Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О ДВОЙСТВЕННОСТИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯ

А. Б. Куржанский

(Свердловск)

Методами работы [1] рассматривается вопрос о двойственности задачи наблюдения при постоянно действующих возмущениях и задачи об управлении при ограниченных координатах. Аналогичные вопросы обсуждаются и для систем с запаздыванием. Указанный круг вопросов был поставлен и обсуждался впервые на семинаре Н. Н. Красовского в Уральском университете.

Таким образом, элементы теории двойственности [1,2] задач управления и наблюдения прилагаются здесь к специфическому классу бесконечномерных задач.

§ 1. Наблюдение при постоянно действующих возмущениях. Дана линейная n-мерная система

$$dx / d\tau = Ax + Bf \tag{1.1}$$

с постоянными $n \times n$- и $n \times r$-мерными матрицами A, B и с r-мерными постоянно действующими возмущениями $f(\tau)$ на входе. Конкретную функцию $f(\tau)$ из (1.1) будем считать неизвестной, полагая, что задача лишь оценка $f \in F_1$ для всех возможных f, т. е., иначе говоря, лишь описание множества F_1.

Не вдаваясь в наиболее общие оценки, ограничим рассмотрение лишь следующими классами функций f.

(1) Множество F_1 состоит из всех r-векторных функций пространства $L[t, \vartheta]$ с нормой, ограниченной единицей

$$\rho_L(f) = \int_t^{\vartheta} \gamma[f(\xi)]\, d\xi \leqslant 1 \quad (\gamma \text{ — конечно-мерная норма } r\text{-вектора } f) \tag{1.2}$$

(2) Множество F_1 состоит из всех r-векторных функций пространства $L_2[t, \vartheta]$, образующих ограниченное, выпуклое, уравновешенное и поглощающее множество [3] в $L_2[t, \vartheta]$.

В данных условиях множество F_1 будет и замкнутым в $L_2[t, \vartheta]$. Сопоставляя F_1 соответствующий функционал Минковского $\rho_{F_1}{}^*$, получим [3] некоторую норму для функций f из $L_2[t, \vartheta]$.

Условие $f \in F_1$ тогда перепишем в виде

$$\rho^*_{F_1}(f) \leqslant 1 \tag{1.3}$$

(3) Множество $F_1 = \{f(\tau) : f(\tau) = dF(\tau) / d\tau\}$; в этом определении $dF(\tau) / d\tau$ суть обобщенные производные [3] функций F ограниченной

вариации, удовлетворяющих неравенству

$$\rho_V(F) = \int_t^{\vartheta} \gamma\,[dF] \leqslant 1 \tag{1.4}$$

На промежутке $[t, \vartheta]$ наблюдается сигнал

$$z(\tau) = Gx(\tau) \quad (G \text{ — постоянная } m \times n \text{ — матрица}) \tag{1.5}$$

Требуется найти линейную операцию (функционал) $\varphi[z] = \zeta_1$, выделяющую по любому возможному сигналу (r-векторный функции) $z(t)$ величину ζ_1, наименее уклоняющуюся от искомой величины $\zeta = c'x(\vartheta)$, (c — известный вектор, штрих означает транспонирование). Операцию φ будем искать в заданном классе $\varphi \in \Phi$, отождествляя $\varphi[z]$ с функцией $v(t) \in V$, где класс V будет, очевидно, соответствовать Φ.

Выписав решение (1.1) с краевым условием $x_\vartheta = x(\vartheta)$, найдем

$$z(\tau) = GX[\tau, \vartheta]\,x_\vartheta - \int_\tau^\vartheta GX[\tau, \xi]\,Bf(\xi)\,d\xi$$

$$dX[t, \vartheta]\,/\,dt = AX[t, \vartheta], \qquad X[t, t] = E$$

В соответствии с обычной для теории наблюдения процедурой [1, 2] примем выполненными условия несмещенности, означающие, что при $f(\tau) \equiv 0$ искомая операция $\varphi[z]$ должна выделять в точности $\zeta = c'x(\vartheta)$. Вследствие сказанного при любом x_ϑ должны быть выполнены равенства

$$\varphi[GX[\tau, \vartheta]x_\vartheta] = c'x_\vartheta, \qquad \varphi[GX[\tau, \vartheta]] = c' \tag{1.6}$$

