потоков, которые необходимо склеивать достаточно гладко.

Ниже развивается аналитическая теория гиперзвукового обтекания крыла с присоединенной волной, позволившая произвести необходимое сопряжение потоков.

1. Рассмотрим обтекание тонкого конического крыла гиперзвуковым потоком. В системе координат (r, θ, φ) , показанной на фиг. 1, уравнения конических течений в переменных (ψ, φ) [1] примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - v^2 - w^2 &= 0, & \frac{w}{\cos \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \operatorname{tg} \theta &= -\frac{1}{\rho \theta_\psi} \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} &= C, & \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{p}{\rho^\kappa} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln(\rho w \theta_\psi) + 2 \frac{u}{w} \cos \theta &= 0, & w \theta_\varphi &= v \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

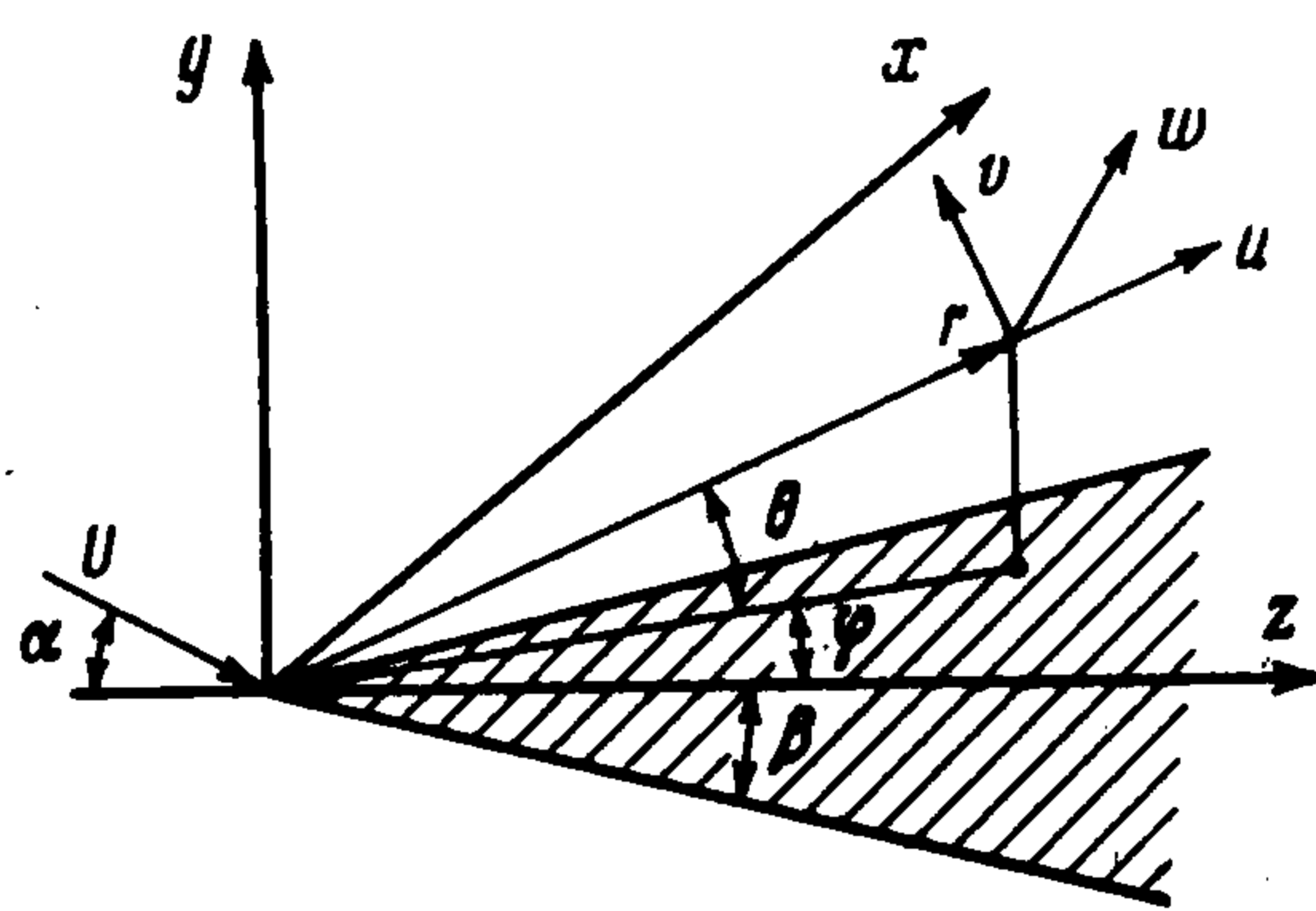
Все переменные в уравнениях безразмерные и отнесены соответственно к скорости набегающего потока U , плотности ρ° и скоростному напору $\rho^\circ U^2$. Переменная ψ удовлетворяет соотношению $[v\psi_\theta + w\psi_\varphi \sec \theta = 0$ и является поверхностью тока в коническом течении.

Решение будем искать в предположении, что область возмущенного потока представляет сильно сжатый тонкий слой. Тогда, согласно обычным оценкам теории ударного слоя [1], удобно ввести следующее преобразование:

$$\theta = \varepsilon \bar{\theta}, \quad v = \varepsilon \bar{v}, \quad \rho = \varepsilon^{-1} \bar{\rho} \quad (1.2)$$

В новых переменных (черта сверху опущена) имеем систему

$$\begin{aligned} \frac{w}{\cos \varepsilon \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \varepsilon^2 v^2 - w^2 &= 0, & \frac{\kappa p}{(\kappa+1)\rho} + \frac{u^2 + \varepsilon^2 v^2 + w^2}{2} &= C, & \frac{p^{1/\kappa}}{\rho} &= \delta(\psi) \\ \left(\frac{w}{\cos \varepsilon \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + uv + w^2 \varepsilon^{-1} \operatorname{tg} \varepsilon \theta \right) \varepsilon &= -\frac{1}{\rho \theta_\psi} \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ \kappa = \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}, & \frac{\partial}{\partial \varphi} [\ln(\rho w \theta_\psi)] + 2 \frac{u}{w} \cos \varepsilon \theta &= 0, & w \theta_\varphi &= v \cos \varepsilon \theta \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Переменные w и φ одного порядка, поэтому вид системы не меняется от нормировки этих величин, и можно считать

$$\varphi = \varepsilon^n \bar{\varphi} \quad (n \geq 0)$$

Второе уравнение (1.3) позволяет представить давление в виде суммы двух слагаемых

$$p = p_1(\varphi, \varepsilon) + \varepsilon p_2(\psi, \varphi, \varepsilon) \quad (1.4)$$

