Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

УРАВНЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ТЕЛА С ТОНКОСТЕННОЙ УПРУГОЙ ОБОЛОЧКОЙ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Э. И. Григолюк, Ф. Н. Шклярчук

(Москва)

Выводятся линейные уравнения возмущенного движения тонкостенной упругой оболочки, частично заполненной тяжелой сжимаемой жидкостью, рассматриваемой в акустическом приближении, и определяется главный вектор и главный момент реакций, действующих со стороны оболочки на «несущее тело». Возмущенное движение при малых колебаниях характеризуется перемещением некоторой точки, связанной с жестким контуром закрепления оболочки, поворотом относительно этой точки и упругими перемещениями, которые представлены в виде разложения по собственным формам колебаний закрепленной оболочки, частично заполненной жидкостью. Для определения собственных частот и форм колебаний оболочки с сжимаемой жидкостью используется вариационный принцип.

Учет сжимаемости жидкости позволяет рассматривать колебания в акустическом спектре частот и, кроме того, как показывают расчеты, может оказаться необходимым при расчете низших частот упругих колебаний оболочки, например осесимметричных колебаний сравнительно толстых оболочек вращения. Учет гравитации необходим при рассмотрении колебаний в спектре частот гравитационных] поверхностных волн, а также — колебаний мягких оболочек с жидкостью.

1. Постановка задачи. Рассмотрим возмущенное движение некоторого «несущего» тела и прикрепленной к нему тонкостенной упругой оболочки, частично заполненной идеальной сжимаемой жидкостью. Оболочка присоединена к несущему телу по контуру Г, который будем считать недеформируемым.

Чтобы не ограничиваться какой-либо конкретной моделью несущего тела, например абсолютно твердым телом, отделим оболочку с жидкостью от несущего тела по контуру Г, запишем для нее уравнения возмущенного движения и определим главный вектор $\mathbf{T}$ и главный момент $\mathbf{H}$, действующие в возмущенном движении на несущее тело по контуру Г со стороны оболочки. После этого можно записать уравнения возмущенного движения несущего тела с учетом реакций $\mathbf{T}$ и $\mathbf{H}$, и, таким образом, получим замкнутую систему уравнений возмущенного движения.

Возмущенное движение оболочки с жидкостью будем характеризовать вектором малых перемещений оболочки $\mathbf{u}$ и потенциалом малых перемещений жидкости Ф в системе координат $Ox_1x_2x_3$, совершающей поступательное движение, которое совпадает с невозмущенным движением тела. При этом ось Ox_1 выберем так, чтобы она была перпендикулярна невозмущенной поверхности жидкости σ, т. е. ось Ox_1 направим в сторону, противоположную вектору массовых сил $\mathbf{g}$.

Уравнения возмущенного движения оболочки с жидкостью получим при помощи вариационного принципа Лагранжа

$$\delta \Pi + \iint_S m \mathbf{u}^{\cdot\cdot} \delta \mathbf{u} dS + \rho \iiint_\tau \nabla \Phi^{\cdot\cdot} \delta \nabla \Phi \, d\tau - \delta A = 0 \tag{1.1}$$

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{\rho g}{2} \iint_\sigma \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \nu} \right)^2 d\sigma + \frac{\rho c^2}{2} \iiint_\tau (\Delta \Phi)^2 d\tau \tag{1.2}$$

Здесь Π — потенциальная энергия системы оболочка плюс сжимаемая жидкость; m, ρ и c — удельная масса оболочки, отнесенная к площади срединной поверхности, плотность и скорость звука в жидкости, S и σ — поверхность оболочки и свободная поверхность жидкости, τ — объем, занятый жидкостью, $\boldsymbol{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности, ограничивающей объем τ; $gH/c^2 \ll 1$, $\rho \approx \text{const}$.