Ниже примем

$$\Phi = \bigcup_\nu \Phi_\nu, \qquad \Phi_\nu = \{\varphi : \|\varphi\| \leqslant \nu\}$$

Здесь $\|\varphi\|$ — некоторая норма в подходящем функциональном пространстве. Пусть

$$F_\mu = \{f : \mu^{-1}f \in F_1\}$$

т. е. F_μ означает растянутое в $\mu > 0$ раз множество F_1 и

$$F_0 = \bigcup_\mu F_\mu$$

Задача 1.1. По заданному $\varepsilon \geqslant 0$ среди операций $\varphi \in \Phi$, которые удовлетворяют (1.6), найти оптимальную φ°, доставляющую для любого возможного сигнала $z(\tau)$ неравенство

$$\max_f |\,\varphi^\circ[z(\vartheta)] - c'x(\vartheta)\,| \leqslant \varepsilon \qquad (f \in F_1) \tag{1.7}$$

при условии $\|\varphi^\circ\| = \min = \nu^\circ$.

В задаче 1.1 условие (1.7) эквивалентно следующему:

$$\max_f |\,\varphi^\circ[z(\vartheta)] - c'x(\vartheta)\,| \leqslant \varepsilon\rho[f] \qquad (f \in F_0) \tag{1.8}$$

где в соответствии с (1), (2), (3) норма $\rho[f]$ есть либо $\rho_L[f]$, либо $\rho_{F_1}{}^*[f]$, либо $\rho_V{}^*[F]$.

Задача 1.2. Среди операций $\varphi \in \Phi_\nu$ найти оптимальную φ°, доставляющую

$$\min_{\varphi \in \Phi_\nu} \max_{f \in F_1} |\varphi[z(t)] - c'x(\vartheta)| = \varepsilon_0 \tag{1.9}$$

Задача 1.2 содержательная, если $\varepsilon_0 > 0$. Условие (1.9) эквивалентно определению наименьшего из чисел ε, удовлетворяющих при $\varphi \in \Phi_\nu$ неравенству (1.8).

Примечание 1.1. Существенным в данной постановке является то обстоятельство, что, например, в задаче 1.1 при $\varepsilon \to 0$ норма $\|\varphi^\circ\|$ не обязательно растет до бесконечности. В частности, задача может в принципе оказаться разрешимой даже при $\varepsilon = 0$. Система (1.1), (1.2), для которой при $\varepsilon = 0$ в решении задачи 1.1 имеем $\nu^\circ < \infty$, может быть названа c-наблюдаемой при постоянно действующих возмущениях. Обсуждение эффективных условий, гарантирующих указанное свойство (см. также [4]), не составляет цели данной работы.

§ 2. Решение задачи о наблюдении. Пусть число $\varepsilon \geqslant 0$ задано. Обсудим вначале вопрос о существовании операции $\varphi[z]$, (не обязательно оптимальной), удовлетворяющей задаче 1.1. Из (1.5) — (1.7) получаем

$$\max_{f \in F_1} \int_t^\vartheta v(\xi) \left\{ \int_\xi^\vartheta GX[\xi, \tau] Bf(\tau)\, d\tau \right\} d\xi \leqslant \varepsilon$$

откуда находим

$$\max_f \int_t^\vartheta q(\tau) f(\tau)\, d\tau \leqslant \varepsilon \qquad (f \in F_1) \tag{2.1}$$

$$\int_t^\tau v(\xi) GX[\xi, \tau] B d\xi = q(\tau) \tag{2.2}$$

Пусть множество F_1 имеет вид (1). Тогда, рассматривая $q(\tau)$ как элементы пространства, сопряженного к $L[t, \vartheta]$, находим, что условие (2.1) эквивалентно неравенству

$$\text{vrai}\max_\tau \gamma^*[q(\tau)] \leqslant \varepsilon, \qquad t = \leqslant \tau \leqslant \vartheta$$

которое вследствие абсолютной непрерывности $q(\tau)$ (см. (2.2)) может быть заменено на следующее:

$$\max_\tau \gamma^*[q(\tau)] \leqslant \varepsilon, \qquad t \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{2.3}$$

Здесь γ^* — конечно-мерная норма, сопряженная к γ. Отождествляя Φ с заданным классом (может быть обобщенных) функций $V = \{v\}$, будем далее вместо $\varphi \in \Phi$ искать соответственно $v \in V$. С учетом сказанного задача 1.1 трансформируется в следующую.