Произведем теперь упрощение, отбрасывая в (1.3) и граничных условиях члены порядка ε^2 и выше. Тогда искомые функции будут удовлетворять следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - w = 0, \quad w \frac{\partial v}{\partial \varphi} + uv + w^2 \theta = - \frac{1}{\rho \theta_\psi} \frac{\partial p_2}{\partial \psi}, \quad u^2 + w^2 = \Delta^2(\psi) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \ln(\rho w \theta_\psi) + 2 \frac{u}{w} = 0, \quad w \theta_\varphi = v \end{aligned} \quad (1.5)$$

В этом приближении граничные условия на ударной волне примут вид:

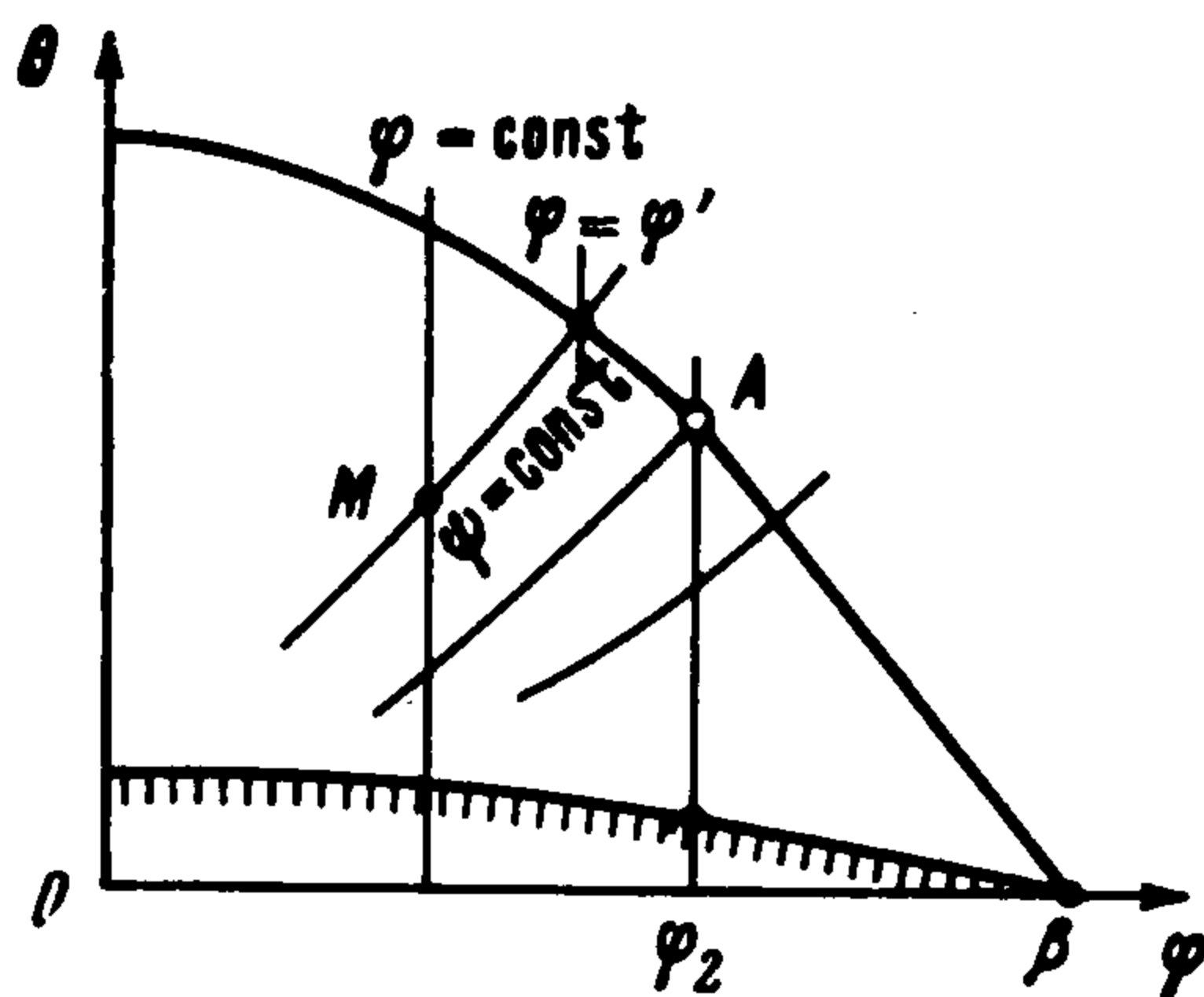
$$\begin{aligned} u^* &= \cos \alpha (\cos \varphi - \varepsilon \theta^* \operatorname{tg} \alpha), & m_0 &= 2/(\kappa - 1) M_\infty^2 \sin^2 \alpha \\ v^* &= - [\theta_\varphi^* \cos \alpha \sin \varphi + (1 + m_0) \sin \alpha + \varepsilon \cos \alpha (\theta^* \cos \varphi - \theta_\varphi^* \sin \varphi + \\ & \quad + \varepsilon \sin \alpha \theta_\varphi^{*2})] \\ w^* &= - \cos \alpha (\sin \varphi + \varepsilon \theta_\varphi^* \operatorname{tg} \alpha), & p^* &= \sin^2 \alpha + \varepsilon p_1^* \\ \rho^* &= (1 + m_0)^{-1} \\ p_1^* &= \sin 2\alpha (\theta^* \cos \varphi - \theta_\varphi^* \sin \varphi) - \sin^2 \alpha - M_\infty^{-2} \end{aligned} \quad (1.6)$$

На поверхности крыла, заданного уравнением $\theta = \varepsilon \theta^\circ(\varphi)$, из условия обтекания имеем

$$v - w \theta_\varphi^\circ(\varphi) = 0 \quad (1.7)$$

При выводе третьего уравнения (1.5) использовался вид выражения для давления (1.6) и четвертое уравнение (1.3), которое можно записать в форме следующего соотношения:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'} \left[1 + \frac{\varepsilon}{\sin^2 \alpha} (p_1^{*'} - p_1^* - p_2) \right] \quad (1.8)$$



Фиг. 2

Штрихи означают, [что соответствующие величины вычислены [в [точке [пересечения ударной волны с линией тока ($\varphi = \varphi'$ на фиг. 2)]. Давление $p_1(\varphi)$ можно определить непосредственно по значению за ударной вол-

ной (1.6), положив $p_1 = p^*$, тогда величина p_2 на ударной волне равна нулю. Следует подчеркнуть, что зависимость p_2 от параметра ε определяется из решения задачи и может не иметь аналитического представления. Однако если главный член разложения этой функции будет порядка ε^α , где $\alpha > -1$, то полученные результаты останутся справедливыми, и отброшенные члены будут порядка выше первого.

