

О КОНВЕКТИВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПЕРИОДИЧЕСКИ МЕНЯЮЩЕГОСЯ ПАРАМЕТРА

Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, Ю. С. Юрков

(Пермь)

Задача о возникновении конвекции при наличии периодически меняющегося со временем параметра представляет интерес в связи с тем, что параметрическое воздействие существенно влияет на устойчивость. Наиболее естественными представляются два способа параметрического воздействия на конвективную устойчивость: модуляция равновесного градиента температуры и модуляция поля внешних сил. Модуляция градиента температуры может быть осуществлена путем периодического изменения со временем температуры на границах полости, содержащей жидкость. Модуляция поля внешних сил (поля тяжести) возникает при наличии вертикальных колебаний жидкости.

Эти механизмы параметрического воздействия, вообще говоря, различны. Периодическое изменение со временем температуры на границах полости в силу температурного скин-эффекта приводит к модуляции массовой (конвективной) силы лишь в некотором слое, толщина которого убывает с увеличением частоты. В случае же вертикальных колебаний полости, заполненной жидкостью, модуляция конвективной силы осуществляется (в несжимаемой жидкости) равномерно по всему объему. Это отличие, однако, исчезает при сравнительно низких частотах, когда толщина теплового скин-слоя достаточно велика по сравнению с характерным линейным размером полости. В этом предельном случае оба способа параметрического воздействия оказываются в сущности эквивалентными.

Влияние периодического изменения параметра на возникновение конвекции изучалось в работах [1-6]. В работе [1] исследовалась устойчивость плоского горизонтального слоя жидкости со свободными границами при периодической модуляции вертикального градиента температуры. Рассматривалась область низких частот, когда можно пренебречь температурным скин-эффектом. Для случая прямоугольной модуляции найдено точное решение уравнений малых возмущений и определены границы устойчивости. В работах [2,5] исследовалось влияние модуляции градиента температуры в условиях, когда существенно наличие теплового скин-слоя. В [2] рассматривалась задача о возникновении конвекции в глубоком бассейне, температура поверхности которого изменяется со временем по гармоническому закону. При помощи интегрального метода была получена оценка нижней границы устойчивости. В [5] для исследования устойчивости плоского горизонтального слоя с периодическим изменением температуры на границах применялся метод малого параметра. В предположении малости амплитуды модуляции температуры найдены критические числа Рэлея для разных законов изменения температуры на свободных границах слоя. В работах [3,4] исследовалось влияние на конвективную устойчивость плоского горизонтального слоя жидкости высокочастотных вертикальных вибраций. При помощи метода усреднения определена зависимость критического числа Рэлея от вибрационного параметра. Наконец, в работе [6] на основе численного решения нелинейных уравнений конвекции изучалась структура конвективных движений в надкритической области для случая вертикальных колебаний.

В данной работе продолжено исследование, начатое в [1]. Рассматривается влияние параметрического воздействия (модуляция вертикального градиента температуры или поля тяжести) на устойчивость равновесия в плоском горизонтальном слое со свобод-

ными и твердыми границами, а также в вертикальном круговом цилиндре. Система уравнений для возмущений при помощи метода Канторовича сводится к системе обыкновенных уравнений для амплитуд, зависящих от времени. Периодические решения этих уравнений для случая синусоидальной модуляции найдены численно на ЭВМ методом Рунге — Кутты. Определяются границы устойчивости в зависимости от параметров модуляции. Обсуждается предельный случай высоких частот.

1. Модуляция вертикального градиента температуры. Рассмотрим сначала параметрическое воздействие на устойчивость равновесия при помощи периодической модуляции градиента температуры. Будем иметь в виду модуляцию низкой частоты, когда температурным скин-эффектом можно пренебречь. В этом случае равновесный градиент температуры однороден по объему жидкости и модулируется около среднего значения A_0 с частотой ω_0 и амплитудой a_0

$$\nabla T_0 = -(A_0 + a_0 \sin \omega_0 t) \gamma = -A_0 (1 + \eta \sin \omega_0 t) \gamma \quad (\eta = a_0 / A_0) \quad (1.1)$$

Здесь γ — единичный вектор, направленный по вертикали вверх.

Выберем в качестве единиц расстояния, времени, скорости, температуры и давления соответственно L , $L^2/\sqrt{\nu\chi}$, χ/L , $A_0 L$ и $\rho\nu\chi/L^2$ (L — характерный размер полости, ν и χ — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности). Тогда уравнения малых возмущений равновесия в безразмерной форме примут вид:

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial v}{\partial t} = -\nabla p + \Delta v + R_f T \gamma \quad (1.2)$$

$$\sqrt{P} \frac{\partial T}{\partial t} - (1 + \eta \sin \Omega t) (v \gamma) = \Delta T, \quad \text{div } v = 0 \quad (1.3)$$

$$R_f = \frac{g\beta A_0 L^4}{\nu\chi}, \quad P = \frac{\nu}{\chi}, \quad \Omega = \frac{L^2}{\sqrt{\nu\chi}} \omega_0 \quad (1.4)$$

Здесь R_f и P — числа Рэлея и Прандтля, Ω — безразмерная частота модуляции.

Переходя к рассмотрению плоского горизонтального слоя жидкости, выберем начало координат на нижней плоскости и направим ось z вертикально вверх, а оси x и y — горизонтально. Исключая компоненты скорости v_x и v_y , а также давление p и вводя нормальные возмущения

$$v_z = v(z, t) \exp i(k_1 x + k_2 y), \quad T = \theta(z, t) \exp i(k_1 x + k_2 y) \quad (1.5)$$

получим из (1.2) — (1.3) систему амплитудных уравнений (штрихом обозначено дифференцирование по z)

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial}{\partial t} (v'' - k^2 v) = (v^{IV} - 2k^2 v'' + k^4 v) - k^2 R_f \theta \quad (1.6)$$

$$\sqrt{P} \frac{\partial \theta}{\partial t} - (1 + \eta \sin \Omega t) v = \theta'' - k^2 \theta \quad (k^2 = k_1^2 + k_2^2) \quad (1.7)$$

Как и при отсутствии модуляции, наиболее прост для анализа случай свободных границ. При этом на границах слоя

$$v = v'' = 0, \theta = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1 \quad (1.8)$$

(в качестве характерного размера L принята толщина слоя h).

Задача (1.6) — (1.8) имеет решение вида

$$v(z, t) = a(t) \sin \pi z, \theta(z, t) = b(t) \sin \pi z \quad (1.9)$$

соответствующее основному уровню неустойчивости. Амплитуды $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют системе обыкновенных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\kappa^2}{\sqrt{P}} a' + \kappa^4 a &= k^2 R_f b & (\kappa^2 = k^2 + \pi^2) \\ \sqrt{P} b' + \kappa^2 b &= (1 + \eta \sin \Omega t) a \end{aligned} \quad (1.10)$$

Замена

$$a = f_1, b = l f_2, t = m\tau \quad (l = 1 / \kappa^2 \sqrt{P}, m = 1 / \kappa^2) \quad (1.11)$$

позволяет привести систему (1.10) к «каноническому» виду

$$f_1' + n f_1 = R f_2, \quad f_2' + \frac{1}{n} f_2 = (1 + \eta \sin \omega \tau) f_1 \quad (1.12)$$

$$\omega = m\Omega = \frac{mL^2}{\sqrt{\nu\chi}} \omega_0, \quad n = \sqrt{P}, \quad R = \frac{R_f}{R_0}, \quad R_0 = \frac{\kappa^6}{k^2} = \frac{(k^2 + \pi^2)^3}{k^2} \quad (1.13)$$

Здесь точкой обозначены производные по новому безразмерному времени τ , ω — новая безразмерная частота, η — амплитуда модуляции; параметр n играет роль коэффициента трения, а R — «приведенное» число Рэлея (R_0 — критическое число Рэлея при отсутствии модуляции).

