Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В. В. Румянцев

(Москва)

Рассматривается стабилизация устойчивого движения системы дополнительными силами при условии минимизации некоторого функционала, характеризующего качество управления [1]. Исследуется задача определения вида подынтегральной функции в критерии качества и управляющих воздействий определенного класса таким образом, чтобы известная для системы без управления функция Ляпунова могла служить оптимальной функцией Ляпунова для той же системы, но при действии на нее дополнительных управляющих сил. Эта задача близка к задаче обращения проблемы аналитического конструирования регуляторов [2]. Далее ставится задача об оптимальной стабилизации по части переменных [3] и доказывается теорема, обобщающая основную теорему об оптимальной стабилизации по всем переменным [1]. Обе задачи рассматриваются, в частности, применительно к механическим системам со знакоопределенным обобщенным интегралом энергии. Полученные результаты проиллюстрированы на нескольких примерах, в том числе дано решение задач об оптимальной стабилизации положений относительного равновесия и стационарных движений спутника-гиростата.

1. Рассмотрим уравнения возмущенного движения некоторой системы

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.1}$$

правые части X_s которых определены в области

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant H, \quad H = \mathrm{const} > 0 \quad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.2}$$

Будем предполагать, что функции X_s в области (1.2) непрерывны и удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решений уравнений (1.1) при любых начальных условиях из области (1.2), причем выполняются тождества

$$X_s(t, 0, \ldots, 0) \equiv 0 \quad (s = 1, \ldots, n)$$

Допустим, что для уравнений (1.1) существует непрерывная, однозначная и уничтожающаяся при $x_s = 0$ функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ — определенно-положительная и допускающая бесконечно малый высший предел, производная по времени от которой в силу уравнений (1.1)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s = W(t, x_1, \ldots, x_n)$$

является или определенно-отрицательной, или постоянно-отрицательной, или тождественно равной нулю функцией.

При этих условиях невозмущенное движение $x = 0$ будет устойчивым равномерно по времени t_0. Более того, в случае определенно-отрицательной функции $W(t, x)$ невозмущенное движение будет асимптотически устойчивым, как и в случае постоянно-отрицательной функции $W(x)$, если при этом правые части уравнений (1.1) не зависят явно от времени, а многообразие $W(x) = 0$ не содержит целых движений системы (1.1), кроме движения $x = 0$ [4].

Во многих случаях приложением к системе некоторых дополнительных сил вида $Y_s(t, x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_r)$, определенных в области (1.2), невозмущенное движение $x = 0$ стремятся сделать асимптотически устойчивым так, чтобы минимизировать интеграл

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x_1[t], \ldots, x_n[t]; u_1[t], \ldots, u_r[t])\, dt \tag{1.3}$$

характеризующий качество переходного процесса, для всех начальных условий из области

$$t \geqslant t_0, \quad |x_s| \leqslant H_1 < H \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.4}$$

Подынтегральная функция $\omega(t, x, u)$ в (1.3) представляет собой некоторую непрерывную неотрицательную функцию, определенную в области (1.2). Управляющие воздействия $u_j = u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$ должны быть определены и непрерывны в области (1.2) и удовлетворять равенствам

$$u_j(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (j = 1, \ldots r)$$

Предполагается также, что правые части системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + Y_s(t, x_1, \ldots x_n; u_1, \ldots, u_r) \tag{1.5}$$

удовлетворяют в области (1.2) условиям существования и единственности решений, причем $Y_s(t, 0, \ldots 0; 0, \ldots, 0) \equiv 0$.

Символы $u_j[t]$ означают величины управляющих воздействий $u_j[t] = u_j(t, x_1[t], \ldots$ $\ldots, x_n[t])$ в функции только от времени, которые реализуются в системе (1.5) при $u_j = u_j(t, x_1, \ldots, x_n)$, а символы $x_s[t]$ — те движения системы (1.5), которые порождаются управлением $u_j[t]$.

Решение этой задачи, т. е. определение управляющих воздействий $u_j = u_j^0(t, x)$, обеспечивающих асимптотическую устойчивость движения $x = 0$ в силу уравнений (1.5) и минимизирующих интеграл (1.3), может быть получено при помощи известной основной теоремы [1] об оптимальной стабилизации, представляющей собой модификацию теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости с учетом соображений метода динамического программирования Беллмана. Задача приводится, как известно, к разысканию оптимальной функции Ляпунова $V^\circ(t, x)$ и оптимальных управляющих воздействий $u_j^\circ(t, x)$; первая из них удовлетворяет уравнению в частных производных, которое надо решать с учетом одного дополнительного неравенства. В результате получается достаточно трудная задача [1].

В связи с этим поставим вопрос, при каком виде функции $\omega(t; x; u)$ в интеграле (1.3) известная для рассматриваемой системы без управления функция Ляпунова $V(t, x)$, решающая вопрос об устойчивости тривиального решения системы уравнений (1.1), может служить оптимальной функцией Ляпунова $V^\circ(t, x)$ для той же системы, но при приложении дополнительных управляющих сил $Y_s(t; x; u)$, когда уравнения возмущенного движения принимают вид (1.5)?

Этот вопрос близок, очевидно, к задаче обращения проблемы аналитического конструирования регуляторов, а также к проблеме выбора оптимизирующего функционала [2].

Для простоты ограничимся далее рассмотрением класса функций $\omega(t;\ x;\ u)$ следующей структуры:

$$\omega(t; x; u) = F(t, x_1, \ldots, x_n) + S, S = \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j \tag{1.6}$$

где $F(t,\ x)$ — подлежащая определению неотрицательная функция, S — заданная определенно-положительная квадратичная форма с симметричными коэффициентами $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ и дополнительных сил $Y_s(t;\ x;\ u)$, линейных относительно управляющих воздействий

$$Y_s(t; x; u) = \sum_{j=1}^{r} m_{sj}(t, x_1, \ldots, x_n) u_j \tag{1.7}$$

Найдем производную по времени от известной для системы (1.1) функции Ляпунова $V(t,\ x)$ в силу системы уравнений (1.5) при учете (1.7)

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(X_s + Y_s) = W(t, x) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^{r} m_{sj} u_j \tag{1.8}$$

и составим с учетом (1.6) выражение [1]

$$B[V; t, x; u] = W(t, x) + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^{r} m_{sj} u_j + F(t, x) + \sum_{ij=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j \tag{1.9}$$

которое, согласно условиям теоремы об оптимальной стабилизации, при $u_j = u_j^\circ$ достигает минимума, равного нулю. Оптимальные управляющие воздействия удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial B}{\partial u_j} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} m_{sj} + 2 \sum_{i=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ = 0 \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.10}$$

Решая уравнения (1.10), находим

$$u_j^\circ(t, x) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} m_{ik} \quad (j = 1, \ldots, r) \tag{1.11}$$

Здесь Δ_{kj} означает алгебраическое дополнение элемента β_{kj} определителя $\Delta = \| \beta_{ij} \| > 0$.

