

К КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УПРУГИМ КОНЕЧНЫМ КРЕПЛЕНИЕМ

Г. А. Морарь, Г. Я. Попов

(Одесса)

Исследуется напряженное состояние упругого стержня конечной длины, не воспринимающего изгибающих моментов и сцепленного с полубесконечной пластинкой. Эта задача уже рассматривалась [1-3], но применительно к наиболее простому случаю, когда нагрузка приложена к торцам стержня. Здесь исследован случай, когда сила приложена посередине стержня. Кроме того, рассмотрен случай, когда в некоторой точке упругой полуплоскости действует источник тепла или имеется центр термоупругой деформации [4].

Как и в упомянутых работах, задача сформулирована в виде интегро-дифференциального уравнения Прандтля, методам решения которого, как известно, посвящена обширная литература [1,5,6]. Проблему так или иначе сводят к решению системы линейных алгебраических уравнений. При этом в некоторых работах даются сравнительно сложные общие формулы для подсчета коэффициентов системы в любом приближении либо таковые вообще отсутствуют. В других же работах указываются достаточно простые формулы (метод Мультиппа), однако с каждым новым приближением все коэффициенты системы приходится заново пересчитывать.

Здесь использован метод ортогональных многочленов [7], который быстро сводит задачу к бесконечной системе. При этом получается весьма простая формула для коэффициентов (в случае постоянного сечения), что позволило легко установить регулярность и квазирегулярность указанной системы.

В заключение работы дано обобщение предлагаемого метода на случай переменного сечения. В частности, рассмотрены случаи, когда сечение изменяется по линейному или эллиптическому закону. В последнем случае бесконечная система допускает простое точное решение.

§ 1. Пусть к полубесконечной пластинке (полуплоскости) толщиной h на конечном отрезке $|x| \leq a$ ее границы приварен (приклеен) стержень с площадью поперечного сечения $F(x)$. Контактные напряжения $\tau(x)$, возникающие вдоль линии контакта стержня с полуплоскостью, определяются из следующего интегро-дифференциального уравнения Прандтля [1-3]:

$$\int_{-a}^x \tau(t) dt + \frac{2E_1 F(x)}{\pi E_2 h} \int_{-a}^a \frac{\tau(t)}{x-t} dt = f(x) \quad (1.1)$$

где E_1, E_2 — соответственно модуль упругости стержня и полуплоскости, $f(x)$ — функция, зависящая от нагрузки.

Обозначим равнодействующую всех сил, приложенных к стержню, через R . Имеем очевидное равенство

$$h \int_{-a}^x \tau(t) dt = \frac{h}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x-t) \tau(t) dt + \frac{R}{2} \quad (1.2)$$

Положим $F(x) = F(0) \psi(x/a)$, причем $\psi(x/a) > 0$ при $|x| < a$. Подставив (1.2) в (1.1) и перейдя к безразмерным координатам $x^* = x/a$ и $t^* = t/a$ (звездочки здесь и в дальнейшем опускаются и для функций сохраняются прежние обозначения), получим

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{2} \operatorname{sign}(x-t) + \frac{1}{\pi\lambda} \frac{\psi(x)}{x-t} \right] \tau(t) dt = g(x) \quad (1.3)$$

$$(\lambda = E_2 ah / 2E_1 F(0), g(x) = [2hf(x) - R] / 2ah)$$

Решение уравнения (1.3) должно быть подчинено условию

$$\int_{-1}^1 \tau(x) dx = \frac{R}{ah} \quad (1.4)$$

Представим искомую функцию $\tau(x)$ в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$\tau(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} X_m T_m(x) \quad (1.5)$$

после чего подставим (1.5) в (1.3) и воспользуемся формулами

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(t) dt}{(x-t) \sqrt{1-t^2}} \begin{cases} 0 & (m=0) \\ -\pi U_{m-1}(x) & (m=1, 2, \dots) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \operatorname{sign}(x-t) \frac{T_m(t) dt}{\sqrt{1-t^2}} = \begin{cases} \arcsin x & (m=0) \\ -m^{-1} \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) & (m=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (1.6)$$

($U_m(x)$ — полином Чебышева второго рода)

Последующее умножение на $\sqrt{1-x^2} U_k(x) / \psi(x)$ и интегрирование по промежутку $(-1, 1)$ с использованием формулы 7.343(2) из [8] приводит к следующей бесконечной системе

$$\frac{\pi}{2\lambda} X_{k+1} + \sum_{m=1}^{\infty} X_m B_{m-1,k} = -B_{-1,k} X_0 - b_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (1.7)$$