Система (1.12) сводится к уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами

$$f_1'' + \left(n + \frac{1}{n}\right) f_1' + [1 - R(1 + \eta \sin \omega \tau)] f_1 = 0 \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) было получено в работе [1], там же были найдены области устойчивости и неустойчивости для случая прямоугольной модуляции.

Более сложен случай твердых границ слоя, когда граничные условия имеют вид

$$v = v' = 0, \theta = 0 \text{ при } z = 0 \text{ и } z = 1 \quad (1.15)$$

В этом случае для сведения задачи к системе обыкновенных уравнений можно применить метод Канторовича, представив v и θ в виде разложений

$$v(z, t) = \sum_i a_i(t) F_i(z), \quad \theta(z, t) = \sum_i b_i(t) \Phi_i(z) \quad (1.16)$$

где $F_i(z)$ и $\Phi_i(z)$ — системы базисных координатных функций, удовлет-

воряющих граничным условиям (1.15). Подставляя (1.16) в систему (1.6), (1.7), умножая соответственно на F_i и Φ_i и интегрируя по z , получим систему обыкновенных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами для амплитуд $a_i(t)$, $b_i(t)$. Ограничиваясь первым приближением, положим

$$v(z, t) = a(t)F(z), \quad \theta(z, t) = b(t)\Phi(z) \quad (1.17)$$

$$F(z) = z^2(1-z)^2, \quad \Phi(z) = z(1-z)(1+z-z^2) \quad (1.18)$$

При выборе аппроксимации $\Phi(z)$ учтено дополнительное условие $\theta''(0) = \theta''(1) = 0$, вытекающее из (1.7).

Для амплитуд $a(t)$ и $b(t)$ получается система, отличающаяся от (1.10) лишь коэффициентами. Ее можно привести к виду (1.12) заменой (1.11), если выбрать

$$m = \left[\frac{31(12+k^2)}{(504+24k^2+k^4)(306+31k^2)} \right]^{1/2}, \quad l = \frac{11}{62} \frac{m}{\sqrt{P}} \quad (1.19)$$

Входящие в систему (1.12) параметры в случае слоя с твердыми границами равны

$$n = \left[\frac{31(504+24k^2+k^4)}{(12+k^2)(306+31k^2)} P \right]^{1/2} \quad (1.20)$$

$$R = \frac{R_f}{R_0}, \quad R_0 = \frac{4}{121k^2} (504+24k^2+k^4)(306+31k^2)$$

Здесь R_0 — приближенное значение критического числа Рэлея в отсутствие модуляции для слоя с твердыми границами (минимальное значение соответствует $k_m = 3.12$ и равно 1719; отличие от точного значения 1708 составляет 0.6%).

Таким образом, определение границ устойчивости при наличии модуляции равновесного градиента температуры в случае слоя со свободными или твердыми границами сводится к нахождению периодических решений системы (1.12).

2. Модуляция поля тяжести. Перейдем теперь к рассмотрению другого способа параметрического воздействия на конвективную устойчивость. Пусть полость, заполненная жидкостью, совершает вертикальные гармонические колебания. В системе отсчета, связанной с полостью, в уравнениях движения необходимо ускорение силы тяжести g заменить на $g(1 + \eta \sin \omega_0 t)$ где $\eta = \omega_0^2 b_0/g$ — безразмерный параметр модуляции, b_0 — амплитуда смещения.

Сохраняя выбранные ранее единицы, запишем уравнения возмущений в безразмерном виде

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \Delta \mathbf{v} + R_f (1 + \eta \sin \Omega t) T \mathbf{y} \quad (2.1)$$

$$\sqrt{P} \frac{\partial T}{\partial t} - (\mathbf{v} \mathbf{y}) = \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

Параметры R_f , P и Ω определены ранее (1.4). Отличие системы (2.1), (2.2) от аналогичной системы (1.2), (1.3), получающейся в случае модуляции градиента температуры, состоит в том, что периодический множитель $(1 + \eta \sin \Omega t)$ теперь входит не в уравнение теплопроводности, а в уравнение движения — в виде коэффициента при подъемной силе. Точно таким же образом отличается система амплитудных уравнений для плоского слоя от соответствующей системы (1.6), (1.7). Подстановка (1.9) для случая слоя со свободными границами дает теперь систему для амплитуд $a(t)$ и $b(t)$

$$\frac{\kappa^2}{\sqrt{P}} a' + \kappa^4 a = k^2 R_f (1 + \eta \sin \Omega t) b, \quad \sqrt{P} b' + \kappa^2 b = a \quad (2.3)$$

Заменой

$$a = g_1, \quad b = l g_2, \quad t = m \tau \quad (2.4)$$

приведем систему (2.3) к виду

$$g_1' + n g_1 = R (1 + \eta \sin \omega \tau) g_2, \quad g_2' + \frac{1}{n} g_2 = g_1 \quad (2.5)$$

где все параметры, а именно l , m , n , ω и R определены, как и в случае модуляции градиента температуры, соотношениями (1.11) и (1.13).

В случае слоя с твердыми границами можно использовать в методе Канторовича прежние аппроксимации (1.17), (1.18) и привести заменой (2.4) систему амплитудных уравнений снова к виду (2.5) со значениями параметров, определенными соотношениями (1.19) и (1.20)

Легко видеть, что система (2.5) сводится к уравнению второго порядка, совпадающему с (1.14). Таким образом, задачи об устойчивости при модуляции поля тяжести и низкочастотной модуляции вертикального градиента температуры оказываются в сущности эквивалентными. Если известно решение одной из этих задач, то решение другой получается простым пересчетом параметров.

Задача о влиянии модуляции поля тяжести на конвективную устойчивость жидкости, заполняющей полость произвольной формы, при помощи метода Канторовича также может быть сведена к интегрированию системы обыкновенных уравнений первого порядка с периодическими коэффициентами. В качестве системы базисных координатных функций можно выбрать точные или приближенные собственные функции задачи об устойчивости при отсутствии модуляции.