Так как члены, зависящие от u_j в выражении (1.9), можно представить с учетом (1.11) в виде

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} \sum_{j=1}^{r} m_{sj} u_j + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j = \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} (u_i - u_i^\circ)(u_j - u_j^\circ) - \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ$$

то очевидно, что минимум по u_j выражения $B[V;\ t,\ x;\ u]$ достигается при $u_j = u_j^\circ$.

Подставляя значения (1.11) вместо u_j в выражение (1.9) и приравнивая его нулю, получим уравнение

$$B\,[V;\ t,\ x;\ u^\circ] = 0$$

из которого находим функцию

$$F(t, x) = -W(t, x) + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ \tag{1.12}$$

Если функция $W(t,\ x)$ определенно-отрицательная, то функция $F(t,\ x)$ будет определенно-положительной, если же функция $W(t,\ x) \leqslant 0$, то функция $F(t,\ x)$ будет, вообще говоря, постоянно-положительной.

Из равенства (1.12) видно, что функция $F(t,\ x)$ зависит не только от данной функции Ляпунова $V(t,\ x)$ и ее производной $W(t,\ x)$, но и от коэффициентов формы S (1.6) и от элементов матрицы $\| m_{sj} \|$ дополнительных сил (1.7), т. е. не определяется однозначно по функциям V и W. Лишь в частном случае, когда коэффициенты m_{sj} таковы, что выполняются тождества

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} m_{ik} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, r) \tag{1.13}$$

функция

$$F(t,\ x) = -W(t,\ x) \tag{1.14}$$

В этом случае согласно формулам (1.11) управляющие воздействия

$$u_j^\circ(t,\ x) = 0 \qquad (j = 1,\ \ldots,\ r)$$

Таким образом, установлена структура функции $F(t,\ x)$, входящей в (1.6), так что критерий качества (1.3) принимает вид

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left(-W(t, x[t]) + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j \right) dt \tag{1.15}$$

Будучи определенно-положительной, функция (1.12) в критерии качества (1.3), (1.15) обеспечивает определенное затухание движений $x_s[t]$, причем решение задачи об оптимальной стабилизации оказывается достаточно простым и получается в замкнутой форме. Эти обстоятельства оправдывают [1] в известном смысле выбор класса (1.6), (1.7).

Производная по времени от $V(t,\ x)$ в силу системы уравнений (1.5) с учетом (1.7), (1.11), (1.15) будет равна

$$\frac{dV}{dt} = W(t, x) - 2 \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ \tag{1.16}$$

Оосительно знака функции $-dV/dt$ можно повторить все то, что сказано выше о знаке функции $F(t,\ x)$.

Следовательно, если функция $W(t, x)$ определенно-отрицательная, то управляющие воздействия (1.11) обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ в силу уравнений (1.5), как и в случае, когда функция $W(x)$ постоянно-отрицательна или тождественно равна нулю, а правые части уравнений (1.5) не зависят явно от времени, если при этом многообразие M точек, где

$$W(x) - 2\sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ = 0 \tag{1.17}$$

не содержит целых движений системы (1.5), кроме $x = 0$ [4]. В обоих этих случаях выполняется равенство

$$\int_{t_0}^{\infty}\Big(F(t, x^0[t]) + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ[t]\, u_j^\circ[t]\Big)dt = \min\int_{t_0}^{\infty}\Big(F(t, x[t]) + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i[t]\, u_j[t]\Big)dt = V(t_0, x(t_0)) \tag{1.18}$$

где функция $F(t, x)$ определяется уравнением (1.12).

Заметим, что результаты остаются справедливыми и в случае скалярного управления, когда

$$u_j = u \quad (j=1,\ldots,r), \qquad \sum_{j=1}^{r} m_{ij} = m_i, \qquad \sum \beta_{ij} = \beta > 0$$

При этом будем иметь лишь одно уравнение вида (1.10), из которого вместо (1.11) найдем

$$u^\circ = -\frac{1}{2\beta}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s} m_s \tag{1.19}$$

так что выражение (1.12) принимает вид

$$F(t, x) = -W(t, x) + \frac{1}{4\beta}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s} m_s\Big)^2$$

Критерий качества (1.15) записывается в форме

$$J = \int_{t_0}^{\infty}\Big[-W(t, x) + \frac{1}{4\beta}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s} m_s\Big)^2 + \beta u^2\Big]dt \tag{1.20}$$

а многообразие (1.17) — в виде

$$W(x) - \frac{1}{2\beta}\Big(\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s} m_s\Big)^2 = 0 \tag{1.21}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. Если для устойчивой системы (1.1) известна допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция V, то она будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (1.5), (1.7), оптимизируемой управляющими воздействиями (1.11) или (1.19) по функционалу (1.15) или (1.20) в случаях, когда функция W является определенно-отрицательной или когда функция $W \leqslant 0$, правые части системы (1.5) не зависят явно от времени, а многообразие (1.17) или (1.21) не содержит целых движений системы (1.5), кроме $x = 0$.

Следствие. Если найдется хотя бы одна ненулевая матрица, удовлетворяющая условию (1.13), то систему уравнений (1.1), для которой факт асимптотической устойчивости установлен при помощи некоторой функции Ляпунова V, можно трактовать как оптимальную, т. е. как результат решения проблемы аналитического конструирования для системы (1.5), (1.7), оптимизируемой по функционалу [2]

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left[-W(t, x) + \sum_{i, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j \right] dt$$

Отметим, что в случае, когда многообразие M, определяемое равенствами (1.17) или (1.21), содержит целые движения системы (1.5), помимо $x = 0$, управляющие воздействия (1.11) обеспечивают простую устойчивость движения $x = 0$ в силу уравнений (1.5), причем выполняется равенство

$$V(t_0, x(t_0)) = \int_{t_0}^{\infty} \left(F(t, x^\circ[t]) + \sum_{i, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ [t] \, u_j^\circ [t] \right) dt +$$

$$+ V(t, x^\circ[t])_{t=\infty} = \min \left(\int_{t_0}^{\infty} \left(F(t, x[t]) + \sum_{i, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i [t] \, u_j [t] \right) dt + V(t, x[t])_{t=\infty} \right)$$

Справедливость последнего устанавливается сравнением результатов интегрирования по времени t от 0 до ∞ уравнения (1.16) и неравенства

$$\frac{dV}{dt} \geqslant -F(t, x^*[t]) - \sum_{i, j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^* [t] \, u_j^* [t]$$

где $u^*_j(t, x)$ — какие-либо функции, также решающие задачу стабилизации движения $x = 0$ для уравнений (1.5) при начальных возмущениях из области (1.4) [1].