где

$$B_{m-1,k} = \frac{1}{m} \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)}{\psi(x)} U_{m-1}(x) U_k(x) dx \quad (m, k=0, 1, \dots) \quad (1.8)$$

$$b_k = \int_{-1}^1 \frac{g(x)}{\psi(x)} \sqrt{1-x^2} U_k(x) dx \quad (k=0, 1, \dots) \quad (1.9)$$

Первую формулу (1.6) можно найти, например, в [8] (стр. 847). Вторая является следствием более общего соотношения, приведенного в работе [9]. В формуле (1.8) согласно (1.6) вместо $-m^{-1} \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x)$ при $m=0$ необходимо положить $\arcsin x$.

Рассмотрим более подробно случай, когда сечение стержня постоянно, т. е. $F(x) = F(0)$ и $\psi(x) = 1$. Удобно представить функцию $\tau(x)$ в виде суммы двух слагаемых: $\tau(x) = \tau^+(x) + \tau^-(x)$, где $\tau^+(x)$ и $\tau^-(x)$ — соот-

ветственно четная и нечетная части функции $\tau(x)$. Тогда

$$\tau^+(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} X_{2m} T_{2m}(x) \quad (1.10)$$

и бесконечная система имеет вид

$$\frac{\pi}{2\lambda} X_{2k+2} + \sum_{m=1}^{\infty} X_{2m} B_{2m-1, 2k+1} = -B_{-1, 2k+1} X_0 - b_{2k+1} \quad (k=1, 0, \dots) \quad (1.11)$$

$$B_{2m-1, 2k+1} = -\frac{8(k+1)}{[4m^2 - (2k+1)^2][4m^2 - (2k+3)^2]} \quad (m, k=0, 1, \dots) \quad (1.12)$$

$$b_{2k+1} = \int_{-1}^1 g(x) \sqrt{1-x^2} U_{2k+1}(x) dx \quad (k=0, 1, \dots) \quad (1.13)$$

Подставляя (1.10) в (1.4), находим $X_0 = R / \pi ha$.

При получении коэффициентов $B_{2m-1, 2k+1}$ были использованы формулы

$$\int_{-1}^1 \arcsin x \sqrt{1-x^2} U_k(x) dx = \sin^2 \frac{k\pi}{2} \frac{4(k+1)}{k^2(k+2)^2} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (1.14)$$

$$\int_{-1}^1 (1-x)^2 U_m(x) U_k(x) dx = -\frac{4(k+1)(m+1)}{[(m+1)^2 - k^2][(m+1)^2 - (k+2)^2]} \cos^2 \frac{(m+k)\pi}{2} \pi \quad (m, k=0, 1, \dots) \quad (1.15)$$

которые легко проверяются, если в интегралах перейти к новой переменной $\gamma = \arccos x$ и воспользоваться формулами 10.11 (2) из [10].

Аналогичные результаты получаются для случая, когда $\tau(x) = \tau^-(x)$. Эти результаты могут быть получены из формул (1.10) — (1.13) заменой $2m-1$ на $2m$ и $2k+1$ на $2k$. Кроме того, в системе (1.11) необходимо положить $X_0 = 0$.

Займемся исследованием системы (1.11). Сначала покажем, что

$$\beta_k = \frac{2\lambda}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} |B_{2m-1, 2k+1}| \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (1.16)$$

т. е. для любых значений параметра λ ($0 \leq \lambda < \infty$) система (1.11) будет квазирегулярна.

Прежде всего заметим, что коэффициенты $B_{2m-1, 2k+1} < 0$ для всех m и k , за исключением случая, когда $m = k+1$. Выделяя этот член, перепишем (1.16) в виде

$$\beta_k = \frac{2\lambda}{\pi} \left[\frac{8(k+1)}{(4k+3)(4k+5)} - \sum_{m=1}^{\infty} \prime B_{2m-1, 2k+1} \right] \quad (1.17)$$

где штрих означает, что в сумме отсутствует член при $m = k+1$. Дополнив сумму в (1.17) отсутствующим членом, а затем представив коэффициент $B_{2m-1, 2k+1}$ в виде суммы двух слагаемых, получим два ряда, которые суммируются при помощи формулы 1.421(3) из [8]. После выполнения выкладок равенство (1.17) принимает вид

$$\beta_k = \frac{2\lambda}{\pi} \left[\frac{16(k+1)}{(4k+3)(4k+5)} - \frac{4(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \right] \quad (k=0, 1, \dots) \quad (1.18)$$

и, следовательно, условие (1.16) имеет место для всех $0 \leq \lambda < \infty$.