Для примера рассмотрим задачу об устойчивости равновесия жидкости в вертикальном круговом цилиндре, совершающем гармонические колебания вдоль своей оси. Будем рассматривать возмущения следующей структуры:

$$v_r = v_\varphi = 0, \quad v_z = v(r, \varphi), \quad T = T(r, \varphi), \quad p = p(z) \quad (2.6)$$

Здесь r , φ , z — цилиндрические координаты. Из (2.1), (2.2) получим уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial z} + \Delta v + R_f (1 + \eta \sin \Omega t) T, \quad \sqrt{P} \frac{\partial T}{\partial t} - v = \Delta T \quad (2.7)$$

Здесь Δ — плоский оператор Лапласа в переменных r , φ .

На боковой границе цилиндра скорость обращается в нуль и выполняется условие теплоотдачи

$$v = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -bT \quad \text{при } r = 1 \quad (2.8)$$

Здесь b — число Био; в качестве единицы длины выбран радиус цилиндра. Конвективное движение предполагается замкнутым, что приводит к требованию равенства нулю расхода через сечение цилиндра.

Предполагая, как и в статическом случае, что основной уровень неустойчивости связан с антисимметричным течением, примем следующие аппроксимации для скорости и температуры:

$$v = a(t)J_1(\gamma r) \cos \varphi, \quad T = b(t)[J_1(\gamma r) - Cr] \cos \varphi \quad (2.9)$$

Здесь J_1 — функция Бесселя. Граничные условия (2.8) будут удовлетворены, если в качестве параметра γ выбрать нижний корень уравнения $J_1(\gamma) = 0$, т. е. $\gamma = 3.832$, и положить

$$C = \frac{\gamma J_1'(\gamma)}{b+1}$$

Получающаяся по методу Канторовича система уравнений для амплитуд $a(t)$ и $b(t)$ преобразованиями (2.4) снова сводится к канонической системе (2.5) при следующих значениях параметров¹:

$$l = \frac{1}{\gamma^2 n}, \quad m = \frac{n}{\gamma^2 \sqrt{P}}, \quad n = \left[\frac{b^2 + 6b + 5 + 0.5\gamma^2}{(b+1)(b+3)} P \right]^{1/2} \quad (2.10)$$

$$R = \frac{R_f}{R_0}, \quad R_0 = \gamma^4 \frac{b+1}{b+3}$$

3. Численное определение границ устойчивости. Определение областей устойчивости и неустойчивости системы (2.5) проводилось численно. Для этого методом Рунге — Кутты на ЭВМ находилась фундаментальная система решений $(g_1^{(1)}, g_2^{(1)})$ и $(g_1^{(2)}, g_2^{(2)})$, удовлетворяющих начальным условиям

$$g_i^{(k)}(0) = \delta_{ik} \quad (3.1)$$

При помощи фундаментальной системы можно найти «нормальное» решение, удовлетворяющее условию

$$g_i(T) = \rho g_i(0) \quad (3.2)$$

где T — период модуляции. Для фактора ρ обычным путем (см., например [8]) получается характеристическое уравнение

$$\rho^2 - \rho [g_1^{(1)}(T) + g_2^{(2)}(T)] + \exp[-(n + n^{-1})T] = 0 \quad (3.3)$$

Условие существования периодических решений получается из (3.3) при $\rho = \pm 1$

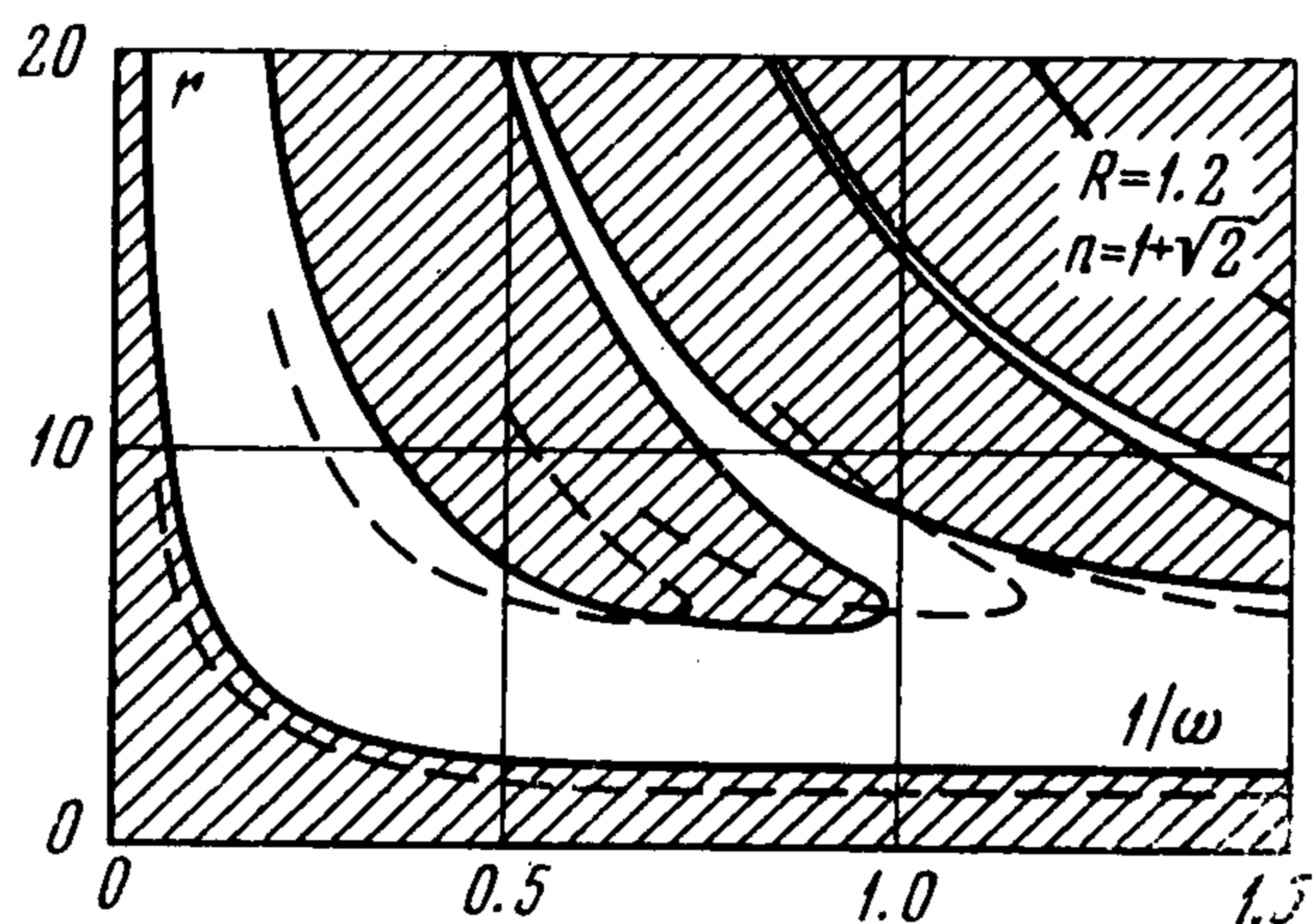
$$\pm [g_1^{(1)}(T) + g_2^{(2)}(T)] = 1 + \exp[-(n + n^{-1})T] \quad (3.4)$$

Знаки плюс и минус относятся соответственно к «целым» и «полуцелым» решениям.