Система (1.5) позволяет непосредственно определить компоненты скорости u и w . Действительно, исключая из первого уравнения u и интегрируя от произвольной точки до ударной волны вдоль линии $\psi = \text{const}$ (фиг. 2), найдем, что

$$u = \Delta(\varphi') \cos[\varphi + \alpha(\varphi')], \quad w = -\Delta(\varphi') \sin[\varphi + \alpha(\varphi')] \quad (1.9)$$

$$\Delta(\varphi') = \cos^2 \alpha - \varepsilon \sin 2\alpha (\theta^{*'} \cos \varphi' - \theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi') \quad (1.10)$$

$$\alpha(\varphi') = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha (\theta_{\varphi}^{*'} \cos \varphi' + \theta^{*'} \sin \varphi')$$

Выражения для скоростей (1.10) дают возможность представить интеграл пятого уравнения (1.5) в виде

$$\frac{\rho \theta_{\psi}}{w} = \frac{\rho' \theta_{\psi'}}{w'} \quad (1.11)$$

Перепишем соотношение (1.11) в интегральной форме, заменяя интегрирование [1] по переменной ψ интегрированием по переменной φ' .

В результате имеем

$$\theta = \theta^{\circ}(\varphi) + \int_{\varphi^{\circ}(\varphi)}^{\varphi'} \frac{\rho' w}{\rho w'} \theta_{\psi'} \psi_{\varphi'} d\varphi' \quad (1.12)$$

Здесь $\varphi^{\circ}(\varphi)$ — произвольная функция, соответствующая линии тока на поверхности крыла. Предполагается, что крыло тонкое и функция $\theta^{\circ} \sim \varepsilon_1$. Множитель $\theta_{\psi'} \psi_{\varphi'}$, согласно последнему уравнению системы (1.5) и второму условию (1.6), можно заменить выражением

$$\theta_{\psi'} \psi_{\varphi'} \equiv \frac{d\theta'}{d\varphi'} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \varphi}\right)' = \frac{1}{w'} \left\{ (1 + m_0) \sin \alpha \left[1 + \frac{\varepsilon}{1 + m_0} (\theta^{*'} \cos \varphi' - \theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi') \right] \right\} \quad (1.13)$$

Подставляя (1.8) и (1.13) в (1.12), найдем, что

$$\theta = \theta^{\circ}(\varphi) + (1 + m_0) \sin \alpha \int_{\varphi^{\circ}}^{\varphi'} \frac{w}{w'^2} R d\varphi' \quad (1.14)$$

$$[R] = 1 \left[1 + \varepsilon \left[\frac{(\theta^{*'} \cos \varphi' - \theta_{\varphi}^{*'} \sin \varphi') \operatorname{ctg} \alpha}{1 + m_0} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} (p_1^{*'} - p_1^* - p_2) \right] \right]$$

Отсюда при $\varphi' = \varphi$ получим соотношение для ударной волны

$$\theta^* = \theta^{\circ}(\varphi) + (1 + m_0) \sin \alpha \int_{\varphi^{\circ}}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} R d\varphi' \quad (1.15)$$

Формула (1.15) помимо поверхности ударной волны содержит еще две неизвестные функции φ° и p_2 . Для нахождения первой из них воспользуемся условием обтекания (1.7), которое с учетом (1.5) и (1.14) приводится к виду

$$\frac{d\varphi^{\circ}}{d\varphi}(w)_{\varphi'=\varphi^{\circ}} = 0 \quad (1.16)$$

Это уравнение допускает два решения

$$\varphi^\circ = \text{const}$$

$$z'(\varphi^\circ) \cos \varphi^\circ + z(\varphi^\circ) \sin \varphi^\circ = -\varphi \text{ctg}^2 \alpha, \quad z(\varphi) = \varepsilon \text{ctg} \alpha \theta^*(\varphi) \quad (1.17)$$

В точном решении поверхность крыла есть поверхность тока, поэтому $\varphi^\circ = \beta$ (β — полуугол при вершине крыла). Однако, как указывалось в [1], гиперзвуковые решения для конических тел этому условию могут не удовлетворять. Не останавливаясь на анализе возможных случаев, укажем, что в развиваемой теории для крыльев, имеющих около кромок область однородного потока, необходимо полагать $\varphi^\circ = \text{const}$. Особенности, которые при этом могут возникнуть, рассматриваются ниже.

Перейдем к отысканию второй неизвестной функции p_2 . Предварительно отметим, что давление p_2 везде входит с множителем ε , и достаточно определить его главный член. Будем находить давление p_2 из второго уравнения (1.5), проинтегрировав последнее по линии $\varphi = \text{const}$ от ударной волны до произвольной точки. В результате найдем, что

$$p_2 = \sin \alpha \int_{\varphi^\circ}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} (\theta_{\varphi\varphi} + \theta) d\varphi' \quad (1.18)$$

Если теперь дважды продифференцировать (1.14) и подставить результат в (1.18), то для p_2 будем иметь

$$p_2 = \sin \alpha (\theta^\circ + \theta_{\varphi\varphi}^\circ) \int_{\varphi^\circ}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} d\varphi' + 2 \sin^2 \alpha (1 + m_0) \left\{ [\cos \varphi (z + z'') + \right.$$

$$+ \sin \varphi (z' + z''')] \int_{\varphi^\circ}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} d\varphi' \int_{\beta}^{\varphi'} \left(\frac{w}{w'^2} \right)_{\varphi'=\xi} d\xi - 2 \sin \varphi (z +$$

$$+ z'') \int_{\varphi^\circ}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} d\varphi' \int_{\beta}^{\varphi'} \left(\frac{u}{w'^2} \right)_{\varphi'=\xi} d\xi \left. \right\} \quad (1.19)$$

Первый член в (1.19) характеризует влияние кривизны поперечного контура, второй — влияние кривизны ударной волны. В формуле (1.19) опущены слагаемые, содержащие величины $\varepsilon p_{2\varphi}$ и $\varepsilon p_{2\varphi\varphi}$. Основанием для этого являются оценки отброшенных членов, имеющих с точностью до несущественной постоянной следующий вид:

$$\delta_1 = \varepsilon \int_{\varphi^\circ}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} d\varphi' \int_{\beta}^{\varphi'} \left(\frac{u}{w'^2} \right)_{\varphi'=\xi} p_{2\varphi} d\xi, \quad \delta_2 = \varepsilon \int_{\varphi^\circ}^{\varphi} \frac{w^3}{w'^2} d\varphi' \int_{\beta}^{\varphi'} \left(\frac{w}{w'^2} \right)_{\varphi'=\xi} p_{2\varphi\varphi} d\xi$$

Допустим, что $p_2 \sim a(\varepsilon)$, тогда имеем $p_{2\varphi} \sim \varepsilon^{-1/2} a(\varepsilon)$, $p_{2\varphi\varphi} \sim \varepsilon^{-1} a(\varepsilon)$. Если учесть, что $u \sim 1$; $w \sim \varepsilon^{1/2}$ (при $\varphi \lesssim \varphi_2$) и w' меняет порядок от 1 до $\varepsilon^{1/2}$, то получим $\delta_1 \sim \delta_2 \sim \varepsilon a(\varepsilon)$. Следовательно, в области неоднородного течения, где $\varphi \sim \sqrt{\varepsilon}$, указанные градиенты давления с соответствующими весовыми функциями имеют более высокий порядок малости, чем остальные члены уравнений, и главный член для давления p_2 определяется формулой (1.19). В области однородного потока p_2 обращается в нуль.