Система (1.11) будет регулярна, если $\beta_k < 1$, для всех k ($k = 0, 1, \dots$). Максимальное значение β_k , как это следует из (1.18), будет при $k = 0$. Тогда для всех k ($k = 0, 1, \dots$) имеет место неравенство $\beta_k \leq \beta_0 = 1.24 \lambda / \pi$, откуда следует, что при $\lambda < 2.5$ система (1.11) будет регулярна. Таким образом, для полученной бесконечной системы (1.11) условие регулярности оказывается шире, чем в работе [1], где получено условие $\lambda < 1.5$. Аналогичные выкладки для случая, когда $\tau(x) = \tau^-(x)$, приводят к результату $\lambda < 1.1$.

Конкретизируем вычисление коэффициентов b_{2k} и b_{2k+1} для некоторых частных случаев загрузок стержня. Пусть стержень загружен двумя сосредоточенными силами каждая величиной $0.5P$, приложенными в точках $x = \pm \xi$ и направленными вдоль оси x . Для этого случая имеем

$$\tau(x) = \tau^+(x), \quad g(x) = \frac{P}{2ah} [e(x + \xi) + e(x - \xi) - 1], \quad b_{2k+1} = \frac{P}{2ah} \sqrt{1 - \xi^2} \times \\ \times \left[\frac{U_{2k}(\xi)}{2k+1} - \frac{U_{2k+2}(\xi)}{2k+3} \right] \quad (1.19)$$

где $e(x)$ — единичная функция Хевисайда. Если $\xi = 1$ (силы приложены к торцам стержня) $b_{2k+1} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Если $\xi = 0$ (сила величиной P приложена посередине стержня), коэффициенты b_{2k+1} имеют вид

$$b_{2k+1} = (-1)^k \frac{2P}{ah} \frac{(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \quad (k=0,1,2,\dots)$$

При получении коэффициентов b_{2k+1} в (1.13) следует, как и выше, перейти к новой переменной $\gamma = \arccos x$.

Если силы направлены в разные стороны, то $\tau(x) = \tau^-(x)$ и для коэффициентов b_{2k} получаем формулу, аналогичную (1.19).

При этом, когда $\xi = 1$

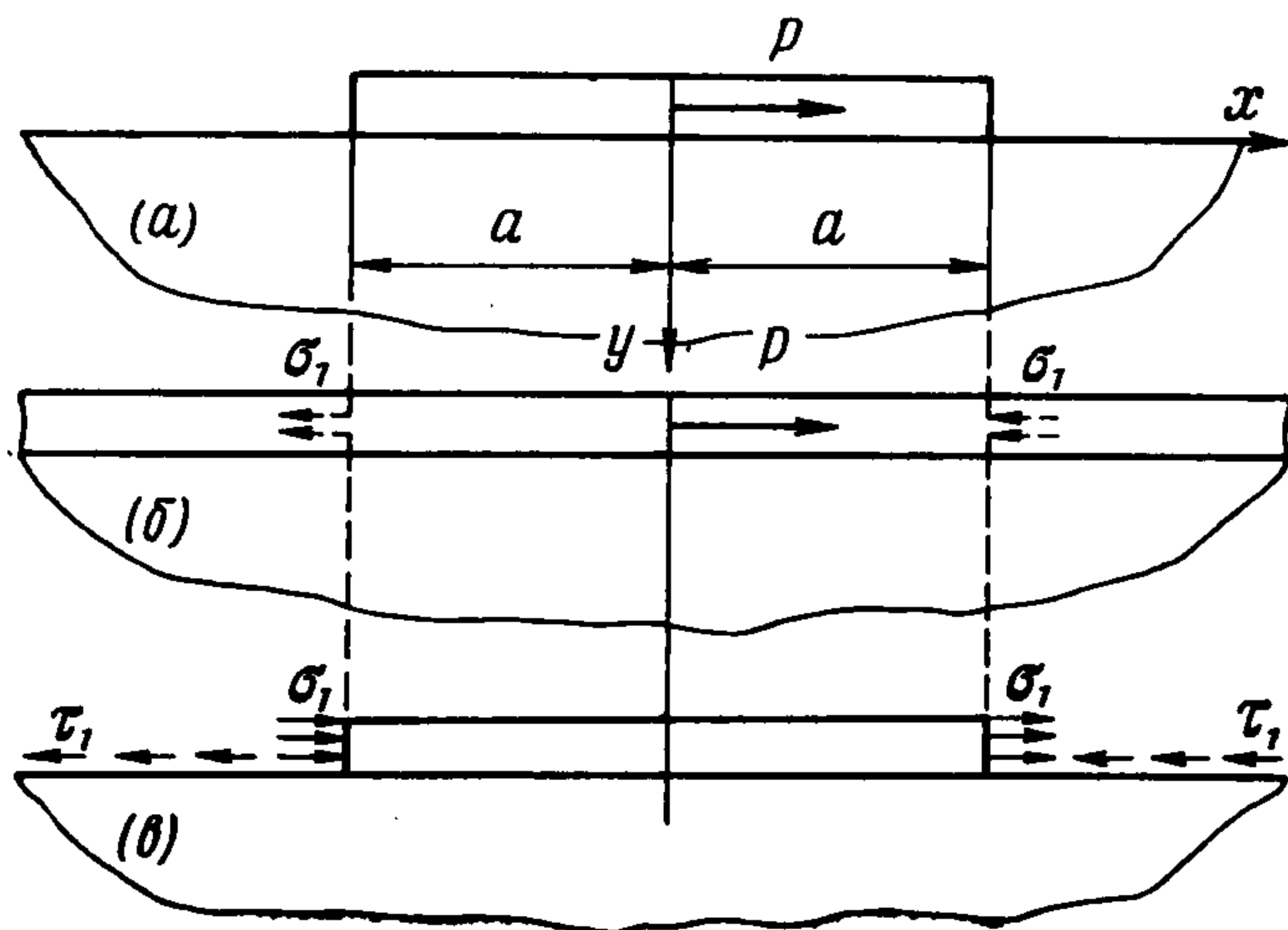
$$b_0 = -\pi P / 4ah, \quad b_{2k} = 0 \quad (k=1,2,\dots)$$