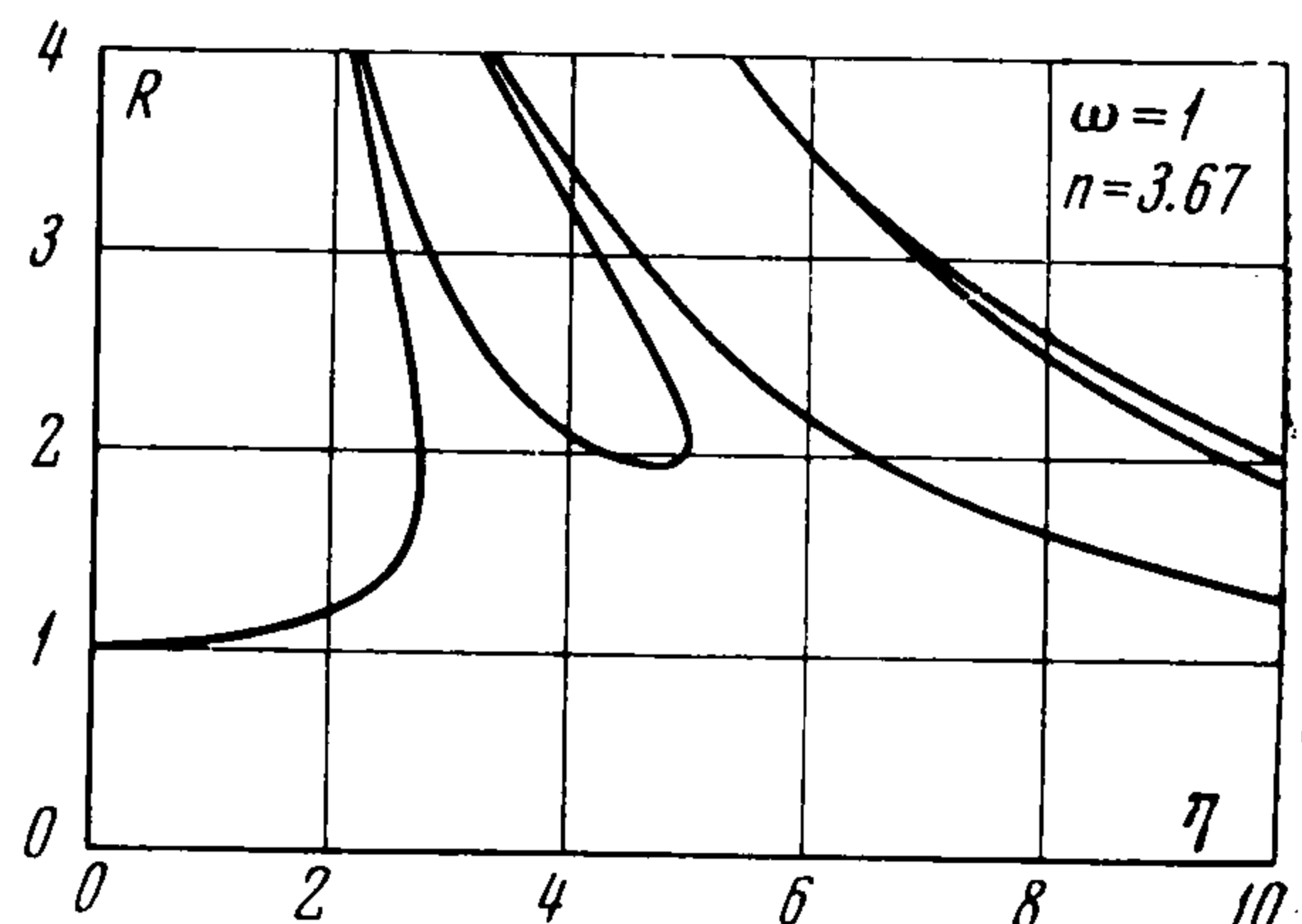
¹ Приближенное критическое значение R_0 для статического случая весьма близко к точному. Так, для $b = 0$ (теплоизолированная граница) и $b = \infty$ (идеально теплопроводная граница) из (2.10) получаем соответственно $R_0 = 71.9$ и $R_0 = 215.6$. Точные значения (см. [7]) таковы: 67.9 и 215.6.

Условие (3.4) связывает четыре параметра, входящие в систему (2.5), а именно: R , n , ω и η . При выполнении соотношения (3.4) система (2.5) имеет нетривиальное периодическое решение. Этим соотношением, таким образом, определяются границы областей устойчивости и неустойчивости. Для практического определения границы устойчивости можно, например, фиксировав три параметра и варьируя четвертый, добиваться выполнения (с заданной точностью) соотношения (3.4). Метод легко обобщается на систему произвольного числа уравнений.

Перейдем к изложению численных результатов. На фиг. 1 для примера представлена карта устойчивости, соответствующая фиксированным значениям $n = 1 + \sqrt{2}$ и $R = 1.2$. При $R > 1$ в статическом случае равновесие неустойчиво (напомним, что приведенное число Рэлея R определено как отношение критического числа при наличии



Фиг. 1



Фиг. 2

модуляции R_f к критическому числу в отсутствие модуляции R_0). Модуляция параметра приводит к тому, что при $R > 1$ и при определенных значениях амплитуды и частоты модуляции наступает стабилизация равновесия. На фиг. 1 изображены области устойчивости и неустойчивости в координатах (ω^{-1}, r) , где $r = R\eta$ — абсолютная безразмерная амплитуда модуляции (η — относительная амплитуда). На карте видна основная полоса неустойчивости, примыкающая к оси $r = 0$ (случай $r = 0$ соответствует отсутствию модуляции, и ось $r = 0$ принадлежит области неустойчивости). В области больших r располагаются резонансные области неустойчивости. Между основной полосой и резонансными областями находится полоса устойчивости (области неустойчивости на фигуре заштрихованы).