Подставляя (1.19) в (1.15), получим для поверхности ударной волны интегро-дифференциальное уравнение

$$z + \delta [2L_2 (z \cos \varphi - z' \sin \varphi) - L_1] + 2\varepsilon (z^\circ + z^{\circ\prime\prime}) L_3 - z^\circ = \\ = 2\varepsilon \delta \{(z + z^{\prime\prime}) [2 \sin \varphi L_4 - \cos \varphi L_5] - (z' + z^{\prime\prime\prime}) \sin \varphi L_5\}$$

$$z = \varepsilon \operatorname{ctg} \alpha \theta^* (\varphi), \quad z^\circ = \varepsilon \operatorname{ctg} \alpha \theta^\circ (\varphi), \quad \delta = \varepsilon \cos \alpha (1 + m_0)$$

$$L_1 = \int_{\beta}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} \left\{ 1 + \frac{3 + 2m_0}{1 + m_0} [z(\varphi') \cos \varphi' - z'(\varphi') \sin \varphi'] \right\} d\varphi' \\ L_2 = \int_{\beta}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} d\varphi', \quad L_3 = \int_{\beta}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} d\varphi' \int_{\varphi'=\xi}^{\varphi} \left(\frac{w^3}{w'^2} \right)_{\varphi'=\xi} d\xi \\ L_4 = \int_{\beta}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} d\varphi' \int_{\varphi'=\xi}^{\varphi} \left(\frac{w^3}{w'^2} \right)_{\varphi'=\xi} d\xi \int_{\beta}^{\xi} \left(\frac{u}{w'^2} \right)_{\varphi'=\eta} d\eta \\ L_5 = \int_{\beta}^{\varphi} \frac{w}{w'^2} d\varphi' \int_{\varphi'=\xi}^{\varphi} \left(\frac{w^3}{w'^2} \right)_{\varphi'=\xi} d\xi \int_{\beta}^{\xi} \left(\frac{w}{w'^2} \right)_{\varphi'=\eta} d\eta \quad (1.20)$$

Коэффициенты L_i являются сложными функционалами от формы ударной волны z , но в некоторых случаях, например, когда волна плоская, квадратуры легко вычисляются, и все L_i представляются конечными выражениями. Это обстоятельство используется в дальнейшем при построении решения. Рассмотрим теперь подробнее структуру уравнения (1.20). В правой его части содержатся члены более высокого порядка, чем в левой, и, казалось бы, что ими можно пренебречь. Однако совокупность членов в левой части уравнения тождественно равна нулю в точке сопряжения, поэтому вблизи левая часть может иметь тот же порядок малости, что и правая, содержащая старшую производную. Наличие последней и позволяет произвести гладкое сопряжение плоской волны с криволинейной¹. При этом, согласно уравнению (1.20), в точке A (фиг. 2) возникает разрыв кривизны. Следует отметить, что хотя система (1.5) и граничные условия (1.6), (1.7) с самого начала допускают ошибку в членах выше первого порядка, разыскивается по возможности точное решение аппроксимирующих уравнений. Как видно из анализа (1.20), в поле потока имеются области, в которых главные члены или их комбинации обращаются в нуль, и поведение решения определяется малыми добавками. Предугадать заранее, где и какие из малых членов окажутся существенными, не всегда представляется возможным, особенно когда течение сложное, как, например, в окрестности точки сопряжения. В этом случае сохранение всех членов позволяет уловить тонкие эффекты, вносящие главный вклад в области смыкания потоков.

¹ Указанное положение не было замечено ни в одном из предшествующих исследований, включая последние работы [3, 4]. Поэтому попытки построения решения на основе уравнения, отличающегося от (1.20) тем, что в правой части стоит нуль, оказывались безуспешно.

Перейдем непосредственно к отысканию решения (1.20). Уравнение поверхности ударной волны в области $0 \leq \varphi \leq \varphi_2$ будем искать в виде ряда

$$z(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}(\varphi_2)}{n!} (\varphi - \varphi_2)^n \quad (1.21)$$