Как показывают вычисления, матрица коэффициентов системы (1.11) и аналогичной системы для случая $\tau = \tau^-$ имеет существенно диагональное преобладание, что, как известно, весьма благоприятно для вычислений. С другой стороны, это указывает на то, что убывание искоемых коэффициентов будет приблизительно таким же, как и коэффициентов правой части. Кроме того, убывание искоемых коэффициентов существенно зависит и от параметра λ . Например, для $\lambda = 1, 1.5, 5$, в случае $\xi = \pm 1$, потребовалось для вычисления σ или τ соответственно 3, 5 и 8 приближений. Количество приближений бралось таким, чтобы σ или τ в m -м приближении отличались от σ или τ в $m+1$ -м приближении не более чем на 5%.

При $\xi \neq \pm 1$ коэффициенты b_k представляют собой коэффициенты Фурье по полиномам Чебышева от разрывной функции и потому они медленно убывают. Кроме того, согласно точному решению Мелана [11] для бесконечного стержня, касательные напряжения под силой неограниченно возрастают. Поэтому решение, даваемое рядом (1.5) вблизи силы, будет сколь угодно отличаться от точного. Указанные трудности для случая $\xi = 0$ преодолеваются в следующем параграфе.

§ 2. Пусть сосредоточенная сила P приложена посередине стержня (фиг. 1, а). Поставленную задачу будем решать наложением задач б) и в) (фиг. 1, б, в). В дальнейшем через $\tau(x)$, $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ обозначены (знак плюс сверху, указывающий на четность функций, опускаем) контактные

напряжения, возникающие вдоль линии контакта стержней с пластинками, соответственно в задачах а), б) и в) (фиг. 1, а — в). В задаче в) по торцам стержня приложены напряжения $\sigma_1 = |\sigma_x(\pm a)|$, возникающие в сечениях $x = \pm a$ бесконечного стержня (фиг. 1, б).



Решение задачи б), данное Меланом [11], имеет вид

$$\tau_1(x) = \frac{\lambda P}{\pi a h} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\lambda + \alpha} d\alpha =$$

$$= -\frac{\lambda P}{\pi a h} (\sin \lambda x \operatorname{si} \lambda x + \cos \lambda x \operatorname{ci} \lambda x) \quad (2.1)$$

где $\operatorname{si}(y)$, $\operatorname{ci}(y)$ — интегральный синус и косинус соответственно

Для функций, входящих в (2.1), существуют таблицы и построение эпюры $\tau_1(x)$ не представляет затруднений. Задачу в) решим методом, изложенным в предыдущем параграфе. В этом случае для коэффициентов b_{2k+1} , имеем формулу

$$b_{2k+1} = \frac{1}{\pi \lambda} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} U_{2k+1}(x) dx \left(\int_{-\infty}^{\infty} - \int_{-1}^1 \right) \frac{\tau_1(t)}{x-t} dt$$