Задача 2.1. 1. Среди m-векторных функций $v \in V$, решающих задачу

$$\int_t^\vartheta v(\xi) GX[\xi, \vartheta] B d\xi = c' \tag{2.4}$$

$$\int_t^\tau v(\xi) GX[\xi, \tau] B d\xi = q(\tau) \tag{2.5}$$

$$\gamma^*[q(\tau)] \leqslant \varepsilon, \qquad t \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{2.6}$$

найти оптимальную v°, для которой $\|v^\circ\| = \nu^\circ = \min$.

Заметим, что (2.6) есть ограничение на мгновенные значения вектора-строки $q(\tau)$, так что (2.5), (2.6) можно трактовать как бесконечную систему линейных функциональных неравенств. Аналогично трансформируется и задача 1.2.

Задача 2.2. 1. Среди m-векторных функций $v \in V_\nu = \{v : \| v \| \leqslant \nu\}$, удовлетворяющих (2.4), (2.5), найти оптимальную v°, доставляющую

$$\max_\tau \gamma^* [q(\tau)] = \varepsilon^\circ = \min, \qquad t \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{2.7}$$

Пусть F_1 — множество вида (2). В силу свойств F_1 тогда получаем, что условие $f \in F_1$ эквивалентно следующему [1, 3]:

$$\int_t^\vartheta h(\tau) f(\tau)\, d\tau \leqslant \rho_{F_1}(h) \tag{2.8}$$

какой бы ни была r-векторная функция — строка из $L_2[t, \vartheta]$. Здесь $\rho_{F_1}(h)$ — опорный функционал множества F_1

$$\rho_{F_1}(h) = \max_f \int_t^\vartheta h(\xi) f(\xi)\, d\xi \qquad (f \in F_1)$$

С учетом (2.8) условие (2.1) перейдет в следующее:

$$\rho_{F_1}(q) \leqslant \varepsilon \tag{2.9}$$

В то же время, конкретизируя задачи 1.1, 1.2, получаем

Задача 2.1. 2. Серди m-векторных функций $v(t) \in V$, удовлетворяющих (2.4), (2.5), (2.9), найти оптимальную v° минимальной нормы $v^\circ \| = \min$.

Задача 2.2. 2. Среди функций $v \in V_\nu$, удовлетворяющих (2.4), (2.5), найти оптимальную v°, доставляющую

$$\max_\tau \rho_{F_1}(q) = \varepsilon^\circ = \min_v, \qquad t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$$

Переходя, наконец, к случаю (3), заметим, что множество F_1 будет в указанном случае регулярно выпуклым [5] в пространстве r-векторных функций ограниченной вариации, сопряженном к r-векторному пространству $C[t, \vartheta]$ с нормой

$$v \| = \max_\tau \gamma^* [v(\tau)] \qquad (t \leqslant \tau \leqslant \vartheta)$$

Указанное свойство F_1 приводит [6], как и в случае [2], к эквивалентности соотношения $f \in F_1$ и неравенства

$$\int_t^\vartheta h(\tau) f(\tau)\, d\tau = \int_t^\vartheta h(\tau)\, dF(\tau) \leqslant \rho_V(h)$$

$$\rho_V(h) = \max_F \int_t^\vartheta h(\tau)\, dF(\tau), \qquad \left\{F(\tau) : \int_t^\vartheta \gamma [dF(\tau)] \leqslant 1\right\}$$

Отсюда получаем сразу, что (2.1) эквивалентно (2.3) и что, следовательно, задачи (1.1), (1.2) трансфомируются в случае (3) для множества F_1 снова в задачи 2.1.1, 2.2.2. Рассмотрение случая (3) показывает, что пополнение класса F (1) до класса F (3), т. е., иначе говоря, класса локально интегрируемых функций до класса обобщенных функций первого порядка [3], не отражается на свойстве разрешимости задач 1.1, 1.2.

§ 3. **Управление при стесненных координатах.** Рассмотрим линейную управляемую систему

$$dy \,/\, d\tau = A_1 y + G_1 u, \qquad p(\tau) = B_1 y(\tau), \qquad t \leqslant \tau \leqslant \vartheta \tag{3.1}$$

при ограниченных координатах

$$p(\tau) \in P_\varepsilon \tag{3.2}$$

и краевых условиях $y(t) = 0$, $y(\vartheta) = c$ (промежуток $t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ считаем фиксированным). Относительно P_ε предположим, что имеет место один из двух случаев.