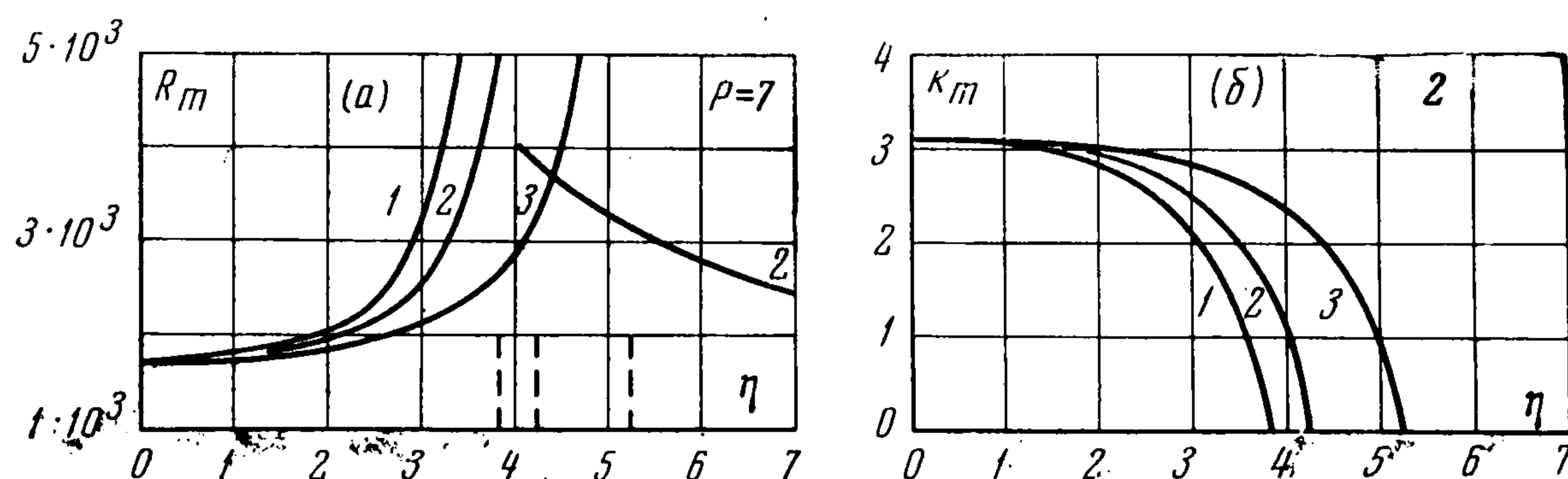
Таким образом, если при $R > 1$ увеличивать амплитуду модуляции, то можно стабилизировать равновесие. При дальнейшем увеличении амплитуды вновь наступает неустойчивость, связанная с областями резонансного параметрического возбуждения.

В основной полосе неустойчивости нарастают колебания целого типа, имеющие период, равный периоду модуляции. Крайняя левая резонансная область соответствует полуцелому нарастающему решению (период вдвое больше периода модуляции). Далее чередуются области целых и полуцелых решений.

Пунктиром на фиг. 1 изображены для сравнения границы областей устойчивости и неустойчивости для случая прямоугольной модуляции, найденные в работе [1]. Как видно, структура областей при синусоидальной и прямоугольной модуляции качественно одинакова. Количественные отличия, однако, довольно значительны.

На фиг. 2 и 3 приведены численные результаты, дающие представление о зависимости критического числа Рэлея от параметров модуляции. На фиг. 2 дана зависимость критического значения приведенного числа Рэлея от безразмерной амплитуды модуляции η при фиксированных ω и n ($\omega = 1$, $n = 3.67$). В пределах основной полосы неустойчивости число Рэлея возрастает с увеличением амплитуды η , т. е. имеет место стабилизация. При $\eta > 2.7$ (для указанных значений параметров ω и n) неустойчивость связана с резонансным параметрическим возбуждением, и в этой области зависимость R от η немонотонна.

Фиг. 3, а, б относится к горизонтальному слою с твердыми границами. В этом случае критическое число R_m должно быть найдено путем минимизации R_f по волновому числу k при прочих фиксированных параметрах. При фиксированных частоте и амплитуде модуляции от волнового числа зависят параметры R_0 , n и m (см. формулы (1.19), (1.20)), а следовательно, и R_f . Результаты минимизации представлены на фиг. 3 для значения числа Прандтля $P = 7$ (вода). Изображена зависимость минимального критического числа Рэлея R_m и критического волнового числа k_m от амплитуды η при нескольких значениях безразмерной частоты модуляции Ω (кривые 1—3 соответствуют значениям $\Omega = 10, 50, 100$; частота ω , входящая в исходную систему уравнений (2.5), при этом не остается постоянной вдоль каждой линии, так как она связана с Ω соотношением (1.13), где m — функция волнового числа).



Фиг. 3

Как видно из фиг. 3, а б, минимальное критическое значение возрастает с увеличением η и стремится к бесконечности при некотором предельном η_* , увеличивающемся с ростом частоты Ω . При приближении к границе основной полосы неустойчивости ($\eta \rightarrow \eta_*$) критическая длина волны растет ($k_m \rightarrow 0$).

За пределами основной полосы ($\eta > \eta_*$) зависимость $R_m(\eta)$ сложная. Она определяется минимизацией по k пороговых значений R_f на резонансных областях неустойчивости (см. фиг. 2). На фиг. 3 изображены участки кривых $R_m(\eta)$ и $k_m(\eta)$ для $\Omega = 50$. В области резонансных полос устойчивость с ростом η , в общем, понижается.

4. Предельный случай высоких частот. Численный метод позволяет получить границы устойчивости при произвольных значениях параметров системы (1.12) или (2.5). В предельном случае высоких частот, пользуясь методом усреднения [9], можно получить для границы устойчивости простую аналитическую формулу. Рассмотрение высокочастотного предела, строго говоря, физически оправдано лишь в случае вертикальных вибраций полости; высокочастотная модуляция градиента температуры неизбежно связана с возникновением температурного скин-слоя, не учитываемого при выводе системы (1.12).

В случае быстро модулируемого поля тяжести, следуя [9], представим решение уравнения (1.14) в виде суммы медленно изменяющейся со временем части f_0 и быстро осциллирующей малой добавки ξ

$$f(\tau) = f_0(\tau) + \xi(\tau) \quad (4.1)$$

Подставляя (4.1) в исходное уравнение (1.14) и удерживая главные члены, получим после интегрирования

$$\xi(\tau) = -R\eta\omega^{-2} f_0(\tau) \sin \omega\tau \quad (4.2)$$

(при интегрировании медленная часть f_0 считается постоянной). Возвращаясь к исходному уравнению и усредняя его по периоду модуляции $2\pi/\omega$, получим уравнение для $f_0(\tau)$

$$f_0'' + (n_+ + n_-^{-1}) f_0' + (1 - R + 1/2 R^2 \eta^2 \omega^{-2}) f_0 = 0 \quad (4.3)$$

Как видно, наличие высокочастотных вибраций в сущности эквивалентно перенормировке статического поля тяжести.