Пример 1.1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений [5]

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr} x_r$$

где непрерывные ограниченные функции $p_{sr}(t)$ таковы, что при всяком $t \geqslant t_0$

$$p_{sr} = -p_{rs} \ (r \neq s), \quad p_{ss} < -h = \text{const} < 0$$

Асимптотическая устойчивость движения $x = 0$ устанавливается согласно теореме Ляпунова построением функции

$$V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} x_s^2, \qquad \frac{dV}{dt} = W = \sum_{s=1}^{n} p_{ss} x_s^2$$

Функция V будет оптимальной для управляемой системы

$$\frac{dx_s}{dt} = \sum_{r=1}^{n} p_{sr} x_r + m_s u, \qquad J = \int_{t_0}^{\infty} \left(-\sum_{s=1}^{n} p_{ss} x_s^2 + \frac{1}{4\beta} \left(\sum_{s=1}^{n} m_s x_s \right)^2 + \beta u^2 \right) dt$$

где m_s — непрерывные ограниченные функции времени, $\beta = \text{const} > 0$, причем оптимальное управляющее воздействие

$$u^\circ = -{}^1/_2 \beta^{-1} (m_1 x_1 + \ldots + m_n x_n)$$

Заметим, в частности, что асимптотическая устойчивость для последней системы при $u = u^0$, когда $m_1 = m(t)$, $m_s = 0$ $(s = 2, \ldots, n)$ сохраняется и в случае когда для всякого $t \geqslant t_0$

$$p_{11} - {}^1/_2 m^2/\beta < -h, \quad p_{ss} < -h \ (s = 2, \ldots, n)$$

Пример 1.2. Рассмотрим задачу о стабилизации в поле центральной силы кругового движения материальной точки, управляемой реактивной силой. Эта задача в линейном приближении решена в [1]. Сохраняя обозначения работы [1], запишем уравнения возмущенного движения точки в виде

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\qquad \frac{dx_2}{dt}=-\frac{\mu}{(r_0+x_1)^2}+\frac{(\sqrt{\mu r_0}+x_3)^2}{(r_0+x_1)^3}+bu$$

$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{r_0+x_1}{r_0}u,\qquad b=\frac{c_r}{c_\varphi r_0}$$

Эти уравнения при $u=0$ имеют первые интегралы

$$V_1=x_2^2+\frac{(\sqrt{\mu r_0}+x_3)^2}{(r_0+x_1)^2}-\frac{2\mu}{r_0+x_1}+\frac{\mu}{r_0}=\mathrm{const},\qquad V_2=x_3=\mathrm{const}$$

из которых по методу Четаева строим определенно-положительную функцию Ляпунова

$$V=V_1-2\frac{\sqrt{\mu r_0}}{r_0^2}V_2+\lambda V_2^2,\qquad W=0\qquad \left(\lambda=\mathrm{const}>\frac{3}{r_0^2}\right)$$

Полагая в (1.3) функцию $\omega(x,u)=F(x)+\beta u^2$, найдем оптимальное управляющее воздействие

$$u^\circ=-\frac{1}{2\beta}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}b+\frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{r_0+x_1}{r_0}\right)=-\frac{1}{\beta}\left[bx_2+\left(\lambda+\frac{1}{r_0^2}\right)x_3-\frac{2\sqrt{\mu r_0}}{r_0^3}x_1+\ldots\right]$$

где многоточие означает члены второго и более высоких порядков малости, и функцию

$$F(x)=\frac{1}{4\beta}\left(\frac{\partial V}{\partial x_2}b+\frac{\partial V}{\partial x_3}\frac{r_0+x_1}{r_0}\right)^2$$

Нетрудно убедиться, что при $\lambda>3/r_0^2$ и $c_\varphi\neq 0$ многообразие (1.17) не содержит целых движений рассматриваемой управляемой системы.

2. Рассмотрим уравнения движения голономной механической системы в лагранжевых координатах

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^\cdot}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0\qquad (i=1,\ldots,n)\tag{2.1}$$

для которой точка $q_i=0$, $q_i^\cdot=0$ является положением равновесия, а функция Лагранжа не зависит явно от времени и имеет, вообще говоря, структуру $L(q,q^\cdot)=L_2+L_1+L_0$.

В этом случае уравнения (2.1) допускают (обобщенный) интеграл энергии

$$H=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_i^\cdot}q_i^\cdot-L=L_2-L_0=\mathrm{const}\tag{2.2}$$

Допустим, что в окрестности положения равновесия

$$|q_i|<h,\qquad |q_i^\cdot|<h,\qquad h=\mathrm{const}>0\qquad (i=1,\ldots,n)\tag{2.3}$$

функция $H(q,q^\cdot)$ — определенно-положительная. Тогда положение равновесия $q_i=q_i^\cdot=0$ системы устойчиво. Чтобы сделать это положение равновесия асимптотически устойчивым, приложим к системе дополнительные силы

$$Q_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij}(q_s)\, u_j(q_s, q_s^{\cdot}), \qquad u_j(0,0) = 0 \tag{2.4}$$

так что уравнения движения принимают вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{r} m_{ij} u_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

Производная по времени от функции H в силу системы (2.5) равна

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \text{[illegible]} \tag{2.6}$$

Если дополнительные силы (2.4) таковы, что

$$Q_1 q_1^{\cdot} + \ldots + Q_n q_n^{\cdot} \leqslant 0 \tag{2.7}$$

причем многообразие

$$Q_1 q_1^{\cdot} + \ldots + Q_n q^{\cdot}_n = 0 \tag{2.8}$$

не содержит целых движений системы (2.5), то положение равновесия становится асимптотически устойчивым [4].

Выясним, какие управляющие воздействия $u_j = u_j^0$ обеспечат асимптотическую стабилизацию положения равновесия при минимизации функционала

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \Bigl(F(q, q^{\cdot}) + \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i u_j\Bigr)\, dt \tag{2.9}$$

где $F(q, q^{\cdot})$ — подлежащая определению неотрицательная функция, а квадратичная форма — некоторая заданная определенно-положительная функция управляющих воздействий.