(1) $$P_\varepsilon = \{p(\tau) = \max\nolimits_\tau \gamma^* [p(\tau)] \leqslant \varepsilon\} \quad (t \leqslant \tau \leqslant \vartheta) \tag{3.3}$$

(2) $$P_\varepsilon = \{p(\tau) : \rho_{F_1}(p) \leqslant \varepsilon\} \tag{3.4}$$

Здесь γ^*, ρ_{F_1} — те же, что и в (2.3), (2.9). Из (3.1), (3.2) получаем равенства

$$\int_t^\vartheta Y[\vartheta, \xi] G_1 u(\xi)\, d\xi = c, \quad \int_t^\tau B_1 Y[\tau, \xi] G_1 u(\xi)\, d\xi = p(\tau) \tag{3.5}$$

Здесь

$$dY[\tau, \vartheta] \,/\, d\tau = AY[\tau, \vartheta], \qquad Y[\tau, \tau] = E \tag{3.6}$$

При этом имеет место либо (3.3), либо (3.4).

Пусть u принадлежит классу

$$U = \bigcup_\nu U_\nu, \qquad U_\nu = \{u : \|u\| \leqslant \nu\}$$

Здесь $\|u\|$ — некоторая норма в подходящем функциональном пространстве.

Задача 3.1.1. Среди управлений $u(\xi)$, переводящих систему (3.1), при ограничении (3.2) (3.3) из состояния $y(t) = 0$ в состояние $y(\vartheta) = c$, или из состояния $y(t) = y_\alpha$ в состояние $y(\vartheta) = y_\beta$, где

$$y_\beta = Y[\vartheta, t] y_\alpha = c \tag{3.7}$$

найти оптимальное u°, минимальной нормы $\| u^\circ \| = \nu^\circ = \min$

Задача 3.1.2. Формулируется аналогично задаче 3.1.1, но с ограничением (3.4) вместо (3.3).

Задачи 3.1.1., 3.1.2 суть задачи об управлении при стесненных координатах [7–9]. Аналогично формулируются и задачи минимизации ограничений [10–12].

Задача 3.2.1. Среди управлений $u \in V_\nu$, переводящих систему (3.1) из $y(t) = 0$ в $y(\vartheta) = c$, найти оптимальное u°, доставляющее

$$\max\nolimits_\tau \gamma^* [p(\tau)] = \min = \varepsilon^\circ \quad (t \leqslant \tau \leqslant \vartheta) \tag{3.8}$$

Задача 3.2.2. формулируется аналогично 3.1.1, но вместо (3.7) следует брать условие

$$\rho_{F_1}(p) = \min\nolimits_\nu = \varepsilon^\circ \tag{3.9}$$

Здесь 3.1.1. известна как задача на минимум максимального отклонения управляемой системы от нуля [13].

§ 4. Двойственность задач оптимального управления и наблюдения. Пусть системы (1.1), (1.5) и (3.1) удовлетворяют условиям

$$A = -A_1', \qquad B = B_1', \qquad G = G_1' \tag{4.1}$$

Тогда очевидно

$$X[\xi, \tau] = Y'[\tau, \xi] = e^{A(\xi-\tau)}, \qquad q'(\tau) = p(\tau)$$

и, значит, равенства (2.4), (2.5) суть просто транспонированные равенства (3.5), (3.6), где вместо $u(\xi)$ взято $v(\xi)$.

Существенно подчеркнуть, что и ограничения на $p(\tau) = -q'(\tau)$ в обоих случаях одни и те же. Они определяются в задаче наблюдения неравенствами (2.6), (2.9) и в задаче управления — неравенствами (3.2) — (3.4).

Теперь в задачах 2.1.1 и 3.1.1, 2.1.2 и 3.1.2 стоит лишь взять одинаковые нормы для u и v, как задачи полностью совпадут.