Из (4.3) определяется граница устойчивости ¹

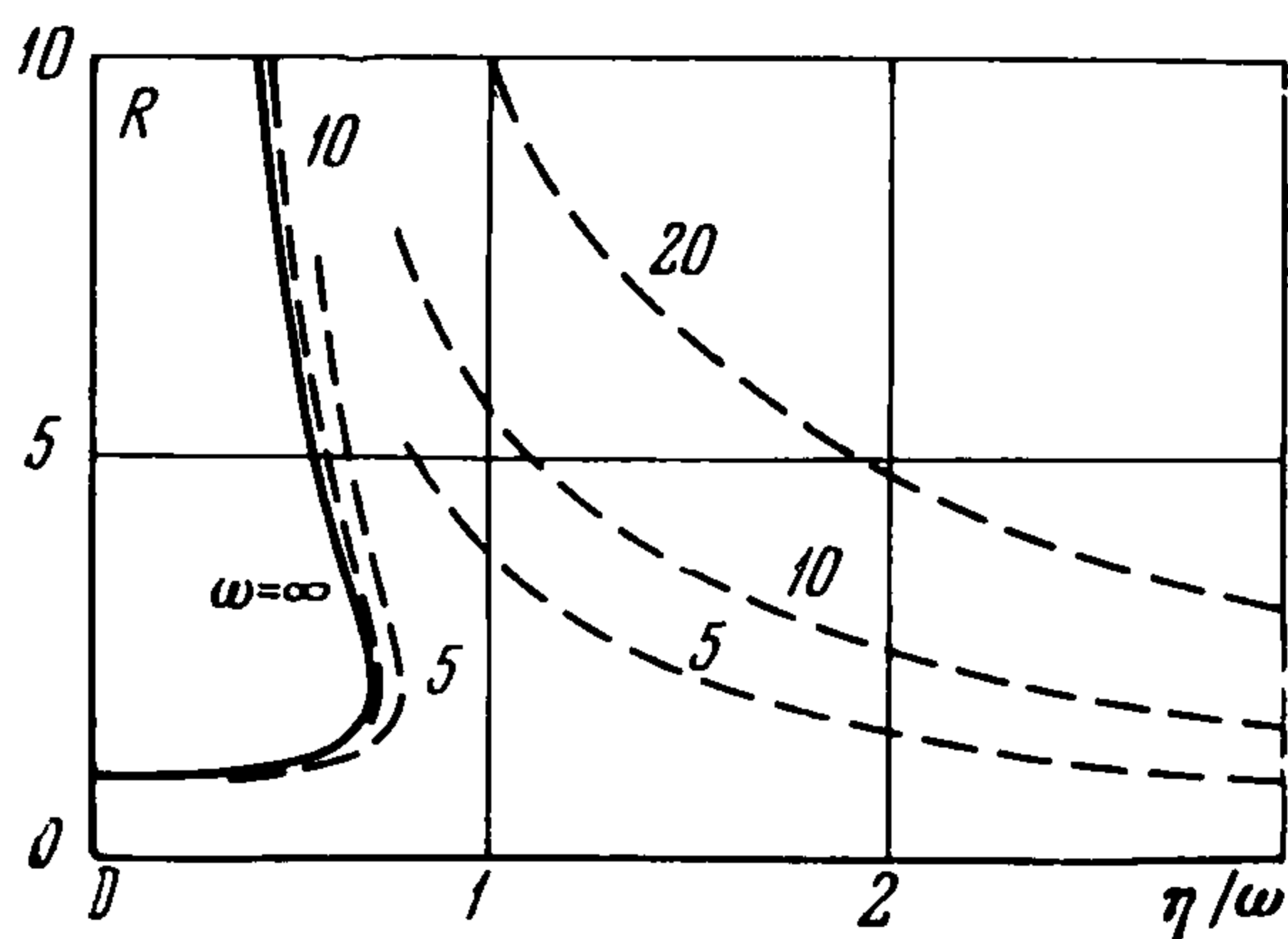
$$\frac{1}{2} R^2 \eta^2 \omega^{-2} = R - 1 \quad (4.4)$$

Таким образом, в предельном случае высоких частот критическое значение числа Рэлея R определяется единственным параметром — отношением η / ω .

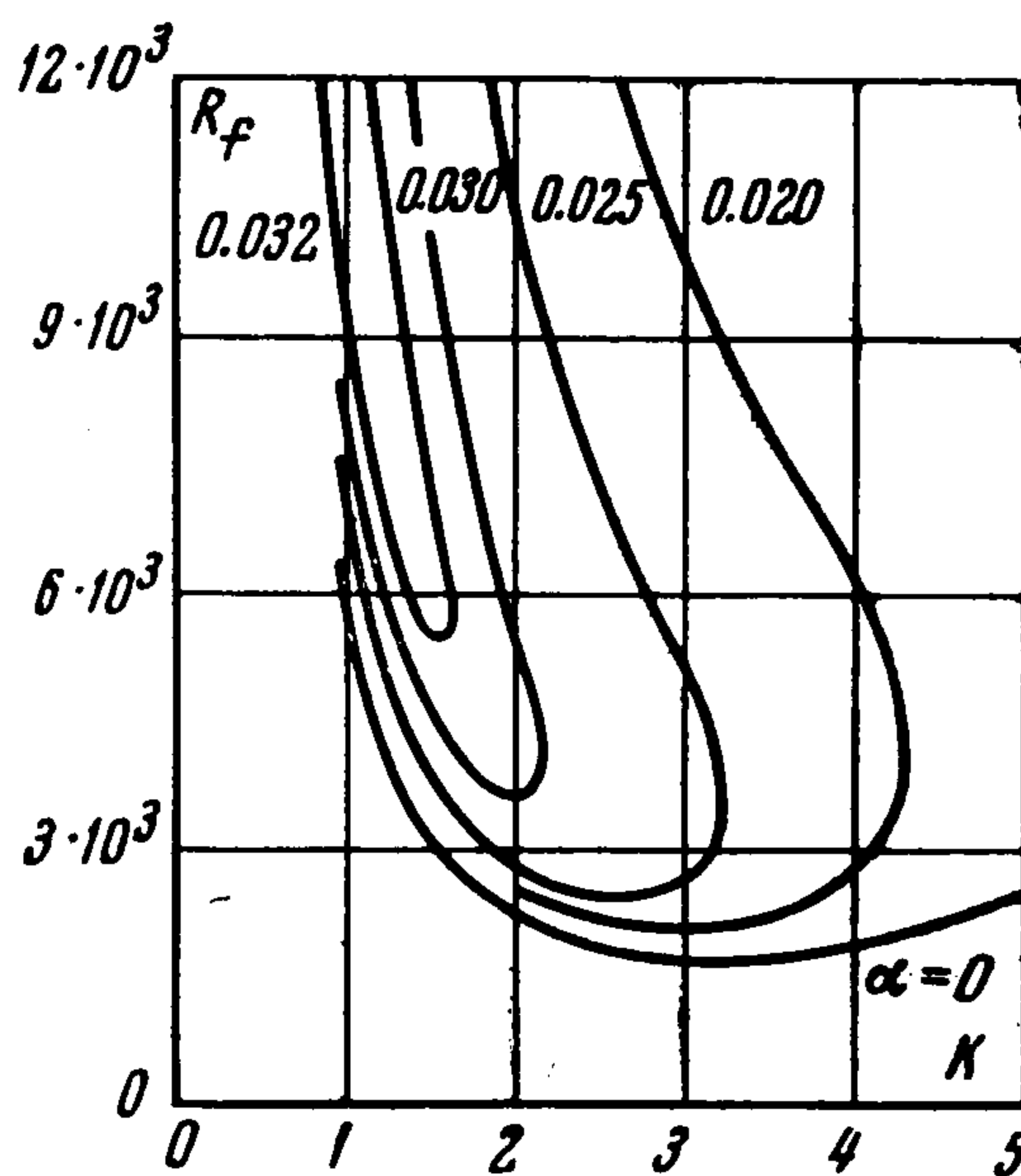
Для применимости метода усреднения необходимо, разумеется, чтобы период модуляции был мал по сравнению с характерным временем системы в отсутствие модуляции. При подогреве снизу это дает неравенство для безразмерной частоты

$$\omega \gg \sqrt{R - 1 + \varepsilon^2} - \varepsilon \quad (2\varepsilon = n + n^{-1}) \quad (4.5)$$