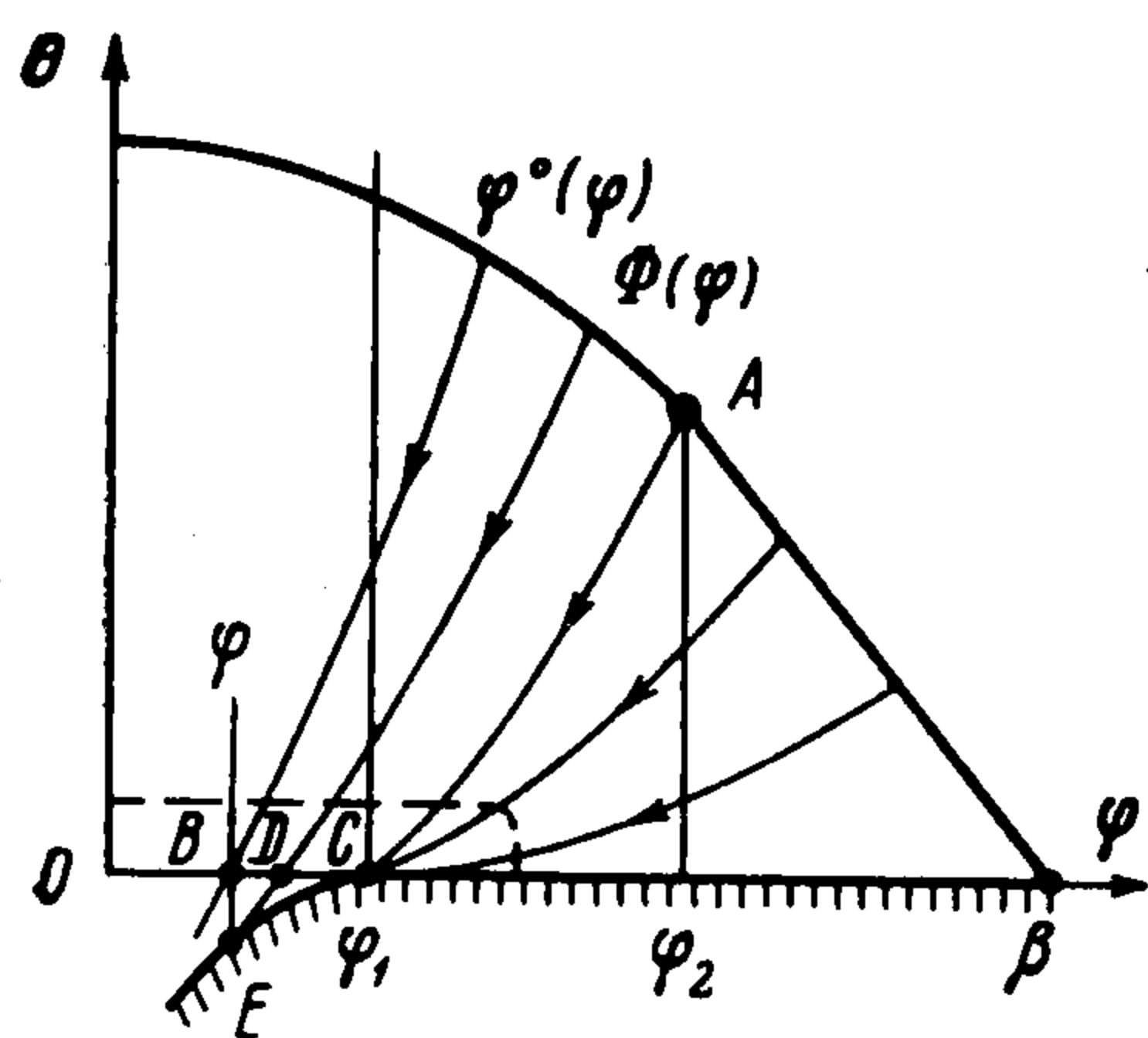
Значения функций $z(\varphi_2)$ и $z'(\varphi_2)$ заданы условием гладкого сопряжения с однородным потоком. В точке φ_2 непрерывны и известны коэффициенты L_4 , поэтому из (1.20) нетрудно установить связь между $z'''(\varphi_2)$ и $z^{(4)}(\varphi_2)$. Если произвести последовательное дифференцирование уравнения (1.20), то можно найти аналогичные связи между $z^{(4)}(\varphi_2)$, $z^{(5)}(\varphi_2)$ и т. д. В результате ряд (1.21) будет зависеть только от одной произвольной постоянной, которая легко находится из условия в плоскости симметрии $z'(0) = 0$.

Можно показать, что в построенном решении области однородного, потенциального вихревого потоков сопрягаются непрерывным образом.

Действительно, хотя кривизна ударной волны в точке сопряжения терпит разрыв, газодинамические характеристики остаются непрерывными. Для простоты ограничимся случаем плоского крыла ($z^0 \equiv 0$) и рассмотрим в окрестности линии $\varphi = \varphi_2$ поведение давления. Из формулы (1.4) видно, что разрыв может возникнуть только от второго слагаемого p_2 . Справа от точки p_2 выражение (1.19) дает, что $p_2 = 0$; для исследования давления слева применим соотношение (1.26), тогда снова получим $p_2 = 0$. Следовательно, давление внутри области течения непрерывно.

Второй характеристикой, зависящей от кривизны волны, является компонента скорости v . Опуская выкладки, можно сделать заключение, что с принятой точностью до членов ε^2 скорость v остается непрерывной.

Другим важным моментом является полученная из решения топологическая картина поверхностей тока. Изучим расположение линий тока



Фиг. 3

на сфере $r = \text{const}$, прошедших через плоский скачок. Все эти линии, согласно (1.10), имеют критическую точку $(0, \varphi_1)$ типа узла (фиг. 3). Этот узел располагается на расстоянии, очень близком от плоскости симметрии ($\sim \varepsilon \text{tg}^2 \alpha$), однако не совпадает с ней. Слабое искривление поверхностей тока левее характеристики $\varphi = \varphi_2$ обусловлено изменением функции R .

Исследование линий тока, прошедших через криволинейный скачок, обнаруживает возможность пересечения ими поверхности крыла OC , которая на этом участке становится особой (фиг. 3). Оказывается, при $\varphi < \varphi_1$ (точка B на фиг. 3) существует диапазон значений $\Phi \leq \varphi' \leq \beta$, для которого величина θ принимает отрицательное значение. Таким образом, решение охватывает область по другую сторону крыла, вплоть до огибающей линии тока EC . Формально эту область можно не исключать, если придавать реальный смысл всем выражениям только при $\theta \geq 0$. Однако если ввести новую функцию $\varphi^0(\varphi)$ ($0 \leq \varphi \leq \varphi_1$),

определяемую уравнением

$$\int_{\beta}^{\varphi^{\circ}(\varphi)} \frac{w}{w'^2} R d\varphi' = 0$$

и ограничить изменение переменной φ' интервалом $\varphi \leq \varphi' \leq \varphi^{\circ}(\varphi)$, то область $\theta < 0$ исключается автоматически. При этом предел интегрирования β заменяется величиной $\varphi^{\circ}(\varphi)$, и вид некоторых выражений при дифференцировании изменится. Понятно, что оба подхода дают одни и те же результаты и приводят к необходимости удовлетворить условию обтекания на линии OC . Покажем, оценивая [нормальную скорость, что это условие выполняется. Если учесть, что $v = w\theta_{\varphi}$, $\theta_{\varphi} \sim \varepsilon/\varphi^{\circ}$, $w \sim \varepsilon\varphi^{\circ}$, то получим $v \sim \varepsilon^2$ и, с принятой точностью, условие обтекания выполнено.

По этому поводу необходимо заметить, что, хотя построенное решение удовлетворяет всем уравнениям и граничным условиям, в области, примыкающей к отрезку OC , точность аппроксимирующей системы падает. Здесь, как и в теории гиперзвуковых конических течений, необходимо учесть энтропийный слой. В результате в области, ограниченной на фиг. 3 пунктиром, будет другое распределение скорости и исчезнут особенности на отрезке OC .

Решение уравнения (1.20) в форме ряда (1.21) удобно своей простотой для проведения конкретных расчетов. Однако оно не дает возможности установить вид зависимости решения от параметра ε . Чтобы проанализировать искомую зависимость, можно воспользоваться методом возмущений. При $\varepsilon = 0$ решение $z \equiv 0$ удовлетворяет граничным условиям и уравнению (1.20). Если принять его за нулевое приближение решения при $\varepsilon \neq 0$, то можно вычислить все интегралы L_i . В результате уравнение (1.20) становится дифференциальным и для малых φ сводится к уравнению Эйлера третьего порядка. Решение последнего содержит члены вида $\exp(\varepsilon^{-1/2} \ln \varphi)$, свидетельствующие о неаналитическом характере зависимости от ε . Непосредственная подстановка этого решения в (1.19) позволяет установить, что члены δ_1 и δ_2 соответствуют оценкам, приведенным выше.