Подставим (2.1) в последнюю формулу, изменим порядок интегрирования и воспользуемся соотношениями

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(x)}{\lambda+x} dx = \frac{(-1)^{n+1}}{2} [S_n(\lambda) + \pi E_n(\lambda) + \pi N_n(\lambda)] = \int_0^{\infty} e^{-nx-\lambda \operatorname{sh} x} dx \quad (2.2)$$

$$(n=0, 1, \dots, \lambda > 0)$$

$$\int_{-1}^1 \cos \alpha x T_{2k}(x) dx = -2c_{0,2k} J_0(\alpha) - 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{2n,2k} J_{2n}(\alpha) \quad (2.3)$$

а также формулами 3.722(8), 7.344(2) и 6.561(14) из [8]; в результате получим

$$b_{2k+1} = \frac{P}{a h} \{ (-1)^k \lambda^{-1} (k+1) [(k+1)^{-1} + S_{2k+2}(\lambda) + \pi E_{2k+2}(\lambda) +$$

$$+ \pi N_{2k+2}(\lambda)] + c_{0,2k+2} [E_0(\lambda) + N_0(\lambda)] + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n c_{2n,2k+2} [S_{2n}(\lambda) +$$

$$+ \pi E_{2n}(\lambda) + \pi N_{2n}(\lambda)] \} \quad (2.4)$$

Здесь $S_n(x)$ — полиномы Шлефли ([8], стр. 1003), $E_n(x)$ — функция Вебера ([8], стр. 1002), $N_n(x)$ — функция Неймана, $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода и наконец

$$c_{2n,2k} = \frac{4(n^2+k^2)-1}{[(2n+1)^2-4k^2][(2n-1)^2-4k^2]} \quad (n, k=0, 1, \dots)$$

Соотношение (2.2) нетрудно получить, если воспользоваться тождеством

$$\int_0^{\infty} \frac{J_n(x)}{\lambda + x} dx = \int_0^{\infty} J_n(x) dx \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+x)t} dt, \quad \lambda > 0$$

изменить порядок интегрирования и принять во внимание формулы 6.611(1), 3.374(2) из [8] и 7.12(47) из [10]. Для получения соотношения (2.3) следует вместо $\cos \alpha x$ подставить его ряд по полиномам Чебышева первого рода и проинтегрировать почленно. Ряды входящие, в (2.3) и (2.4), сходятся достаточно быстро.

Контактные напряжения в задаче а) будут $\tau(x) = \tau_1(x) + \tau_2(x)$, где $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$ определены формулами (1.10) и (2.1). Нормальные напряжения в стержне, как нетрудно проверить, определяются формулой

$$\sigma(x) = -\sigma_1 + \frac{ah}{F(0)} \left[X_0 \left(\arcsin x + \frac{\pi}{2} \right) - \sqrt{1-x^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X_{2m}}{2m} U_{2m-1}(x) \right] + \\ + \frac{P}{\pi F(0)} [\cos \lambda x \operatorname{si} \lambda x - \sin \lambda x \operatorname{ci} \lambda x]$$

Последнее слагаемое определяет нормальные напряжения в задаче Мелана [11].

Наибольшие трудности доставляет вычисление коэффициентов b_{2k+1}^1 . Однако для получения практически приемлемого решения в некоторых случаях ими можно пренебречь. Другими словами, решение задачи а) можно получить наложением задач б) и в) без учета касательных напряжений $\tau_1(x)$, приложенных вне интервала $(-a, a)$ в задаче в). Для иллюстрации этого факта приведена таблица, в которой даны значения

0	x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
1	σ	0.500	0.403	0.342	0.303	0.265
2		0.500	0.403	0.342	0.301	0.263
3	τ	∞	0.672	0.490	0.398	0.342
4		∞	0.675	0.496	0.406	0.355
5	σ	0.149	0.148	0.145	0.139	0.131
6		0	0.0241	0.0472	0.0685	0.0879
7	τ	0.126	0.124	0.117	0.107	0.0948
8		0	0.0446	0.0836	0.113	0.131

0	x	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
1	σ	0.233	0.203	0.174	0.143	0.103	0
2		0.229	0.197	0.166	0.132	0.0914	0
3	τ	0.307	0.292	0.294	0.336	0.481	∞
4		0.325	0.314	0.319	0.357	0.476	∞
5	σ	0.122	0.110	0.0963	0.0798	0.0578	0
6		0.106	0.125	0.149	0.186	0.272	∞
7	τ	0.0812	0.0671	0.0532	0.0396	0.0256	0
8		0.140	0.140	0.137	0.136	0.150	∞