На фиг. 4 изображены границы устойчивости на плоскости параметров $R, \eta / \omega$. Сплошная кривая соответствует асимптотической формуле (4.4), полученной методом усреднения, штрихованными линиями изображены границы устойчивости, найденные путем численного решения системы (2.5) для различных значений ω при $n = 3.67$ (напомним, что при конечных ω положение нейтральных линий определяется не только отношением η / ω , но и отдельно параметрами ω и n). Из фиг. 4 видно, что при увеличении частоты нейтральные линии, ограничивающие основную область неустойчивости, довольно быстро сходятся к предельной линии, определяемой уравнением (4.4). Практически при $\omega > 10$ уже реализуется случай высоких частот. Необходимо, впрочем отметить, что кроме основной области неустойчивости при конечных значениях ω имеются еще резонансные области. На фиг. 4 изображена нижняя граница первой резонансной области, соответствующей полужелтому решению, для $\omega = 5, 10$ и 20 . С увеличением частоты эта граница повышается, вытесняясь на бесконечность, и в высокочастотном пределе остается лишь основная область неустойчивости.



Фиг. 4



Фиг. 5

Формула (4.4) имеет универсальный характер. При ее помощи можно определить границу основной полосы неустойчивости в предельном случае высоких частот для полости произвольной формы. Для перехода к конкретному случаю необходимо в (4.4) выделить параметры, зависящие от формы полости и условий подогрева. Для этого надо в (4.4) подставить $R = R_f / R_0$ и $\omega = mL^2 \omega_0 / \sqrt{\nu \chi}$, где R_0 — статическое число Рэ-

¹ Высокочастотный предел в случае прямоугольной модуляции получается из общего характеристического соотношения (2.7) работы [1]. Если ввести относительную амплитуду $\eta = r/R$, то формула (3.7) работы [1] запишется в виде

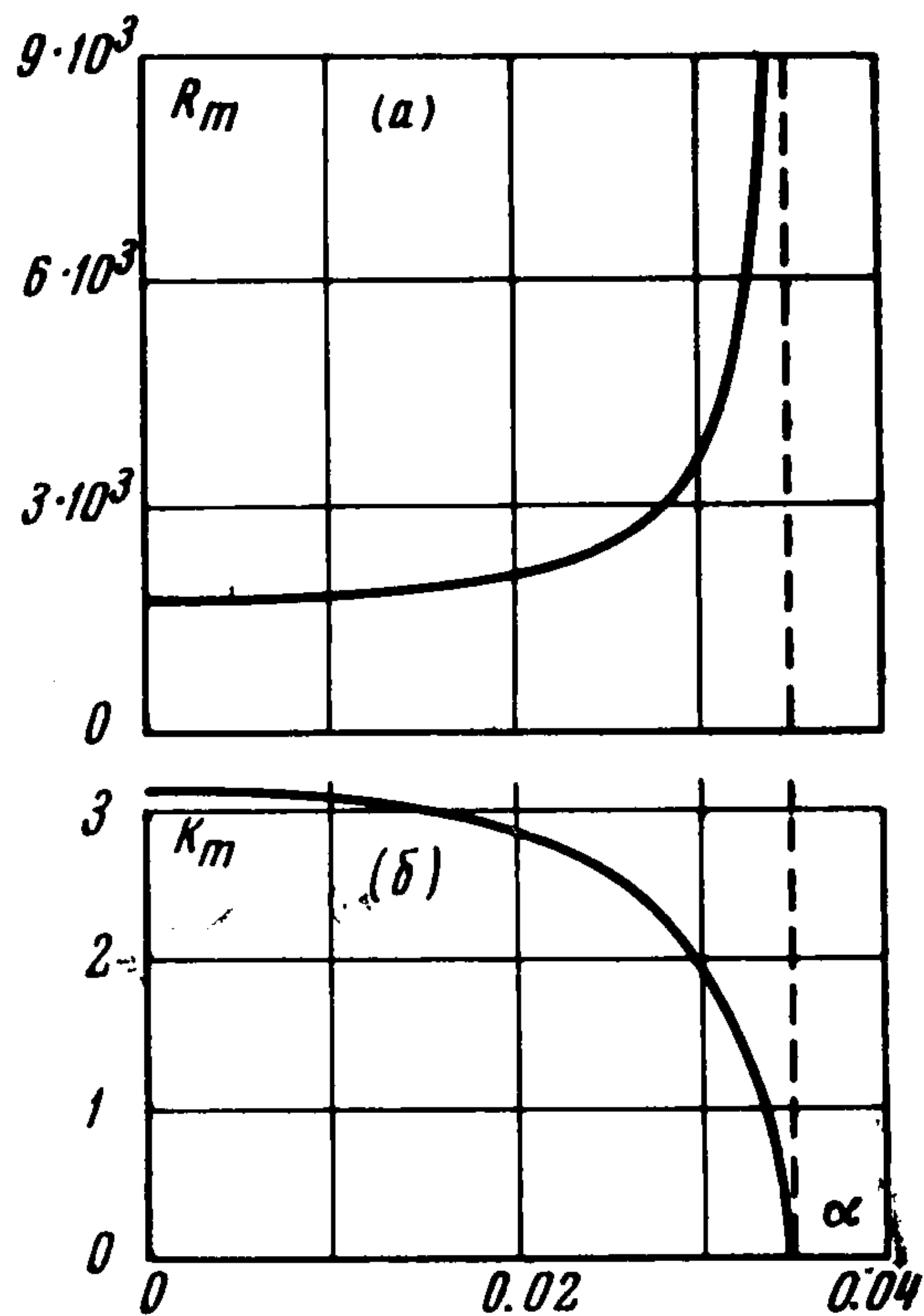
$$\frac{1}{12} \pi^2 R^2 \eta^2 \omega^{-2} = R - 1$$

Это соотношение отличается от (4.4) лишь численным фактором.