Используя результаты п. 1, запишем уравнения вида (1.10); в данном случае они имеют вид

$$\sum_{i=1}^{n} m_{ij} q_i^{\cdot} + 2 \sum_{i=1}^{r} \beta_{ij} u_j^{\circ} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

откуда находим

$$u_j^{\circ} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r} \frac{\Delta_{kj}}{\Delta} \sum_{i=1}^{n} m_{ik} q_i^{\cdot} \qquad (j = 1, \ldots, r) \tag{2.10}$$

т. е. управляющие воздействия представляют собою линейные функции обобщенных скоростей.

Подставляя эти значения вместо u_j в выражение вида (1.9) и приравнивая его нулю, получаем уравнение, позволяющее найти выражение для функции

$$F(q, q^{\cdot}) = \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^{\circ} u_j^{\circ} \tag{2.11}$$

представляющей собою квадратичную форму обобщенных скоростей.

Эта форма, определенно-положительная относительно u_i°, будет, вообще говоря, постоянно-положительной относительно обобщенных скоростей $q_i^\cdot$. Если же коэффициенты m_{ik} дополнительных сил (2.4) таковы, что в области (2.3) уравнения

$$\sum_{k=1}^{r} \Delta_{kj} \sum_{i=1}^{r} m_{ik} q_i^\cdot = 0 \qquad (j = 1, \ldots, r)$$

имеют только тривиальное решение $q_i^\cdot = 0$, то форма (2.11) будет определенно-положительной функцией $q_i^\cdot$.

Производная по времени от энергии системы H в силу уравнений (2.5) при $u_j = u_j^\circ$ равна

$$\frac{dH}{dt} = -2 \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ = -2F(q, q^\cdot)$$

где u_j° определены равенствами (2.10), причем, как легко видеть

$$Q_i^\circ = \sum_{j=1}^{r} m_{ij} u_j^\circ = -\frac{\partial F}{\partial q_i^\cdot}$$

так что квадратичную форму обобщенных скоростей $F(q, q^\cdot)$ можно рассматривать как диссипативную функцию Рэлея, а дополнительные силы Q_i° — принадлежащими к классу диссипативных сил. При этом диссипация будет полной или частичной в зависимости от того, будет ли функция (2.11) определенно-положительной функцией или постоянно-положительной функцией $q_i^\cdot$. В последнем случае многообразие (2.8) имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} u_i^\circ u_j^\circ = 0 \qquad (2.12)$$

Отметим, что в случае скалярного управления, когда $u_j = u$,

$$\sum_{j=1}^{r} m_{ij} = m_i, \qquad \sum_{i,j=1}^{r} \beta_{ij} = \beta > 0$$

вместо (2.10), (2.11) будем иметь [6,7]

$$u^\circ = -\frac{1}{2\beta} \sum_{i=1}^{n} m_i q_i^\cdot, \qquad F = \beta u^{\circ 2}$$

В частности, если система подвержена управлению только по первой координате, то $m_1 = m$, $m_s = 0$ $(s = 2, \ldots, n)$, так что

$$u^\circ = -\frac{m}{2\beta} q_1^\cdot, \qquad F = \frac{m^2}{4\beta} q_1^{\cdot 2}$$

и функционал (2.9) принимает вид

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left(\frac{m^2}{4\beta} q_1^{\cdot 2} + \beta u^2 \right) dt$$

Сформулируем результат.

Если для системы (2.1) энергия H (2.2) есть определенно-положительная функция обобщенных координат и скоростей, то она будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (2.5), оптимизируемой управляющими воздействиями (2.10) по функционалу (2.9), (2.11), при условии, что многообразие (2.12) не содержит целых движений системы (2.5), кроме $q_i = q_i^\bullet = 0$.

Этот результат представляет собою некоторое дополнение к результатам [6,7]. Заметим, что условия стабилизации диссипативными силами исследованы в работах [5,8].

Пример 2.1. Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации положений относительного равновесия трехосного спутника-гиростата [9] в орбитальной системе координат, равномерно вращающейся вокруг оси y с кеплеровой угловой скоростью ω_0.

Рассмотрим какое-либо устойчивое положение относительного равновесия, для которого обобщенные координаты q_i $(i = 1, 2, 3)$, определяющие положение корпуса спутника в орбитальной системе координат, имеют значения $q_i = q_{i0}$, и в окрестности которого энергия H — определенно-положительная функция q_i, $q_i^\bullet$. Оптимизируемый функционал (2.9) возьмем в форме

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \left(F(q, q^\bullet) + \sum_{i=1}^{3} \beta_i u_i^2\right) dt$$

где $\beta_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$, предполагая, что коэффициенты при управляющих воздействиях в выражениях (2.4) удовлетворяют условиям

$$m_{ii} = m_i, \qquad m_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)$$

Согласно формулам (2.10) и (2.11) найдем

$$u_i^\circ = -\frac{m_i}{2\beta_i} q_i^\bullet \quad (i = 1, 2, 3), \qquad F(q, q_i^\bullet) = \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i^2}{4\beta_i} q_i^{\bullet 2}$$

Такие управляющие воздействия представляют собою диссипативные силы с полной диссипацией, они обеспечивают оптимальную стабилизацию устойчивого относительного равновесия спутника, в окрестности которого функция H определенно-положительна, т. е. для любой точки области выполнения достаточных условий устойчивости. В то же время такие силы разрушают устойчивость, достигаемую за счет гироскопических сил [5,6].

В ряде случаев возможна оптимальная стабилизация положений равновесия спутника и силами с частичной диссипацией. Для определенности рассмотрим положение относительного равновесия, в котором главные оси инерции спутника x_1, x_2, x_3 совпадают соответственно с осями z, $-x$, $-y$ орбитальной системы координат, причем постоянный гиростатический момент роторов $\mathbf{k}$ направлен по оси x_3. Положение спутника в орбитальной системе будем определять углами Эйлера θ, ψ, φ, которые для рассматриваемого положения равновесия имеют значения $\theta_0 = {}^1/_2\pi$, $\psi_0 = 0$, $\varphi_0 = {}^1/_2\pi$. Достаточные условия устойчивости положения относительного равновесия спутника по отношению к углам Эйлера и производным по времени от них легко получаются при помощи теоремы Лагранжа и имеют следующий вид:

$$C - k/\omega_0 > B > A, \qquad C - {}^1/_4 k/\omega_0 > A$$

где A, B, C означают главные центральные моменты инерции гиростата.

Рассмотрим случай управляющих сил с частичной диссипацией, когда или $m_1 = 0$ или $m_2 = 0$ и соответственно $\beta_1 = 0$ или $\beta_2 = 0$, но $m_3 \neq 0$, $\beta_3 \neq 0$.