σ и τ , вычисленные с учетом указанных напряжений (первая и третья строки) и без них (вторая и четвертая строки), для $\lambda = 1.0$. Табличные данные τ даны в долях P/ah , а σ — в долях $P/F(0)$. Как видно из таблицы, максимальная погрешность между нормальными напряжениями, вычисленная с учетом и без учета $\tau_1(x)$ вне интервала $(-a, a)$

составляет 12.7% и наблюдается вблизи концов стержня, где эти напряжения наименьшие. Для касательных напряжений погрешность не превышает 7.8%. Указанные погрешности с увеличением параметра λ уменьшаются и, например, для $\lambda = 5$ составляют соответственно 4.8% и 2.3%. В отличие от § 1 количество приближений бралось таким, чтобы σ или τ в m -м приближении отличалось от σ или τ в $m + 1$ -м приближении в четвертом знаке.

§ 3. Рассмотрим следующую задачу термоупругости. В полуплоскости в точке $x = 0$, $y = \eta$ действует источник тепла, мощностью W_0 ; граница $x = 0$ поддерживается при температуре $t^\circ = 0$ и отсутствует теплообмен в плоскостях, ограничивающих пластинку. Записав условия совместной деформации пластинки и стержня при $|x| \leq a$, и используя выражения (25.28) из [4], сведем задачу к уравнению (1.3), но при этом

$$g(x) = \frac{W_0 E_2 \alpha_t}{2\pi\theta\lambda} \frac{\eta^2}{\eta^2 + x^2}, \quad R = 0$$

Здесь и в дальнейшем через α_t и θ обозначены соответственно коэффициент линейного расширения и коэффициент теплопроводности пластинки.

В этом случае $\tau(x) = \tau^-(x)$ и, следовательно, система (1.7) содержит только нечетные неизвестные, а коэффициенты правой части надлежит вычислять по формуле

$$b_{2k} = (-1)^k \frac{W_0 E_2 \alpha_t \eta}{2\theta\lambda} (\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^{2k+1}$$

Аналогичные результаты имеем в случае, когда в точке $x = 0$, $y = \eta$ помещен центр термоупругой деформации ([4], стр. 225)

$$g(x) = \frac{2E_1 F(0) \alpha_t}{\pi a^3 h} \frac{(\eta^2 - x^2)}{(\eta^2 + x^2)^2}$$

$$b_{2k} = \frac{2E_1 F(0) \alpha_t}{a^3 h} (-1)^k (2k + 1) \frac{(\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^{2k+1}}{\sqrt{1 + \eta^2}}$$

Приведенные выше формулы для b_{2k} следуют из разложений

$$\frac{1}{\eta^2 + x^2} = \frac{2}{\eta} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^{2m+1} U_{2m}(x), \quad \eta^2 > 0$$

$$\frac{\eta^2 - x^2}{(\eta^2 + x^2)^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + \eta^2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m + 1) (\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^{2m+1} U_{2m}(x), \quad \eta^2 > 0$$

вытекающих из соотношений

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\eta^2 + x^2} U_{2m}(x) dx = \frac{\pi}{\eta} \cos \frac{m\pi}{2} (\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^{m+1} \quad (3.1)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{(\eta^2 - x^2)}{(\eta^2 + x^2)^2} \sqrt{1-x^2} U_m(x) dx = \pi (m + 1) \cos \frac{m\pi}{2} \frac{(\sqrt{1 + \eta^2} - \eta)^{m+1}}{\sqrt{1 + \eta^2}} \quad (3.2)$$

$$(\eta^2 > 0; \quad m = 0, 1, \dots)$$

Последние формулы легко проверить, если вместо функций $(\eta^2 + x^2)^{-1}$ и $(\eta^2 - x^2)/(\eta^2 + x^2)^2$ подставить соответственно в (3.1) и (3.2) их интегральные представления, даваемыми формулами 3.893 (2) и 3.944 (12) из [8], изменить порядок интегрирования, перейти к новой переменной $\gamma = \arccos x$ и воспользоваться формулами 3.715 (18), 6.611 (1), 6.623 (3) из [8] и 10.11 (2) из [10].