Аналогичным образом при одинаковых органичениях $U_\nu = V_\nu$ совпадают задачи 2.2.1 и 3.2.1, 2.2.2 и 3.2.2. Перечисленные пары совпадающих задач будем согласно [1] называть сопряженными. Таким образом, будут справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.1. Пусть даны сопряженные системы (1.1), (1.5), (3.1), (4.1) и $U_\nu = V_\nu$. Для системы (1.1), (1.5) рассмотрим задачу об оптимальном наблюдении (при постоянно действующих возмущениях) вектора $z = c'x(\tau)$ в форме 2.1.1 (2.1.2). Тогда задача 2.1.1 (2.1.2) эквивалентна сопряженной задаче об оптимальном управлении при ограниченных координатах в форме 3.1.1 (3.2.2) для системы (3.1), (4.1) с краевыми условиями $y(t)$, $y(\theta)$, удовлетворяющими (3.7), и с ограничением (3.3), (3.4).

Теорема 4.2. Для системы (1.1), (1.5) рассмотрим задачу об оптимальном наблюдении при постоянно действующих возмущениях на минимум ошибки наблюдения в форме 2.1.2 (2.2.2). Тогда задача 2.1.2 (2.2.2) эквивалентна сопряженной задаче 3.1.2 (3.2.2) об оптимальном управлении, минимизирующем ограничения на координаты для системы (3.1), (4.1).

Примечание 4.1. Метод решения и структура решений задач вида 3.1, 3.2 детально рассмотрены в работах [8,11], где в силу двойственности задач 2.1, 2.2 о наблюдении и задач 3.1, 3.2 об управлении, тем самым описаны и решения задач 2.1, 2.2.

Примечание 4.2. Пусть в задаче 2.1 дано $\varepsilon = 0$. Тогда в сопряженной задаче 3.1 об управлении вместо фазовых ограничений (3.3), ((3.4)) имеем условие $B_1 y(\tau) \equiv 0$, $\leqslant \tau \leqslant \vartheta$, означающее необходимость удержать траекторию $y(\tau)$ в заданном подпространстве E_n.

§ 5. Наблюдение в системах с запаздыванием. Задача о наблюдении в системах с запаздыванием может быть сформулирована в различных постановках [14, 15]. Ниже рассматривается задача, близкая по характеру к изложенным в §§ 1—4.

Пусть дана n-мерная система

$$dx(\tau) / d\tau = Ax(\tau) + Gx(\tau - h) \tag{5.1}$$

с постоянными $n \times n$ — матрицами A, G и с постоянным запаздыванием $h > 0$. Пусть на отрезке $[t, \vartheta]$ наблюдается сигнал

$$z(\tau) = Nx(\tau) \qquad (t \leqslant \tau \leqslant \vartheta) \tag{5.2}$$

где N — постоянная матрица порядка $m \times n$.

Будем искать операцию $\varphi[z]$, выделяющую по сигналу $z(\tau)$, каким бы он ни был, линейную комбинацию $\zeta = c'x(\vartheta)$, где c — заданный вектор, ϑ — фиксированное число. Операцию φ будем, как и в § 1, искать в классе $\varphi \in \Phi$, отождествляя их также с функциями $v(\tau) \in V$.

Задача 5.1 (а). Найти операцию $\varphi[z(t)]$, $\varphi \in \Phi$, удовлетворяющую условию

$$\varphi[z] = c'x(\vartheta) \tag{5.3}$$

каков бы ни был сигнал $z(\tau)$, определенный равенством (5.2).

(б) Среди решений (5.3) найти оптимальное φ°, минимальной нормы.

Кроме $\varphi[z]$ будем еще искать операцию $\varphi_\xi[\tau]$, выделяющую по любому сигналу $z(\tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant \vartheta + \xi$ величину

$$\zeta(\xi) = c'x(\vartheta + \xi) = c'x_\vartheta(\xi), \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant h$$

уже на целом отрезке длиной h. Операцию $\varphi_\xi[z]$ будем отождествлять с функцией $v(\xi, \tau)$, выбирая

$$\varphi_\xi[z] \in \Phi^{(1)} \qquad (v(\xi, \tau) \in V^{(1)})$$

Здесь

$$\Phi^{(1)} = \bigcup_\nu \Phi_\nu^{(1)} = \{\varphi_\xi[z] : \|\varphi\|^{(1)} \leqslant \nu\} \qquad (\nu \geqslant 0)$$

Величина $\|\varphi\|^{(1)}$ — норма в пространстве функций двух переменных.