Из уравнений в вариациях для возмущенного движения

$$B\xi_1^{\cdot\cdot} + \left(A + B - C + \frac{k}{\omega_0}\right)\omega_0\xi_2^{\cdot} + \left(4(C - A) - \frac{k}{\omega_0}\right)\omega_0^2\xi_1 = -\frac{m_1^2}{2\beta_1}\xi_1^{\cdot}$$

$$A\xi_2^{\cdot\cdot} - \left(A + B - C + \frac{k}{\omega_0}\right)\omega_0\xi_1^{\cdot} + \left(C - B - \frac{k}{\omega_0}\right)\omega_0^2\xi_2 = -\frac{m_2^2}{2\beta_2}\xi_2^{\cdot}$$

$$C\xi_3^{\cdot\cdot} + 3\omega_0^2(B - A)\xi_3 = -\frac{m_3^2}{2\beta_3}\xi_3^{\cdot}$$

где ξ_i означают вариации углов θ, ψ, φ, видно, что оптимальная стабилизация устойчивого относительного равновесия обеспечивается как в случае $m_1 = 0$ ($m_2 \neq 0$, $m_3 \neq 0$), так и в случае $m_2 = 0$ ($m_1 \neq 0$, $m_3 \neq 0$), если

$$A + B - C + k/\omega_0 \neq 0$$

3. Рассмотрим задачу об оптимальной стабилизации движения некоторой системы по отношению к части переменных $x_1, \ldots, x_k$, а не ко всем переменным $x_1, \ldots, x_n$, характеризующим систему. Такая задача представляет интерес во многих прикладных проблемах подобно задаче об устойчивости движения по отношению к части переменных [3].

Уравнения возмущенного движения управляемой системы запишем для краткости в векторной форме

$$dx\,/\,dt = X(t,\ x,\ u) \tag{3.1}$$

где $x = (y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_m)$ — вещественный n-вектор состояния системы, причем $n = k + m$, $k > 0$, $m \geqslant 0$, $u = (u_1, \ldots, u_r)$ — вещественный r-вектор управления, $r > 0$. Предполагается, что вещественная n-вектор-функция $X(t, x, u)$ определена и непрерывна в области

$$t \geqslant t_0,\quad |y_i| \leqslant H,\quad z_j \text{ — произвольны} \tag{3.2}$$

для всех возможных значений вектора управления u, разыскиваемого в виде r-вектор-функции $u(t, y, z)$, которая должна быть определена и непрерывна в области (3.2). Будем предполагать, что вектор-функции X и u удовлетворяют условиям, обеспечивающим существование и единственность решений уравнения (3.1) при любых начальных условиях из области (3.2), причем каждое решение этого уравнения z-продолжимо, иначе говоря, любая z-компонента решения уравнения (3.1) не перестает быть определенной пока $|y_s| \leqslant H$. Предполагается также, что выполняются тождества

$$X(t,\ 0,\ 0) = 0,\ u(t,\ 0,\ 0) = 0$$

т.е. уравнение (3.1) имеет решение $x = 0$. Критерий качества управления выразим в форме условия минимальности интеграла

$$J = \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x[t], u[t])\,dt \tag{3.3}$$

где $\omega(t, x, u)$ — некоторая неотрицательная скалярная функция, определенная в области (3.2).

Для системы (3.1) можно поставить задачи о стабилизации и об оптимальной стабилизации по отношению к части переменных, обобщающие соответствующие задачи [1] для всех переменных.

Сформулируем задачу об оптимальной стабилизации по отношению к части переменных.

Требуется найти вектор управляющих воздействий $u^\circ(t, x)$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ по отношению к y — составляющей вектора x (y-асимптотическую устойчивость) в силу уравнения (3.1) (при $u = u^\circ(t, x)$). При этом каков бы ни был другой вектор управляющих воздействий $u^*(t, x)$, обеспечивающий y-асимптотическую устойчивость движения $x = 0$, должно выполнятся неравенство

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x^\circ[t]; u^\circ[t])\, dt \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega(t, x^*[t], u^*[t])\, dt \tag{3.4}$$

для всех начальных условий t_0, $x(t_0)$ из области

$$t \geqslant 0, \qquad |x_s(t_0)| \leqslant \lambda \tag{3.5}$$

где положительная постоянная λ или задана заранее по условиям задачи, или имеет тот же смысл, что и в доказательстве теоремы об устойчивости по отношению к части переменных [3].

Заметим, что по смыслу задачи об y-оптимальной стабилизации целесообразно функцию ω в (3.3) и вектор управления определять не зависящими от z-компоненты вектора x, однако в ряде случаев они могут зависеть и от z-компоненты, в связи с чем выше дана общая формулировка задачи.

Напомним некоторые определения. Знакопостоянная функция $V(t, x)$ называется y-определенно-положительной, если существует не зависящая от времени определенно-положительная функция $W(y)$ такая, что в области (1.2) разность $V - W \geqslant 0$.

Ограниченная в области (1.2) функция $V(t, x)$ допускает бесконечно малый высший предел по y, если для всякого положительного числа l, как бы мало оно ни было выбрано, найдется число $\lambda > 0$ такое, что при $t \geqslant t_0$, $|y_i| \leqslant \lambda$, z_j — произвольных выполняется неравенство $|V| \leqslant l$. Если последнее неравенство выполняется при $t \geqslant t_0$, $|x_i| \leqslant \lambda$, то говорят, что функция V допускает бесконечно малый высший предел (по всем переменным).

Как и в случае устойчивости по всем переменным, известно несколько формулировок теоремы об асимптотической устойчивости по отношению к части переменных, в связи с чем можно предложить различные варианты теоремы об оптимальной стабилизации по отношению к части переменных. Ограничимся двумя [1] [3,10].

---

[1] Пользуясь случаем, внесем уточнение в формулировку [3] теоремы 2: по смыслу доказательства [3] функция $V(t, x_1,\ldots, x_n)$ должна допускать бесконечно малый высший предел по $x_1,\ldots, x_m$. Отметим, что подобное доказательство проходит и в случае, когда $V(t, x_1,\ldots, x_n)$ допускает бесконечно малый высший предел по $x_1,\ldots, x_k$, если $V^\cdot$ — знакоопределенная функция по переменным $x_1,\ldots, x_k$ $(m \leqslant k \leqslant n)$.