Величина Π_0 в (1.2) представляет собой потенциальную энергию деформации оболочки в возмущенном движении с учетом сил в ее срединной поверхности, возникающих в невозмущенном движении и, кроме того, в Π_0 включена часть потенциальной энергии массовых сил жидкости, зависящая только от перемещений оболочки, которую можно получить, считая поверхность жидкости неподвижной. Потенциальная энергия массовых сил жидкости за счет перемещений свободной поверхности представлена вторым членом в выражении (1.2); третий член учитывает потенциальную энергию сжатия жидкости в акустическом приближении.

Вариация работы удельной поверхностной нагрузки $\mathbf{q}$, приложенной к оболочке, с учетом реакций $\mathbf{T}$ и $\mathbf{H}$ между оболочкой и несущим телом равна

$$\delta A = \iint_S \mathbf{q} \delta \mathbf{u} \, ds - \mathbf{T} \delta \mathbf{u}_0 - \mathbf{H} \delta \boldsymbol{\theta}_0 \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}_0$ и $\boldsymbol{\theta}_0$ — вектор перемещения некоторой точки O', жестко связанной с контуром Γ, и вектор малого поворота относительно этой точки, характеризующие движение недеформированной оболочки.

При использовании уравнения (1.1) необходимо, чтобы выполнялись кинематические граничные условия на краях оболочки, кинематическое граничное условие на смоченной поверхности оболочки S_0

$$\partial \Phi / \partial \nu - \boldsymbol{\nu} \mathbf{u} = 0 \quad \text{на } S_0 \tag{1.4}$$

а в случае несжимаемой жидкости ($c \to \infty$), кроме того, должно выполняться уравнение неразрывности

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{в } \tau \tag{1.5}$$

2. Условия ортогональности собственных форм колебаний оболочки, частично заполненной жидкостью. Пусть известны собственные частоты ω_n и собственные формы колебаний $\mathbf{u}_n$, Φ_n оболочки, частично заполненной сжимаемой жидкостью, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta\Phi_n + \frac{\omega^2{}_n}{c^2}\Phi_n = 0 \quad \text{в } \tau$$

$$\frac{\partial\Phi_n}{\partial\nu} - \nu u_n = 0 \quad \text{на } S_0, \qquad g\frac{\partial\Phi_n}{\partial\nu} - \omega^2{}_n\Phi_n = 0 \quad \text{на } \sigma$$

$$L(\mathbf{u}_n) - \omega^2{}_n m\mathbf{u}_n - \omega^2{}_n\varepsilon\rho\Phi_n\mathbf{v} = 0 \quad \text{на } S \tag{2.1}$$

и соответствующим граничным условиям на краях оболочки. В последнем уравнении $L(\cdots)$ представляет линейный самосопряженный дифференциальный оператор уравнений оболочки, соответствующий потенциальной энергии Π_0

$$\delta\Pi_0 = \iint_S L(\mathbf{u})\,\delta\mathbf{u}\,dS \tag{2.2}$$

если $\mathbf{u}$ удовлетворяет всем граничным условиям на краях оболочки; $\varepsilon = 1$ на S_0 и $\varepsilon = 0$ на $S - S_0$.

Для вывода условий ортогональности используем вариационный принцип Лагранжа при $\delta A = 0$

$$\delta\Pi + \iint_S m\mathbf{u}^{\cdot\cdot}\delta\mathbf{u}\,dS + \rho\iiint_\tau \nabla\Phi^{\cdot\cdot}\delta\nabla\Phi d\tau = 0 \tag{2.3}$$

Полагаем, что свободные колебания происходят в виде суперпозиции двух собственных форм: n-й и m-й

$$\mathbf{u} = q_n\mathbf{u}_n + q_m\mathbf{u}_m, \qquad \Phi = q_n\Phi_n + q_m\Phi_m \tag{2.4}$$

$$q_n(t) = q_n{}^\circ\cos(\omega_n t + \gamma_n), \qquad q_m(t) = q_m{}^\circ\cos(\omega_m t + \gamma_m)$$