Задача 5.2 (а). Найти операцию $\varphi_\xi[z(\tau)]$, $\varphi_\xi \in \Phi^{(1)}$, удовлетворяющую условию

$$\varphi_\xi[z(\tau)] = c'x(\vartheta + \xi), \qquad 0 \leqslant \xi \leqslant h \tag{5.4}$$

каков бы ни был сигнал $z(\tau)$, определяемый равенством (5.2) при $t \leqslant \tau \leqslant \vartheta + \xi$.

(б). Среди решений (5.3) найти оптимальное φ_ξ° минимальной нормы.

Обсудим задачу 5.1. Выразив решение (5.1) с начальной функцией $f(s)$, $t - h \leqslant s \leqslant t$ в интегральной форме [16], получим

$$\varphi[z(\tau)] = \int_t^\vartheta v(\tau) N \Big(X(\tau, t) f(t) + \int_{t-h}^t X(\tau, s + h) G f(s)\, ds\Big) d\tau$$

$$(X(\tau, \tau) = E;\ X(\vartheta, \tau) = 0,\ \vartheta < \tau)$$

Здесь $X(\vartheta, \tau)$ — матрица-функция, удовлетворяющая по ϑ уравнению (5.1) и по τ — сопряженному уравнению

$$dX(\vartheta, \tau) / d\tau = -X(\vartheta, \tau)A - X(\vartheta, \tau + h)G$$

С другой стороны

$$c'x(\vartheta) = c'\left(X(\vartheta, t) f(t) + \int_{t-h}^{t} X(\vartheta, s+h) G f(s)\, ds\right)$$

По условию задачи 5.1 равенство $\varphi[z(\tau)] = c'x(\vartheta)$ должно быть выполнено для любой функции $f(t+s)$, $-h \leqslant s \leqslant 0$. Таким образом, условие

$$\left(\int_{t}^{\vartheta} v(\tau) NX(\tau, t)\, d\tau - c'X(\vartheta, t)\right) f(t) +$$

$$+ \int_{t-h}^{t} \left(\int_{t}^{\vartheta} v(\tau) NX(\tau, s+h) G d\tau - c'X(\vartheta, s+h) G\right) f(s)\, ds = 0$$

должно быть выполнено для любых n-векторов $f(t)$ и любых n-векторных функций $f(s)$, $t-h \leqslant s \leqslant t$. Отсюда сразу получаем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи 5.1, сводящиеся к равенствам

$$\int_{t}^{\vartheta} v(\tau) NX(\tau, t)\, d\tau = c'X(\vartheta, t) \tag{5.5}$$

$$\int_{t}^{\vartheta} v(\tau) NX(\tau, s) G d\tau = c'X(\vartheta, s) G \qquad (t \leqslant s \leqslant t+h) \tag{5.6}$$

Аналогичным образом условия разрешимости задачи 5.2, эквивалентны равенствам

$$\int_{t}^{\vartheta+\xi} v(\xi, \tau) NX(\tau, t)\, d\tau = c'X(\vartheta + \xi, t) \tag{5.7}$$

$$\int_{t}^{\vartheta+\xi} v(\xi, \tau) NX(\tau, t+\eta) G d\tau = c'X(\vartheta + \xi, t+\eta) \tag{5.8}$$

$$(0 \leqslant \eta \leqslant h, \ 0 \leqslant \xi \leqslant h)$$

§ 6. Управление в системах с запаздыванием и опережением. Рассмотрим n-мерную систему

$$dy / d\tau = A_1 y(\tau) + G_1 y(\tau + h) + N_1 u \tag{6.1}$$

с опережением $h \geqslant 0$, с постоянными $n \times n$ — матрицами A_1, G_1 и $n \times m$ — матрицей N. Управление u будем выбирать в том же классе U, что и в задаче 3.1.

Задача 6. 1. (а). Пусть известно краевое условие

$$y(\tau) = f(\tau), \quad \vartheta \leqslant \tau \leqslant \vartheta + h$$

для системы (5.1), причем $f(\vartheta) = c$ и $f(\tau) = 0$, если $\tau > \vartheta$. Требуется выбрать управление $u \in U$, $u(\tau) = 0$ при $\tau < t$, переводящее систему (6.1) из состояния

$$y(\vartheta + \xi) = f(\vartheta + \xi) \quad (0 \leqslant \xi \leqslant h)$$

в состояние равновесия

$$y(t-\eta) \equiv 0 \quad (0 \leqslant \eta \leqslant \eta)$$

(б) Среди решений $u(\tau)$ пункта (а) найти оптимальное u° минимальной нормы.