Теорема 3.1 (Об y-оптимальной стабилизации.). Если для дифференциальных уравнений возмущенного движения (3.1) можно найти y-определенно-положительную функцию $V^\circ(t, x)$, допускающую бесконечно малый высший предел по y (по всем переменным x), и вектор-функциию $u^\circ(t, x)$, удовлетворяющие в области (3.2) условиям:

1) функция

$$w(t, x) = \omega(t; x; u^\circ(t, x))$$

является определенно-положительной по y (по всем переменным);

2) справедливо равенство

$$B[V^\circ;\ t;\ x;\ u^\circ(t, x)] = 0 \tag{3.6}$$

3) каковы бы ни были числа u_j справедливо неравенство

$$B[V^\circ;\ t;\ x;\ u] \geqslant 0 \tag{3.7}$$

то вектор-функция $u^\circ(t, x)$ разрешает задачу об y-оптимальной стабилизации. При этом выполняется равенство

$$\int_{t_0}^{\infty} \omega(t; x^\circ[t]; u^\circ[t])\, dt = \min \int_{t_0}^{\infty} \omega(t; x[t]; u[t])\, dt = V^\circ(t_0, x(t_0)) \tag{3.8}$$

Доказательство. При $u = u^\circ(t, x)$ выполнены все условия теоремы [3] об устойчивости по y, т. е. $|y_i| < A$ при $t \geqslant t_0$, если $|x_{s0}| \leqslant \lambda$. Здесь $0 < A < H$ — произвольное число, $\lambda > 0$ — число, определяющее область $|x_s| \leqslant \lambda$, в которую не проникает ни одна точка поверхности $V^\circ(t_0, x) = l$, где l — точная низшая граница функции $W(y)$ при условии $\|y\| = A$.

Нетрудно видеть, что для любых начальных значений x_{s0}, лежащих в области

$$|x_{s0}| \leqslant \lambda, \ \lim V^\circ(t, x[t]) = 0, \ t \to \infty$$

Действительно, функция $V(t, x[t])$ как монотонная невозрастающая функция при $t \to \infty$ стремится к некоторому пределу e, $V^\circ \geqslant e$. Допустим, что $e > 0$. Тогда по свойству функции V°, допускающей бесконечно малый высший предел по y (по x), существовало бы такое число ε, определяющее область $|y| \leqslant \varepsilon$ ($|x| \leqslant \varepsilon$), для точек которой значения V были бы меньше e. При этом значения переменных y_s (x_i) лежали бы где-либо в области

$$\varepsilon \leqslant |y| \leqslant A \qquad (\varepsilon \leqslant |x|)$$

Обозначим через $l' > 0$ точный низший предел функции $- dV^\circ/dt$ в этой области, тогда для любого $t \geqslant t_0$ значения функции V° в этой области будут удовлетворять условию $dV^\circ/dt \leqslant -l'$. Из уравнения

$$V^\circ - V_0^\circ = \int_{t_0}^{t} \frac{dV^\circ}{dt}\, dt$$

выводим тогда

$$V^\circ \leqslant V_0^\circ - l'(t - t_0)$$

а это невозможно, так как левая часть неравенства—определенно-положительная по y функция, а правая при достаточно большом t становится отрицательной. Следовательно, $e = 0$, т. е. $\lim y = 0$ при $t \to \infty$. Тем самым доказано, что управляющие воздействия $u^\circ(t, x)$ обеспечивают асимптотическую устойчивость по y движения $x = 0$. Проверим теперь выполнение соотношения (3.8), следуя [1]. Интегрируя вдоль движения $x^\circ[t]$

в пределах от t_0 до ∞ равенство

$$dV^\circ/dt = -\omega\,(t,\ x,\ u^\circ)$$

вытекающее из условия (3.6), и учитывая, что

$$\lim V^\circ\,(t,\ x^\circ\,[t]) = 0 \text{ при } t \to \infty$$

получим

$$V^\circ\,(t_0,\ x\,(t_0)) = \int_{t_0}^{\infty} \omega\,(t;\ x^\circ\,[t];\ u^\circ\,[t])\,dt \tag{3.9}$$

С другой стороны, пусть $u^*\,(t,x)$— какое-либо управление, также обеспечивающее стабилизацию по y движения $x = 0$ для начальных возмущений из области $|x_{s0}| \leqslant \lambda$. Тогда вследствие (3.7) будем иметь неравенство

$$dV^\circ/dt \geqslant -\omega\,(t,\ x^*\,[t];\ \ u^*\,[t])\,dt$$

Интегрируя это неравенство по времени от t_0 до ∞ и снова учитывая предельное соотношение для V^0, получим

$$V^\circ\,(t_0,\ x\,(t_0)) \leqslant \int_{t_0}^{\infty} \omega\,(t;\ x^*\,[t];\ u^*\,[t])\,dt$$

Сравнивая это неравенство с равенством (3.9), приходим к выводу о справедливости условия (3.8). Теорема доказана.

Замечание 3.1. 1) теорема остается справедливой и при управляющих воздействиях $u = u\,(t)$, а также в случае, когда управляющие воздействия стеснены некоторыми дополнительными неравенствами $|\,u\,| \leqslant a$. В последнем случае надо лишь потребовать, чтобы условие (3.7) выполнялось при всех значениях u, стесненных заданными ограничениями [1]; 2) теорема переносится и на задачу оптимальной по y стабилизации в целом, если потребовать выполнение условий (3.6) и (3.7) при всех y_i $(-\infty < y_i < \infty)$ и если $V^\circ\,(t,\ x) \to \infty$ при $y \to \infty$.

4. Обратимся снов к уравнениям движения (2.1) голономной механической системы. Допустим, что координаты q_α $(\alpha = k + 1, \dots n)$ будут циклическими, т. е

$$\partial L \quad \partial q_\alpha = 0 \qquad (\alpha = k+1, \dots, n)$$

Тогда уравнения (2.1) допускают первые интегралы

$$p_\alpha = \partial L/\partial q_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = c_\alpha \qquad (\alpha = k+1, \dots, n) \tag{4.1}$$

Пусть при некоторых фиксированных значениях постоянных $c_\alpha = c_\alpha^\circ$ уравнения (2.1) имеют частное решение

$$q_j = 0, \quad q_j^{\boldsymbol\cdot} = 0 \quad (j = 1, \dots, k), \qquad q_\alpha^{\boldsymbol\cdot} = \omega_\alpha = \text{const} \tag{4.2}$$

описывающее стационарное движение. Как известно, последнее может быть устойчивым лишь по отношению к переменным q_j, $q_j^{\boldsymbol\cdot}$; $q_\alpha^{\boldsymbol\cdot}$; по отношению к переменным q_α оно неустойчиво. Игнорируя циклические координаты по методу Рауса, введем в рассмотрение функцию Рауса

$$R\,(q_j,\ q_j^{\boldsymbol\cdot},\ c_\alpha) = L - \sum_{\alpha=k+1}^{n} q_\alpha^{\boldsymbol\cdot} c_\alpha$$

и запишем уравнения движения в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, \ldots, k) \tag{4.3}$$

представляющих собою уравнения Лагранжа для приведенной системы.