Подставляя (2.4) в (2.3) и учитывая произвольность вариаций δq_n и δq_m, получим два уравнения

$$\sum_{=n,m}\left[k_{ij} - \omega_j{}^2\left(\iint_S m\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j dS + \rho\iiint_\tau \nabla\Phi_i\nabla\Phi_j d\tau\right)\right]q_j = 0 \quad (i = n, m) \tag{2.5}$$

где k_{ij} есть коэффициенты в разложении потенциальной энергии

$$\Pi = {}^1/_2\sum_i\sum_j k_{ij}q_iq_j$$

В уравнениях (2.5) сначала положим $q_n \not\equiv 0$ и $q_m \equiv 0$ и затем — $q_n \equiv 0$, $q_m \not\equiv 0$, тогда получим

$$k_{ij} - \omega_j{}^2\left(\iint_S m\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j dS + \rho\iiint_\tau \nabla\Phi_i\nabla\Phi_j d\tau\right) = 0 \tag{2.6}$$

$$(i = n, m; \ j = n, m)$$

Если записать уравнение (2.6) при $i = n$, $j = m$ и затем вычесть из него уравнение (2.6) при $i = m$, $j = n$, учитывая симметрию коэффициентов k_{nm} $(k_{nm} = k_{mn})$, при $n \neq m$ получим условия ортогональности собственных форм

$$\iint\limits_S m\mathbf{u}_n\mathbf{u}_m dS + \rho \iiint\limits_\tau \nabla\Phi_n\nabla\Phi_m d\tau = 0 \qquad (n \neq m) \tag{2.7}$$

Кроме того, из уравнения (2.6) при $i = n$, $j = m$ $(n \neq m)$ следует $k_{nm} = 0$ или с учетом (1.2), (2.2)

$$\iint\limits_S L(\mathbf{u}_n)\,\mathbf{u}_m dS + \rho g \iint\limits_\sigma \frac{\partial\Phi_n}{\partial\nu}\cdot\frac{\partial\Phi_m}{\partial\nu}\,d\sigma + \rho c^2 \iiint\limits_\tau \Delta\Phi_n\Delta\Phi_m d\tau = 0 \quad (n \neq m) \tag{2.8}$$

При $i = j = n$ уравнение (2.6) дает

$$k_{nn} = \omega_n^2 m_n, \qquad m_n = \iint\limits_S m\mathbf{u}_n^2 dS + \rho \iiint\limits_\tau (\nabla\Phi_n)^2\, d\tau \tag{2.9}$$

представляет присоединенную массу при n-й форме собственных колебаний.

Вместо (2.7), (2.8) и (2.9) можно записать также ряд других эквивалентных им соотношений, если учесть уравнения (2.1) и формулу Грина для преобразования объемного интеграла.

3. Уравнения возмущенного движения оболочки с жидкостью. Вектор перемещения точек срединной поверхности оболочки и потенциал перемещений частиц жидкости в возмущенном движении представим в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\theta}_0 \times \mathbf{r}' + \sum_{n=1}^{\infty} q_n\mathbf{u}_n, \qquad \Phi = \mathbf{u}_0\mathbf{r}' + \boldsymbol{\theta}_0\boldsymbol{\Psi} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n\Phi_n \tag{3.1}$$

$$(\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0' = x_1'\mathbf{i}_1 + x_2'\mathbf{i}_2 + x_3'\mathbf{i}_3)$$

Здесь $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0'$ — радиусы-векторы рассматриваемой точки и точки O'; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — единичные орты системы координат $Ox_1x_2x_3$; x_1', x_2', x_3' — координаты, отсчитываемые от точки O'; $\mathbf{u}_n$, Φ_n — собственные формы колебаний закрепленной по контуру Г оболочки с жидкостью, $\mathbf{u}_n|_\Gamma = 0$; $q_n(t)$ — обобщенные координаты, характеризующие деформации оболочки, жидкости и волновые движения свободной поверхности жидкости.