Численные данные для случая $\lambda = \eta = 1$ приведены в таблице. Строки 5 и 6 относятся к случаю, когда в точке $x = 0, y = \eta = 1$ полуплоскости действует источник тепла, а строки 7 и 8 — к случаю, когда в той же точке помещен центр термоупругой деформации. В случае источника величины σ и τ , приведенные в таблице, необходимо умножить соответственно на $W_0 E_2 \alpha_t a h / 2\theta F(0)$ и $W_0 E_2 \alpha_t / 2\theta$, а в случае центра термоупругой деформации — соответственно на $2E_2 \alpha_t h / a F(0)$ и $2E_2 \alpha_t / a^2$. Для подсчета τ оказалось достаточным взять пять приближений, а для подсчета σ — два. Количество приближений определялось как в § 1. С возрастанием λ количество приближений необходимо увеличивать. Так, при $\lambda = 5$ для подсчета τ необходимо взять восемь приближений, а для подсчета σ — два. Количество приближений зависит и от η , но в меньшей степени.

§ 4. Зная $\tau(x)$, из условия равновесия можно найти выражение для нормальных напряжений, действующих в стержне. Некоторые авторы [3], предпочитают определять сначала функцию $\varphi(x)$, которая дает уменьшение осевого усилия в стержне. В таких случаях удобно найти сразу эту функцию из уравнения

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} + \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-1}^1 \frac{\varphi'(t)}{x-t} dt = \frac{g(x)}{\psi(x)}$$

где $\psi(x)$ имеет тот же смысл, что и выше. В теории крыла функция $\varphi(x)$ имеет смысл циркуляции воздушного потока вокруг крыла, обозначаемого обычно через $\Gamma(x)$, а $\psi(x)$ — функция, описывающая контур крыла. Известно, что функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$, поэтому ищем ее в виде

$$\varphi(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} Y_m U_m(x), \quad \varphi'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) Y_m T_{m+1}(x)$$

Аналогично, как и в случае уравнения (1.3), приходим к бесконечной системе

$$\frac{\pi}{2\lambda} (k+1) Y_k + \sum_{m=0}^{\infty} Y_m C_{m,k} = b_k \quad (k=0, 1, \dots) \quad (4.1)$$

$$C_{m,k} = \int_{-1}^1 \frac{(1-x^2)}{\psi(x)} U_m(x) U_k(x) dx \quad (m, k=0, 1, \dots) \quad (4.2)$$

а коэффициенты b_k даются формулой (1.9).

Пусть $\psi(x) = 1$. В этом случае коэффициенты $C_{m,k}$ определяются по формуле (1.15). Удобно, как и выше, разбить задачу на четную и нечетную. В четном случае имеем

$$\varphi^+(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{2m} U_{2m}(x)$$

и система (4.1) приобретает вид

$$\frac{\pi}{2\lambda} Y_{2k} (2k+1) + \sum_{m=0}^{\infty} Y_{2m} C_{2m,2k} = b_{2k} \quad (k=0, 1, \dots) \quad (4.3)$$

а коэффициенты $C_{2m, 2k}$ даются выражением¹

$$C_{2m, 2k} = - \frac{4(2k+1)(2m+1)}{[(2m+1)^2 - 4k^2][(2m+1)^2 - (2k+2)^2]} \quad (m, k = 0, 1, \dots)$$

Аналогичные результаты получаем в случае, когда функция $\varphi(x)$ нечетная

$$\varphi^-(x) = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{\infty} Y_{2m+1} U_{2m+1}(x)$$

$$\frac{\pi}{2\lambda} Y_{2k+1}(2k+2) + \sum_{m=0}^{\infty} Y_{2m+1} C_{2m+1, 2k+1} = b_{2k+1} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (4.4)$$

$$C_{2m+1, 2k+1} = - \frac{16(m+1)(k+1)}{[(2m+2)^2 - (2k+1)^2][(2m+2)^2 - (2k+3)^2]} \quad (m, k = 0, 1, \dots)$$

Для систем (4.3) и (4.4) сохраняются результаты, изложенные в § 1, поскольку последние сводятся к системам, изученным там.

Чтобы в этом убедиться в системе (4.3), следует ввести новые неизвестные $X_{2k+1} = (2k+1)Y_{2k}$, тогда она перейдет в систему для случая, когда $\tau(x) = \tau^-(x)$. Аналогично в системе (4.4) введем новые неизвестные по формуле $X_{2k+2} = (2k+2)Y_{2k+1}$ и заменим индекс m на $m-1$. Полученная таким образом система будет совпадать с системой (1.11).