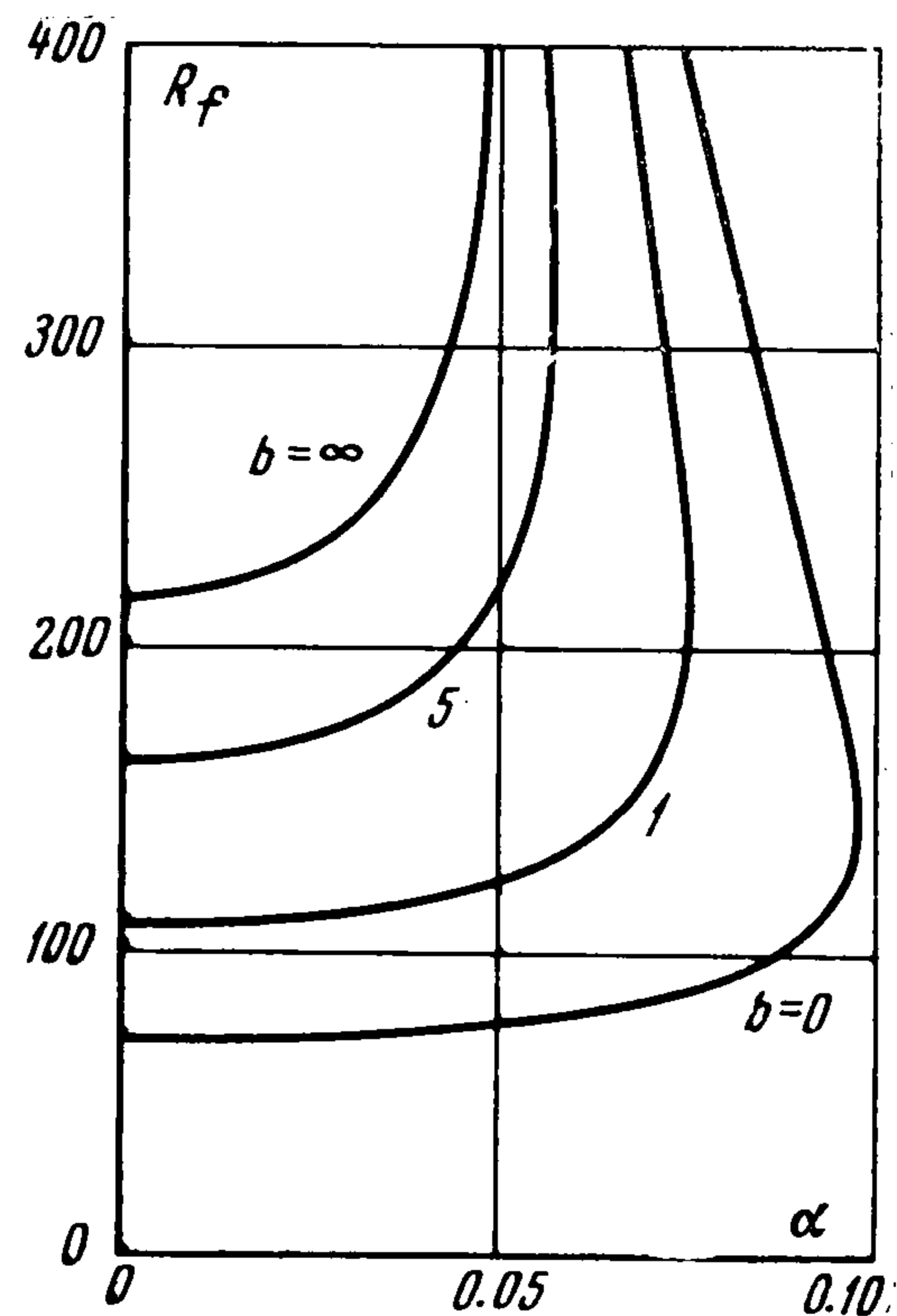
ля, ω_0 — размерная частота модуляции, а параметр m определяется для рассмотренных случаев соотношениями (1.11), (1.19), (2.10). После подстановки получим

$$R_f = \frac{m^2 R_0}{\alpha^2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{2\alpha^2}{m} \right)^{1/2} \right], \quad \alpha = \frac{\omega_0 b_0 \sqrt{\nu \chi}}{gL^2} \quad (4.6)$$

Здесь α — безразмерный параметр, определяющий влияние высокочастотных вибраций на критическое число Рэлея (ω_0 — частота, b_0 — амплитуда смещения). Из формулы видно, что при достижении параметром α значения $\alpha_* = m / \sqrt{2}$ наступает абсолютная стабилизация.



Фиг. 6



Фиг. 7

Приведем результаты для плоского горизонтального слоя, ограниченного твердыми изотермическими плоскостями, и для вертикального кругового цилиндра с общими условиями теплоотдачи.

В случае горизонтального слоя параметры R_0 и m зависят от волнового числа (см. (1.19), (1.20)). Формула (4.6) при этом определяет семейство нейтральных кривых $R_f = R_f(k)$, зависящее от параметра вибрации α (в качестве характерного размера в α входит толщина слоя h). Эти нейтральные кривые изображены на фиг. 5. С увеличением α минимальное критическое число R_m увеличивается, а критическое волновое число уменьшается. Зависимости $R_m(\alpha)$ и $k_m(\alpha)$ представлены на фиг. 6, а, б. При $\alpha \rightarrow \alpha_*$, где $\alpha_* = 0.0347$, наступает абсолютная стабилизация: если $\alpha > \alpha_*$, равновесие устойчиво при любых значениях вертикального градиента температуры. Подчеркнем, что речь идет о предельном случае высоких частот; при высоких, но конечных частотах имеются резонансные области неустойчивости и при $\alpha > \alpha_*$, но они расположены высоко (см. фиг. 4). Приведенные на фиг. 6 значения согласуются с результатами расчетов работы [4]. Введенный выше параметр вибрации α представляется более удобным, чем параметр μ работы [4], так как последний содержит градиент температуры.

В случае вертикального цилиндра параметры R_0 и m зависят от числа Био b (см. формулы (2.10)). Зависимость R_f от вибрационного параметра α для нескольких значений b представлена на фиг. 7 (параметр α определен через радиус цилиндра). Как видно, предельное значение α_* , соответствующее абсолютной стабилизации, зависит от b , уменьшаясь с ростом b . Таким образом, эффект стабилизации тем существеннее, чем сильнее теплоотдача от стенок цилиндра.

В заключение приведем некоторые численные оценки. Для полной стабилизации (в условиях высоких частот) необходимо, чтобы вибрационный параметр α достигал предельного значения α_* . Отсюда следует предельное значение вибрационной скорости:

$$\omega_0 b_0 = \alpha_* g L^2 (\nu \chi)^{-1/2} \quad (4.7)$$

Для получения существенного эффекта стабилизации при разумных с точки зрения эксперимента значениях вибрационной скорости следует работать с жидкостями, имеющими возможно большее значение параметра $\sqrt{\nu \chi}$ при достаточно малых характерных размерах L . Так, для плоского слоя воды ($\sqrt{\nu \chi} = 0.0038 \text{ см}^2/\text{сек}$) толщиной 2 мм из (4.7) получается необходимая для полной стабилизации вибрационная скорость $\omega_0 b_0 = 360 \text{ см/сек}$. Это значит, что при амплитуде смещения 2 мм стабилизация наступит при частоте около 250 гц. Эффект выражен гораздо сильнее в жидкостях с большим значением параметра $\sqrt{\nu \chi}$ (глицерин, оливковое масло, некоторые силиконовые жидкости).

Поступила 21 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. О параметрическом возбуждении конвективной неустойчивости. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
2. Гершун Г. З., Жуховицкий Е. М. О конвективной неустойчивости теплового скин-слоя. ПМТФ, 1965, № 6.
3. Зеньковская С. М., Симоненко И. Б. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
4. Зеньковская С. М. Исследование конвекции в слое жидкости при наличии вибрационных сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 1.
5. Venezian G. Effect of modulation on the onset of thermal convection. J. Fluid Mech., 1969, vol. 35, p. 2.
6. Бурдэ Г. И. Численное исследование конвекции, возникающей в модулированном поле внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 2.
7. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи, М., Гостехиздат, 1952.
8. Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика, изд. 2, т. 1. Механика, М., «Наука», 1965.