Векторную функцию $\boldsymbol{\Psi} = \Psi_1\mathbf{i}_1 + \Psi_2\mathbf{i}_2 + \Psi_3\mathbf{i}_3$, описывающую движение жидкости при повороте недеформированной оболочки, будем считать гармонической в области τ, а на свободной поверхности σ в общем случае будем считать ее произвольной. При этом волновое уравнение в τ и динамическое граничное условие на σ будут удовлетворяться за счет обобщенных координат q_n, поскольку они являются коэффициентами системы функций Φ_n, полной в τ и на $S_0 + \sigma$. Таким образом $\boldsymbol{\Psi}$ удовлетворяет следующему уравнению и граничному условию:

$$\Delta\boldsymbol{\Psi} = 0 \quad \text{в } \tau, \qquad \frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial\nu} = \mathbf{r}' \times \boldsymbol{\nu} \quad \text{на } S_0 \tag{3.2}$$

На поверхности σ функцию Ψ можно подчинить одному из следующих условий: 1) следуя [1,2], функция Ψ составляется из потенциалов Жуковского, описывающих такое движение жидкости, при котором свободная поверхность, оставаясь плоской, поворачивается вместе с недеформированной оболочкой; при этом $\partial\Psi / \partial\nu = \mathbf{r}' \times \mathbf{\nu}$ на σ; 2) следуя [3], функция Ψ описывает такое движение при повороте недеформированной оболочки, при котором свободная поверхность жидкости остается плоской и параллельной невозмущенной свободной поверхности, $d\Psi / \partial\nu = \mathbf{c}$ на σ, где $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i}_1 + c_2\mathbf{i}_2 + c_3\mathbf{i}_3$ определяются из условия сохранения объема жидкости

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = \frac{1}{S_\sigma}\iint\limits_\sigma x_3' d\sigma, \qquad c_3 = -\frac{1}{S_\sigma}\iint\limits_\sigma x_2' d\sigma$$

3) при расчете «быстрых» движений оболочки, когда низшие формы гравитационных волн на свободной поверхности почти не возбуждаются и влиянием g можно пренебречь, функцию Ψ удобно подчинить условию $\Psi = 0$ на σ.

Вычислим сначала вариацию работы инерционных сил оболочки и жидкости. Используя разложения (3.1), учитывая (3.2) и условия ортогональности (2.7), после преобразований получим

$$\iint\limits_S m\mathbf{u}^{\cdot\cdot}\delta\mathbf{u}dS + \rho\iiint\limits_\tau \nabla\Phi^{\cdot\cdot}\delta\nabla\Phi d\tau = \left[\mathbf{u}_0^{\cdot\cdot}m_0 + \mathbf{\theta}^{\cdot\cdot}{}_0\mathrm{S} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{\cdot\cdot}\mathbf{m}_{0n}\right]\delta\mathbf{u}_0 +$$
$$+\left[\mathbf{u}_0^{\cdot\cdot}\mathrm{S}' + \mathbf{\theta}_0^{\cdot\cdot}\mathbf{J} + \sum_{n=1}^{\infty} q^{\cdot\cdot}{}_n\mathbf{\lambda}_{0n}\right]\delta\mathbf{\theta}_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\mathbf{u}_0^{\cdot\cdot}\mathbf{m}_{0n} + \mathbf{\theta}_0^{\cdot\cdot}\mathbf{\lambda}_{0n} + q_n^{\cdot\cdot}m_n\right]\delta q_n \qquad (3.3)$$