В заключение остановимся на некоторых случаях, когда сечение стержня переменное по длине. Пусть сечение стержня изменяется по линейному закону. Положим $\psi(x) = 1 - \alpha x$ ($\alpha \leq 1$). Подставляя в (1.8) вместо $[\psi(x)]^{-1}$ его разложение по полиномам Чебышева второго рода (см. [12], стр. 31) и интегрируя почленно, придем к следующему выражению для коэффициентов $B_{m-1, k}$ ($m, k = 0, 1, \dots$):

$$B_{m-1, k} = - \frac{8p}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} p^n \sin^2 \frac{m+k+n}{2} \pi \frac{(n+1)(k+1)}{[m^2 - (n+k+2)^2][m^2 - (n-k)^2]}$$

$$p = (1 - \sqrt{1 - \alpha^2})/\alpha \quad (4.5)$$

Ряд в (4.5) сходится быстро, так как всегда $p \leq 1$.

В качестве второго примера, рассмотрим случай, когда сечение стержня изменяется по эллиптическому закону, т. е. случай, когда $\psi(x) = \sqrt{1-x^2}$. Из формул (1.7) — (1.9) следует

$$B_{m-1, k} = B_{k, k} = \frac{\pi}{2(k+1)}, \quad X_{k+1} = - \frac{2\lambda(k+1)}{\pi(\lambda+k+1)} (B_{-1, k} X_0 + b_k) \quad (m, k = 0, 1, \dots)$$

В частности, если $g(x) = M\sqrt{1-x^2}$ ($M = \text{const}$) и $X_0 = 0$, получаем точное решение

$$\tau^-(x) = - \frac{\lambda M}{\lambda + 1} \frac{x}{1 - x^2}$$

¹ После отсылки работы в редакцию нам стало известно, что такая же формула получена В. В. Голубевым (Труды ЦАГИ, 1931, вып. 108) более длинным путем. При этом использовался метод тригонометрических рядов.

Аналогичные выкладки применительно к системе (4.4) приводят к результату

$$C_{m,k} = C_{k,k} = \frac{\pi}{2}, \quad Y_k = \frac{2\lambda b_k}{\pi(\lambda + k + 1)} \quad (m, k=0, 1, \dots)$$

Если $g(x) = M \sqrt{1-x^2}$ ($M = \text{const}$) имеем

$$Y_0 = \frac{\lambda M}{\lambda + 1}, \quad \varphi^+(x) = \frac{\lambda M}{\lambda + 1} \sqrt{1-x^2}$$

Последняя формула хорошо известна в теории крыла.

В общем случае функцию $[\psi(x)]^{-1}$ следует интерполировать полиномами Чебышева второго рода

$$\frac{1}{\psi(x)} = \sum_{n=0}^N a_n U_n(x)$$

Формула (4.2) приводит в этом случае к следующему выражению для коэффициентов $C_{m,k}$:

$$C_{m,k} = -4(m+1) \sum_{n=0}^N \frac{a_n (n+k+1) \cos^2[(m+n+k)\pi/2]}{[(m+1)^2 - (n-k)^2][(m+1)^2 - (n+k+2)^2]} \quad (m, k=0, 1, \dots)$$

Теорию и практику интерполирования ортогональными многочленами можно найти в работе [13].

Поступила 2 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. А р у т ю н я н Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. Л а р ь к и н Ю. И., О передаче нагрузки от ребра конечной длины упругой пластине. Строит. механ. и расч. сооруж., 1968, вып. 5.
3. В u f l e r Н. Scheibe mit endlicher elastischer Versteifung. VDI — Forschungsh., 1961, No. 485, S. 44.
4. Н о в а ц к и й В. Вопросы термоупругости. М., Изд-во АН СССР, 1962.
5. К а р а ф о л и Е. Аэродинамика крыла самолета. М., Изд-во АН СССР, 1956.
6. К а л а н д и я А. И. Об одном прямом методе решения уравнения крыла и его применение в теории упругости. Матем. сб., 1957, № 2.
7. П о п о в Г. Я. О методе ортогональных многочленов в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
8. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е, М., Физматгиз, 1962.
9. П о п о в Г. Я. Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби. Укр. матем. ж., 1968, т. 20, вып. 4.
10. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, параболического цилиндра, ортогональные многочлены. М., «Наука», 1966.
11. М е l a n Е., Ein Beitrag zur Theorie geschweisster Verbindungen. Ing.-Arch., 1932, Bd 3, H. 2.
12. Л ю с т е р н и к Л. А., Ч е р в о н е н к и с О. А., Я н п о л ь с к и й А. Р. Математический анализ. Вычисление элементарных функций. М., Физматгиз, 1963.
13. Л а н ц о ш К. Практические методы прикладного анализа. М., Физматгиз, 1961.