2. Общие соотношения, полученные выше, можно применить к обтеканию треугольной пластины под углом атаки.

Угол при вершине пластины обозначим через 2β , число Маха будем считать для простоты равным бесконечности ($m_0 = 0$). В этом случае функция $z^{\circ} \equiv 0$ и коэффициенты L_i , вычисленные вдоль плоской волны $z = a \sin(\beta - \varphi)$, определяются соотношениями

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1 + 3a \sin \beta}{\Delta_1} \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi_1)}, & L_2 &= \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\Delta_1 \sin(\beta - \varphi_1)} \\ L_4 &= \frac{\sin^2(\varphi - \varphi_1)}{2\Delta_1} d, & L_5 &= \frac{-\sin^2(\varphi - \varphi_1)}{\Delta_1} d \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\Delta_1 = \cos \alpha (1 - 2a \operatorname{tg}^2 \alpha \sin \beta)^{1/2}, \quad \varphi_1 = a \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{ctg} \beta$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{5}{6} \operatorname{ctg}^3(\beta - \varphi_1) \sin^3(\varphi - \varphi_1) + \frac{1}{2} \frac{\operatorname{ctg}(\beta - \varphi_1) \sin(\beta - \varphi) \sin^2(\varphi - \varphi_1)}{\sin(\beta - \varphi_1)} - \\ &\quad - \frac{1}{3} \cos^3(\varphi - \varphi_1) \end{aligned}$$

Коэффициент L_3 в данной задаче выпадает (крыло плоское); координата φ_2 определяется линией пересечения конуса Маха для однородного потока за ударной волной с поверхностью крыла. Ее значение находится из выражения

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1}{\Delta_1} \left(\varepsilon \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} p^* \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Формула (2.2) показывает, в частности, что $\varphi_2 \sim \sqrt{\varepsilon}$. Подставим теперь уравнение плоской волны в (1.20), тогда будем иметь

$$a = \varepsilon \frac{1 + \varepsilon \sec^2 \alpha}{\sin(\beta - \varphi_1)} \quad (2.3)$$

и в физических координатах уравнение плоского скачка примет вид

$$\theta^* = \varepsilon \operatorname{tg} \alpha \frac{(1 + \varepsilon \sec^2 \alpha) \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi_1)}$$

Давление за скачком в однородном потоке определяется формулой

$$p = p^* = \sin^2 \alpha + \varepsilon \left[\frac{\sin 2\alpha \sin \beta \operatorname{tg} \alpha}{\sin(\beta - \varphi_1)} (1 + \varepsilon \sec^2 \alpha) - \sin^2 \alpha \right] \quad (2.4)$$

Криволинейный участок волны находим при помощи ряда (1.21). Предварительно подставим в уравнение (1.20), при $\varphi = \varphi_2$, коэффициенты L_i , вычисленные по формулам (2.1). Тогда в точке φ_1 имеется следующее соотношение между производными:

$$z''' = - (z_2'' + z_2) k - z_2', \quad k = 2 \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_1) + \operatorname{ctg} \varphi_2 \quad (2.5)$$

$$z_2 = z(\varphi_2)$$

Аналогичные связи можно установить и между производными более высокого порядка $z^{(4)}$, $z^{(5)}$ и т. д., если выполнить последовательное дифференцирование (1.20).

Ограничим для простоты ряд (1.21) четырьмя членами. В этом приближении, используя граничное условие $z'(0) = 0$, получаем для второй производной выражение

$$z_2'' = \frac{z_2'(2 - \varphi_2^2) - k\varphi_2^2 z_2}{\varphi_2(2 + k\varphi_2)} \quad (2.6)$$

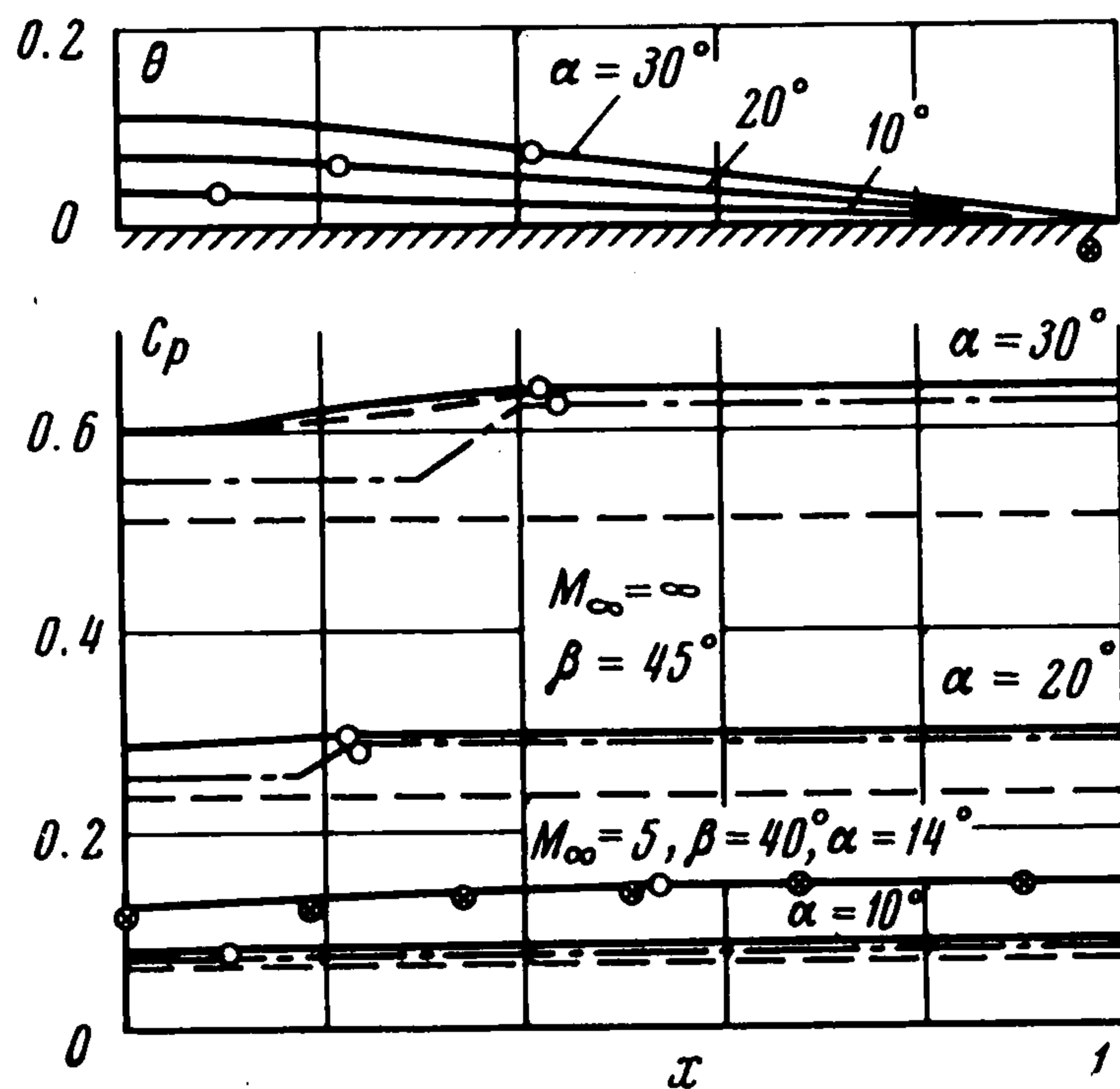
Формула (2.6) позволяет непосредственно определить порядок z_2'' . Действительно, $\varphi_2 \sim \sqrt{\varepsilon}$, z_2 и $z_2' \sim \varepsilon$, значит, z_2'' будет $\sim \sqrt{\varepsilon}$. Соответственно из (2.5) находим, что $z_2''' \sim 1$. Нетрудно установить, что ударная волна выпукла вверх (знак $z_2'' < 0$). Соотношение (2.5) позволяет представить ряд (1.21) в следующей форме:

$$z(\varphi) = z_2 + z_2'(\varphi - \varphi_2) + \frac{1}{2} z_2''(\varphi - \varphi_2)^2 - \frac{1}{6} [(z_2 + z_2'')k + z_2'](\varphi - \varphi_2)^3 + \dots \quad (2.7)$$

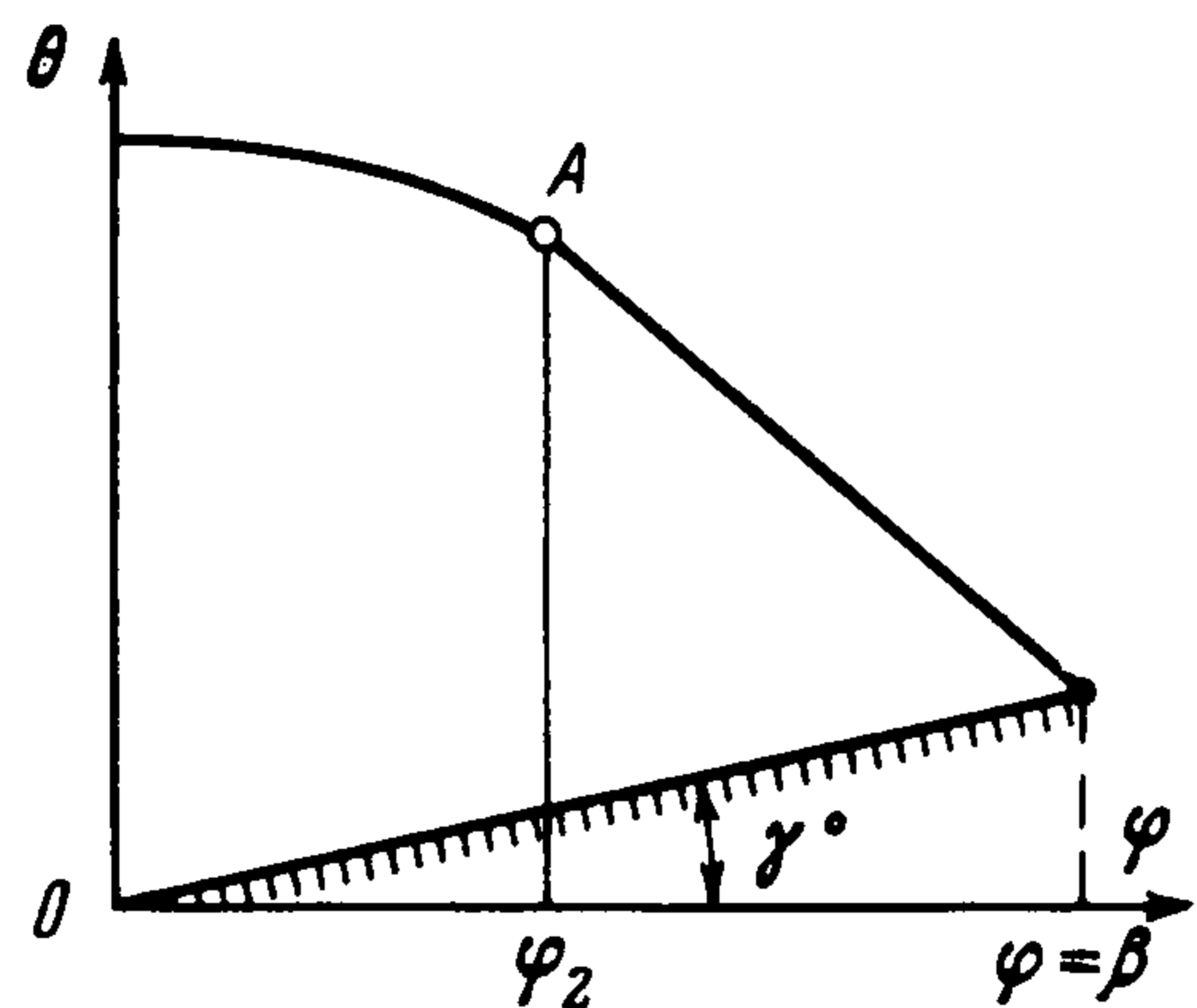
Причем вторая производная исключается при помощи (2.6). Определив форму ударной волны, легко находим остальные характеристики поля потока.

Рассмотрим некоторые данные по распределению давления на поверхности крыла; на фиг. 4 представлен коэффициент давления, вычисленный по первому приближению и с учетом p_2 (пунктир), и дано сравнение с соответствующими величинами, полученными в [5] методом конечных разностей, и с теорией Ньютона (пунктир). На этой же фигуре приведены

результаты сравнения с экспериментом [6] при $M = 5$. Как видно из расположения кривых, совпадение данных достаточно хорошее.