Постановка задачи 6.1 восходит к работе [17]. Для решения задачи 6.1 (а) необходимы и достаточны условия [18–20]

$$y(t)=0, \qquad G_1 y(\tau) \equiv 0, \quad t \leqslant \tau \leqslant t+h \tag{6.2}$$

расписывая которые, получим равенства

$$\int_{\vartheta}^{t} Y(t,\tau) N_1 u(\tau)\, d\tau + Y(t,\vartheta)c = 0 \tag{6.3}$$

$$G_1 \int_{\vartheta}^{t+\eta} Y(t+\eta,\tau) N_1 u(\tau)\, d\tau + G_1 Y(t+\eta,\vartheta)c = 0$$

Здесь $Y(t, \tau)$ удовлетворяет по t уравнению (6.1) (при $u=0$) и по τ — уравнению с запаздыванием

$$dx(\tau)\,/\,d\tau = -x(\tau)A_1 - x(\tau - h)G_1$$

с краевым условием

$$Y(t, \tau) \equiv 0, \quad t > \tau; \qquad Y(\tau, \tau) = E$$

При

$$A_1 = -A', \qquad G_1 = -G' \tag{6.4}$$

имеем

$$X(t, \tau) = Y'(\tau, t) \tag{6.5}$$

Задача 6.2 Найти функцию $u(\xi, \tau)$, удовлетворяющую при всех $0 \leqslant \xi \leqslant h$ условиям (6.2), (6.3), где ϑ заменено на $\vartheta_1 = \vartheta + \xi$.

Задача 6.2 фактически требует, чтобы задача 6.1 была разрешима при переменной величине ϑ_1 $(\vartheta \leqslant \vartheta_1 \leqslant \vartheta + h)$, заменяющей в условии задачи 6.1 величину ϑ. Здесь, однако, допускаются функции $u(\xi, \tau)$ двух переменных.

Пусть задача (6.2), (6.3) разрешима функцией $u(\tau)$. Тогда функция

$$u(\xi, \tau) = u(\xi + \tau) \qquad \vartheta + \xi \geqslant \tau \geqslant t + \xi$$

$$u(\xi, \tau) \equiv 0, \qquad \tau < t + \xi, \qquad \tau > \vartheta + \xi$$

будет решением задачи 6.2. Последнее проверяется непосредственно по (6.1) — (6.3) с учетом стационарности системы (6.1).

Аналогично рассматриваются задачи управления (аналоги задач 6.1, 6.2) для системы с запаздыванием

$$dr(\tau)\,/\,d\tau = A_2 r(\tau) + G_2 r(\tau - h) + B_2 w \tag{6.6}$$

(r — фазовый вектор, w — управление)

Здесь, например, в случае задачи 6.1 требуется перевести $r(\tau)$ из состояния

$$r_0(\tau) \equiv 0, \ \tau < t, \ r_0(t) = r_0$$

в состояние

$$r(\tau) \equiv 0, \quad \vartheta \leqslant \tau \leqslant \vartheta + h$$

в классе управлений $w \in W$, $w(\tau) \equiv 0$ при $\tau > \vartheta$.

Система (6.6) получается из (6.1) при

$$A_2 = -A, \qquad G_2 = -G, \qquad B_2 = -B \tag{6.7}$$

введением обратного времени.

§ 7. Двойственность задач управления и наблюдения для систем с запаздыванием. Учитывая, что при условии (6.5) равенства (5.5), (5.6) эквивалентны (6.2), (6.3), приходим к утверждению.

Теорема 7.1. Для системы (5.1) с запаздыванием рассмотрим задачу 5.1 (а) о нахождении величины $c'x(\vartheta)$ по наблюдаемому на $[t, \vartheta]$ сигналу $z(\tau)$ (5.2). Тогда задача 5.1 (а) эквивалентна задаче 6.1 (а) о построении для системы (6.1) с опережением управления $u(\tau)$, $u(\tau) \equiv 0$ при $\tau < t$, $\tau > \vartheta$, переводящего систему из состояния $y(\vartheta) = c$, $y(\tau) \equiv 0$ при $\tau > \vartheta$ в состояние равновесия $y(\tau) \equiv 0$, $t - h \leqslant \tau \leqslant t$.