Для стационарного движения (4.2) уравнения (4.3) представляют собою уравнения возмущенного движения; после их интеграции циклические координаты q_α находятся квадратурами. Допустим, что функция R не зависит явно от времени, тогда уравнения (4.3) имеют интеграл энергии

$$H = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial R}{\partial q_j^{\cdot}} q_j^{\cdot} - R = R_2 - R_0 = \text{const} \tag{4.4}$$

Если функция H — определенно-положительная функция переменных q_j, $q_j^{\cdot}$, то движение (4.2) устойчиво по отношению к этим переменным, а также к p_α и, следовательно, по отношению к $q_\alpha^{\cdot}$. Приложим теперь к системе управляющие силы

$$Q_j = m_{j1}u_1 + \ldots + m_{jr}u_r \tag{4.5}$$

вследствие чего уравнения возмущенного движения примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\cdot}} = c_\alpha \tag{4.6}$$

или, что то же самое, вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial q_j^{\cdot}} - \frac{\partial R}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^{r} m_{js}u_s \qquad (j = 1, \ldots, k) \tag{4.7}$$

аналогичный виду уравнений (2.5). Вводя в рассмотрение интеграл вида (2.9) и повторяя рассуждения п.2, приходим к выводу о справедливости результата п.2. для приведенной системы (4.7), (2.9). Но оптимальная стабилизация приведенной системы по переменным q_j, $q_j^{\cdot}$ означает оптимальную стабилизацию исходной системы (4.6), (2.9) по части переменных.

Следовательно, справедлива теорема.

Теорема 4.1. Если функция H (4.4) определенно-положительная функция позиционных координат и скоростей, то она будет оптимальной функцией Ляпунова для системы (4.6), оптимизируемой по переменным q_j, $q_j^{\cdot}$ управляющими воздействиями (2.10) по функционалу (2.9), (2.11), при условии, что многообразие (2.12) не содержит целых движений системы (4.7).

Замечание 4.1. Так как $H = R_2(q_i, q_j^{\cdot}) + W(q_j, c_\alpha)$, где $R_2(q_j, q_j^{\cdot})$ — знакоопределенная по $q_j^{\cdot}$ функция, то H будет знакоопределенной, если функция $W(q_j, c_\alpha) = -R_0$ будет определенно-положительной по q_j, т. е. имеющей минимум при $q_j = 0$.

Пример 4.1. Рассмотрим в ограниченной постановке задачу об оптимальной стабилизации положения равновесия в орбитальной системе координат оси симметрии симметричного спутника-гиростата, вращающегося вокруг оси симметрии с некоторой угловой скоростью [9]. Положение корпуса гиростата в орбитальной системе будем определять углами Эйлера θ, ψ, φ; предположим, что гиростатический момент направлен коллинеарно оси симметрии спутника. Угол собственного вращения φ будет при этом циклической координатой, игнорируя которую, получим функцию Рауса

$$R(\theta, \psi, \theta^{\cdot}, \psi^{\cdot}, c) = {}^1/_2 A [\theta^{\cdot 2} + \psi^{\cdot 2}\sin^2\theta + 2\omega_0(\psi^{\cdot}\sin\theta\cos\theta\cos\psi + \theta^{\cdot}\sin\psi)] + \\ + c\psi^{\cdot}\cos\theta - {}^3/_2\,\omega_0^2(C - A)\cos^2\theta - {}^1/_2 A\omega_0^2\sin^2\theta\cos^2\psi - \\ - c\omega_0\sin\theta\cos\psi - {}^1/_2(c-k)^2/C \tag{4.8}$$

где c — постоянная циклического интеграла

$$C(\varphi^{\cdot} + \psi^{\cdot}\cos\theta - \omega_0\sin\theta\cos\psi) + k = c$$

Уравнения движения допускают решения

$$\theta = \theta_0,\ \psi = \psi_0,\ \theta^{\cdot} = \psi^{\cdot} = 0 \tag{4.9}$$

подразделяющиеся на следующие три семейства:

$$\theta_0 = {}^1/_2\pi, \qquad \psi_0 = \pi \tag{4.10}$$

$$\theta_0 = {}^1/_2\pi, \qquad \cos\psi_0 = -c/A\,\omega_0 \tag{4.11}$$

$$\sin\theta_0 = c/(4A - 3C)\,\omega_0^{-1},\ \psi_0 = \pi \tag{4.12}$$

Решения (4.9) описывают стационарные движения спутника-гиростата, в которых ось симметрии или коллинеарна к плоскости орбиты ((4.10)), или ортогональна к радиусу-вектору центра масс ((4.11)), или ортогональна касательной к орбите ((4.12)).

Рассмотрим какое-либо устойчивое стационарное движение, для которого величины (4.9) имеют определенные значения и в окрестности которого энергия (4.4) есть определенно-положительная функция вариаций θ, ψ, $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$. Оптимизируемый функционал (2.9) возьмем в форме

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (F(\theta, \psi, \theta^{\cdot}, \psi^{\cdot}) + \beta_1 u_1^2 + \beta_2 u_2^2)\,dt$$

где $\beta_i > 0$ ($i = 1, 2$), предполагая, что коэффициенты при управляющих воздействиях в выражениях (4.5) удовлетворяют условиям

$$m_{ii} = m_i, \qquad m_{ij} = 0 \quad (i \neq j)$$

Согласно формулам (2.10) и (2.11) найдем

$$u_1^{\circ} = -\frac{m_1}{2\beta_1}\theta^{\cdot}, \quad u_2^{\circ} = -\frac{m_2}{2\beta_2}\psi^{\cdot}, \quad F = \frac{1}{4}\left(\frac{m_1^2}{\beta_1}\theta^{\cdot 2} + \frac{m_2^2}{\beta_2}\psi^{\cdot 2}\right) \tag{4.13}$$

Управляющие воздействия такого вида для приведенной системы представляют собою диссипативные силы с полной диссипацией; они обеспечивают оптимальную стабилизацию устойчивого стационарного движения, в окрестности которого функция H определенно-положительна, по отношению к переменным θ, ψ, $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$.