Фиг. 4



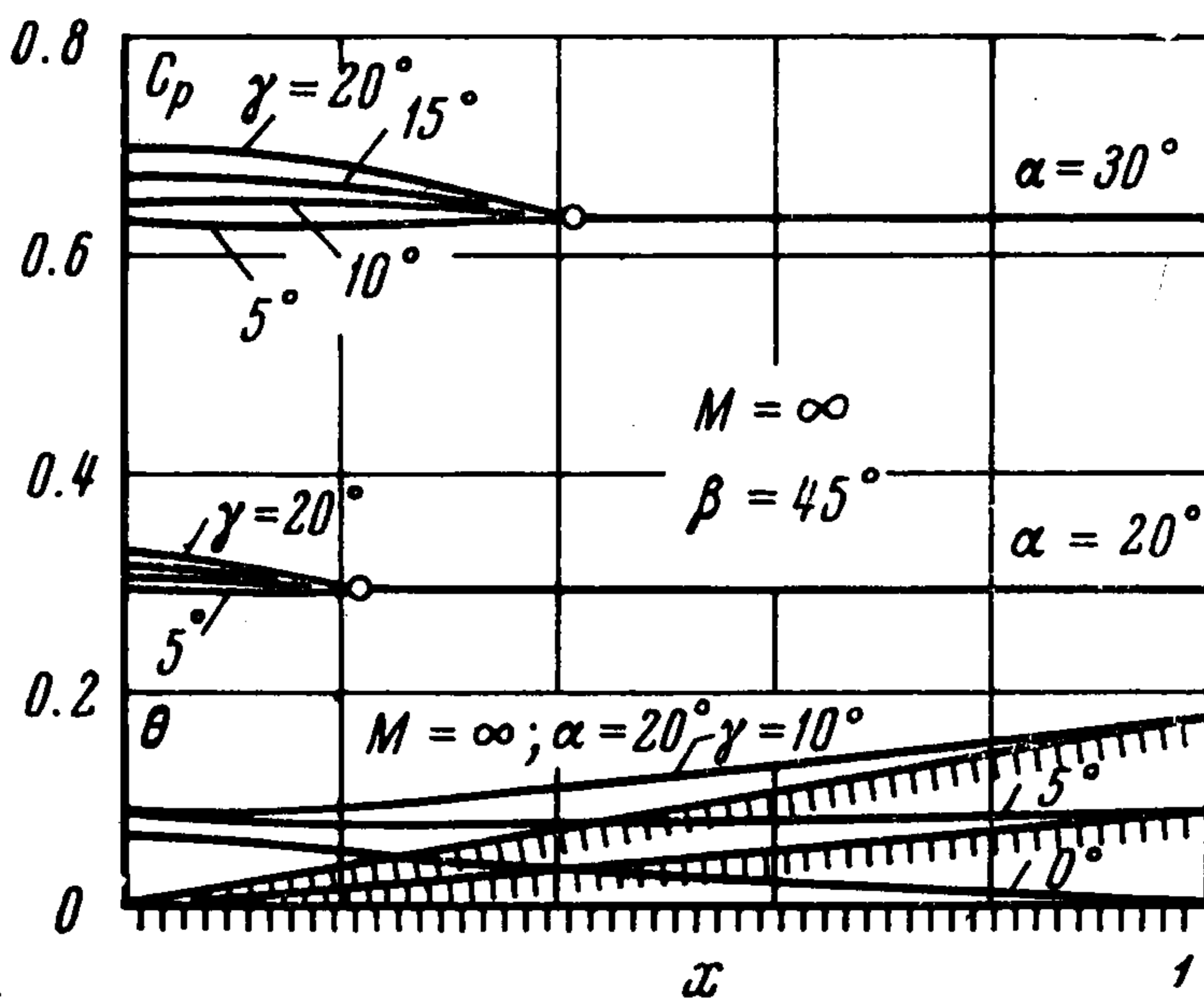
Фиг. 5

3. В качестве второго примера рассмотрим обтекание треугольного крыла с поперечным сечением V-образной формы.

Обозначим полуугол при вершине крыла через β , а угол раскрытия крыла, измеренный в поперечной плоскости, — через γ (фиг. 5). Тогда уравнение поперечного контура z° определяется выражением $z^\circ = \text{ctg}^2 \alpha \gamma \sin \varphi$. Предполагается, что $\gamma \ll \varepsilon$. Коэффициенты L_i , вычисляемые на плоском участке ударной волны, сохраняются равными выражениям (2.1). При этом уравнение волны в этом случае будет

$$z = z^\circ(\varphi) + a \sin(\beta - \varphi)$$

Коэффициент L_3 снова выпадает, и с принятой точностью без изменений остаются формулы (2.2), (2.3). В результате уравнение плоского скачка в физических координатах примет вид



Фиг. 6

$$\theta^* = \gamma \sin \varphi + \frac{\varepsilon \text{tg} \alpha (1 + \varepsilon \sec^2 \alpha) \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi_1)} \quad (3.1)$$

Определим теперь криволинейный участок волны. В точке A уравнение (1.20) и коэффициенты L_i совпадают со случаем плоского крыла. Поэтому соотношения (2.5), (2.6) можно использовать и для крыла V -образной формы. С учетом сказанного ряд (2.7) будет представлять ударную волну, если значения z_2 и z_2' определить из формулы (2.8). Качественный анализ решения, связанный с разрывом кривизны, энтропийным слоем и др., можно опустить, так как в нем не содержится новых положений по сравнению с исследованием, проведенным для плоского крыла.

Расчет распределения давления на крыле и форма ударной волны для нескольких значений углов раскрытия и атаки приведены на фиг. 6. Графики, построенные по первому приближению, позволяют сделать вывод, что вдоль размаха крыла давление меняется незначительно. Основное изменение наблюдается около плоскости симметрии, где при уменьшении угла раскрытия крыльев происходит возрастание значений давления.

Отметим, что теория справедлива для течений без внутренних скачков, поэтому угол раскрытия может изменяться в относительно узком диапазоне.

Поступила 31 I 1969

■ ЛИТЕРАТУРА

1. Г о н о р А. Л. Обтекание конических тел при движении газа с большой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, № 1.
2. M e s s i t e r A. F. Lift of slender delta wings according to Newtonian theory. AJAA. J., 1963, vol. 1, No. 4, pp. 794—802.
3. H a y e s W. D., P r o b s t e i n R. F. Hypersonic flow theory., Acad. Press, N. Y.— London, 1963.
4. S q u i r e L. C. Calculated pressure distributions and shock shapes on thick conical wings at high supersonic speeds. Aeronaut. Quart., 1967, vol. 18, No. 2, pp. 185—206.
5. Б а б а е в Д. А. Численное решение задачи обтекания поверхности треугольного крыла сверхзвуковым потоком. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6.
6. R a n d a l l R., B e l l D., B u r k J. Pressure distribution tests of several sharp leading edge wings, bodies and body-wing combinations at Mach 5 and 8., AEDC, TN., 1966, No. 173.