Примечание 7.1. Условие (6.7) позволяет сформулировать теорему 7.1 о двойственности, заменяя систему (6.1), (6.4) с опережением эквивалентной системой (6.6), (6.7) с запаздыванием. Теорема 7.1 может быть также распространена на задачу 6.2 и ее аналоги.

Примечание 7.2. Выше были сформулированы задачи о точном наблюдении величины $c'x(\vartheta)$ и точном приведении системы (6.1) в начало координат. Здесь, однако, как и в §§ 1—4, может быть рассмотрена двойственность между задачами об ε — наблюдаемости и ε — управляемости, где исходными условиями необходимо удовлетворить лишь с точностью до ε. Возможна, наконец, и комбинация рассуждений §§ 1—4 и §§ 5—7.

Примечание 7.3. Из теоремы 7.1 вытекает, что свойство полной (для любого c) наблюдаемости системы (5.1), (5.2) эквивалентно свойству полной (для любого c) управляемости системы (6.1) из состояния $\{y(\vartheta) = c, \ y(\tau) \equiv 0$ при $\tau > \vartheta\}$ в положение равновесия.

Примечание 7.4. Если управления $u(\tau)$ в задачи 6.1 (а) выбирать в классе распределений n-го порядка [3], то достаточные условия полной управляемости системы (6.1) сводятся к условию общего положения [1] для матриц A_1 и N_1.

Поступила 27 I 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. Калман Р. Е. Об общей теории систем управления. Тр. I междунар. конгр. ИФАК, т. 2, М., Изд-во АН СССР, 1961.
3. Иосида К. Функциональный анализ, М., «Мир», 1967.
4. Basile G., Marro G. On the observability of linear, time invariant systems with unknown inputs. J. Opt. Theory Appl., 1969, vol. 3, № 6.
5. Krein M., Šmulian V. On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space. Ann. Math. Princenton. 2nd-Ser.: 1940, vol. 41.
6. Bourgin D. G. Linear topological spaces. Amer. J. Math., 1943. vol. 65, p. 637.
7. Гамкрелидзе Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах. Изв. АН СССР, сер. матем., 1960, т. 24, № 3.
8. Троицкий В. А., О вариационных задачах оптимизации процессов управления. ПММ, 1962, т. 26, вып. 1.

9. К у р ж а н с к и й А. Б., О с и п о в Ю. С. К задачам об управлении при стесненных координатах. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
10. Д у б о в и ц к и й А. Я., М и л ю т и н А. А. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 3.
11. Х р у с т а л е в М. М. Задачи оптимизации ограничений на фазовые координаты и управления, I. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1969, № 4.
12. К у р ж а н с к и й А. Б., О с и п о в Ю. С. К задаче об управлении с ограниченными фазовыми координатами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
13. Б е л л м а н Р., Г л и к с б е р г И., Г р о с с О. Некоторые вопросы математической теории процессов управления. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
14. К р а с о в с к и й Н. Н., К у р ж а н с к и й А. Б. К вопросу о наблюдаемости систем с запаздыванием. Дифференциальные управления, 1966, т. 2, № 3.
15. Ж е в н я к Р. М., К и р и л л о в а Ф. М. Относительная наблюдаемость в системах с запаздыванием. В кн.: «Качественные методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и небесной механике». Тез. сообщ. и докл. на симпоз., Кишинев, Ред.-изд. отд. АН МолдССР, 1969.
16. Б е л л м а н Р., К у к К. Л. Дифференциально-разностные уравнения, М., «Мир», 1967.
17. К р а с о в с к и й Н. Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. Оптимальные системы. Статистические методы. Тр. II Междунар. конгр. ИФАК, М., «Наука», 1965, т. 2.
18. W e i s s L. On the controllability of delay-differential systems. SIAM J. Control, 1967, vol. 5, No 4, pp. 575—587.
19. К у р ж а н с к и й А. Б. К задаче об управлении для системы дифференциальных уравнений с запаздыванием. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
20. Г а б а с о в Р., Ч у р а к о в а С. В. К теории управляемости линейных систем с запаздыванием. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1969, № 4.