Рассмотрим теперь силы с частичной диссипацией, когда в (4.13) или $m_1 \neq 0$, $m_2 = \beta_2 = 0$, или $m_2 \neq 0$, $m_1 = \beta_1 = 0$. Для возмущенного движения в окрестности стационарного движения (4.9) уравнения в вариациях можно представить в виде

$$\xi_1^{\cdot\cdot} - \Omega\xi_2^{\cdot} + a_1\xi_1 = -\frac{m_1}{2\beta_1}\xi_1^{\cdot}, \qquad \xi_2^{\cdot\cdot} + \Omega\xi_1^{\cdot} + a_2\xi_2 = -\frac{m_2}{2\beta_2}\xi_2^{\cdot} \tag{4.14}$$

где ξ_i — вариации углов θ и ψ; Ω, a_i — постоянные коэффициенты, имеющие следующие выражения:

для решения (4.10)

$$\Omega = 2 - a, \qquad a_1 = a + b - 1, \qquad a_2 = a - 1 \tag{4.15}$$

для решения (4.11)

$$\Omega = a, \qquad a_1 = b, \qquad a_2 = 1 - a^2 \tag{4.16}$$

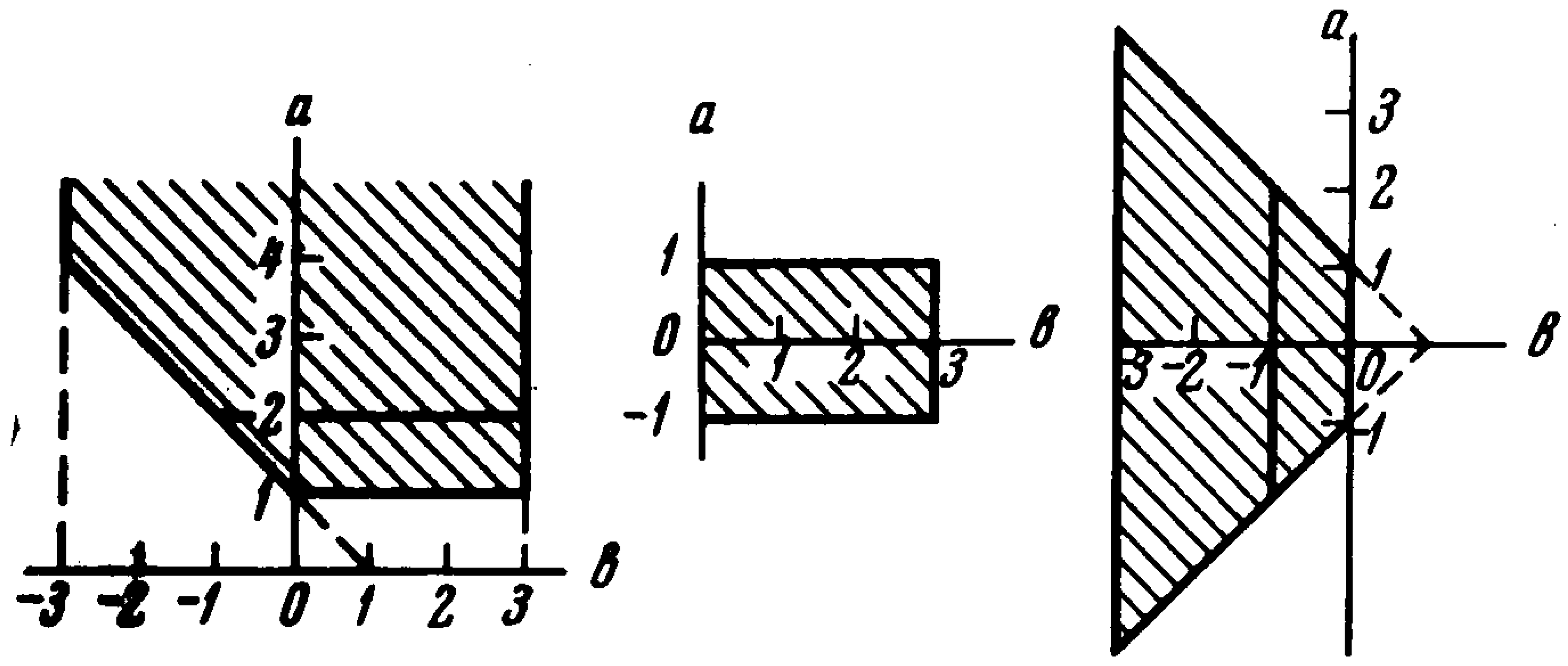
причем

$$a = c/A\,\omega_0, \qquad b = 3(C/A - 1) \tag{4.17}$$

Для решения (4.12) уравнения в вариациях имеют вид

$$\xi_1^{\cdot\cdot} - \frac{(1+b)}{(1-b)^2} a^2 \xi_2^{\cdot} + \frac{(1-b)^2 - a^2}{1-b} \xi_1 = -\frac{m_1}{2\beta_1} \xi_1^{\cdot}$$
$$\xi_2^{\cdot\cdot} + (1+b)\xi_1^{\cdot} - b\xi_2 = -\frac{m_2}{2\beta_2} \xi_2^{\cdot} \qquad (4.18)$$

Из уравнений в вариациях заключаем, что оптимальная стибилизация по переменным θ, ψ, $\theta^{\cdot}$, $\psi^{\cdot}$ устойчивого (при $a_1 > 0$, $a_2 > 0$) стационарного движения (4.9) обеспечивается управляющими воздействиями вида (4.13) как в случае $m_1 \neq 0$, $m_2 = 0$,



так и в случае $m_1 = 0$, $m_2 \neq 0$ при условии $\Omega \neq 0$ (для решений (4.10) и (4.11)) или $b \neq -1$ (для решения (4.12)). На фигуре заштрихованы области оптимальной стабилизации силами с частичной диссипацией, отвечающие равенствам (4.10) — (4.12) и совпадающие с областями, где выполнены достаточные условия устойчивости, за исключением прямой $a = 2$ для решения (4.10), прямой $a = 0$ для решения (4.11) и прямой $b = -1$ для решения (4.12), на которых условия оптимальной стабилизации не выполняются в первом приближении. Рассматривая нелинейные члены в уравнениях возмущенного движения, можно, однако, убедиться, что условия оптимальной стабилизации выполняются и на этих прямых.

Поступила 26 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. «Теория устойчивости движения», доп. 4, М., «Наука», 1966.
2. Летов А. М. Динамика полета и управление. М., «Наука», 1969.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.
4. Красовский Н. Н. Обобщение теорем второго метода Ляпунова. В кн.: Малкин И. Г. «Теория устойчивости движения», доп. 3, изд. 2, М., «Наука», 1966.
5. Четаев Н. Г. Устойчивость движения, изд. 3. М., «Наука», 1965.
6. Красовский Н. Н. Об одном свойстве гироскопической стабилизируемости управляемой консервативной механической системы. Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1964, № 5.
7. Габриелян М. С., Красовский Н. Н. К задаче о стабилизации механической системы. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.
8. Пожарицкий Г. К. Об асимптотической устойчивости систем с диссипацией. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости стационарных движений спутников, М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.
10. Corduneanu C. Sur la stabilité partielle. Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées, 1964, vol. 9, No. 3.