Здесь m_0 — масса оболочки с жидкостью, S и J — тензор статических моментов и тензор инерции (S′ — сопряженный тензор)

$$\mathrm{S} = \begin{bmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ -S_3 & 0 & S_1 \\ S_2 & -S_1 & 0 \end{bmatrix} + [S_{jk}]$$

$$S_k = \iint\limits_S m x_k' dS, \qquad S_{jk} = \rho\iint\limits_{S_0+\sigma} x_j' \frac{\partial\Psi_k}{\partial\nu} dS$$

$$\mathbf{J} = [J_{jk}^\circ] + [J_{jk}]$$

$$J_{jk}^\circ = \iint\limits_S m\left(\delta_{jk}\mathbf{r}'^2 - x_j'x_k'\right)dS, \qquad J_{jk} = \rho\iint\limits_{S_0+\sigma} \Psi_j \frac{\partial\Psi_k}{\partial\nu} dS$$

(δ_{jk} — символ Кронеккера; $j, k = 1, 2, 3$)

$$\mathbf{m}_{0n} = \iint\limits_S m\mathbf{u}_n dS + \rho\iint\limits_{S_0+\sigma} \Phi_n \mathbf{\nu} dS$$

$$\mathbf{\lambda}_{0n} = \iint\limits_S m(\mathbf{r}' \times \mathbf{u}_n)dS + \rho\iint\limits_{0+\sigma} \Phi_n \frac{\partial\Psi}{\partial\nu} dS \qquad (3.4)$$

Запишем теперь вариацию потенциальной энергии оболочки и жидкости. Подставляя в (1.2) разложения (3.1) и учитывая условие ортогональности собственных форм (2.8), получим

$$\delta\Pi = \left[\theta_0 \mathbf{C} + \sum_{n=1}^{\infty} q_n \varkappa_{0n}\right] \delta\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [\theta_0 \varkappa_{0n} + q_n \omega_n^2 m_n]\, \delta q_n \tag{3.5}$$

где

$$\mathbf{C} = [C_{jk}], \qquad C_{jk} = \rho g \iint_\sigma \frac{\partial \Psi_j}{\partial \nu} \frac{\partial \Psi_k}{\partial \nu}\, d\sigma + \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \theta_{0j} \partial \theta_{0k}}$$

$$\varkappa_{0n} = \rho g \iint_\sigma \frac{\partial \Phi_n}{\partial \nu} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}\, d\sigma + \frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial \theta_0 \partial q_n} \tag{3.6}$$

Выражение δA (1.3) с учетом (3.1) и $\mathbf{u}_n \mid_\Gamma = 0$ запишется так:

$$\delta A = (\mathbf{P} - \mathbf{T})\, \delta \mathbf{u}_0 + (\mathbf{M} - \mathbf{H})\, \delta\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \delta q_n \tag{3.7}$$

$$\mathbf{P} = \iint_S \mathbf{q}\, dS, \qquad \mathbf{M} = \iint_S (\mathbf{r}' \times \mathbf{q})\, dS, \qquad Q_n = \iint_S \mathbf{q} \mathbf{u}_n dS \tag{3.8}$$

Подставляя выражения (3.3), (3.5) и (3.7) в уравнение (1.1) и приравнивая нулю коэффициенты при произвольных вариациях $\delta\mathbf{u}_0$, $\delta\theta_0$ и δq_n, получим выражение для главного вектора и главного момента всех сил, действующих со стороны колеблющейся оболочки с жидкостью на несущее тело

$$\mathbf{T} = -\left(m_0 \mathbf{u}_0^{\cdot\cdot} + \mathbf{S}\theta_0^{\cdot\cdot} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}_{0n} q_n^{\cdot\cdot}\right) + \mathbf{P}$$

$$\mathbf{H} = -\left(\mathbf{S}' \mathbf{u}_0^{\cdot\cdot} + \mathbf{J}\theta_0^{\cdot\cdot} + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{\lambda}_{0n} q_n^{\cdot\cdot} + \mathbf{C}\theta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_{0n} q_n\right) + \mathbf{M} \tag{3.9}$$

и уравнения колебаний оболочки с жидкостью в нормальных координатах

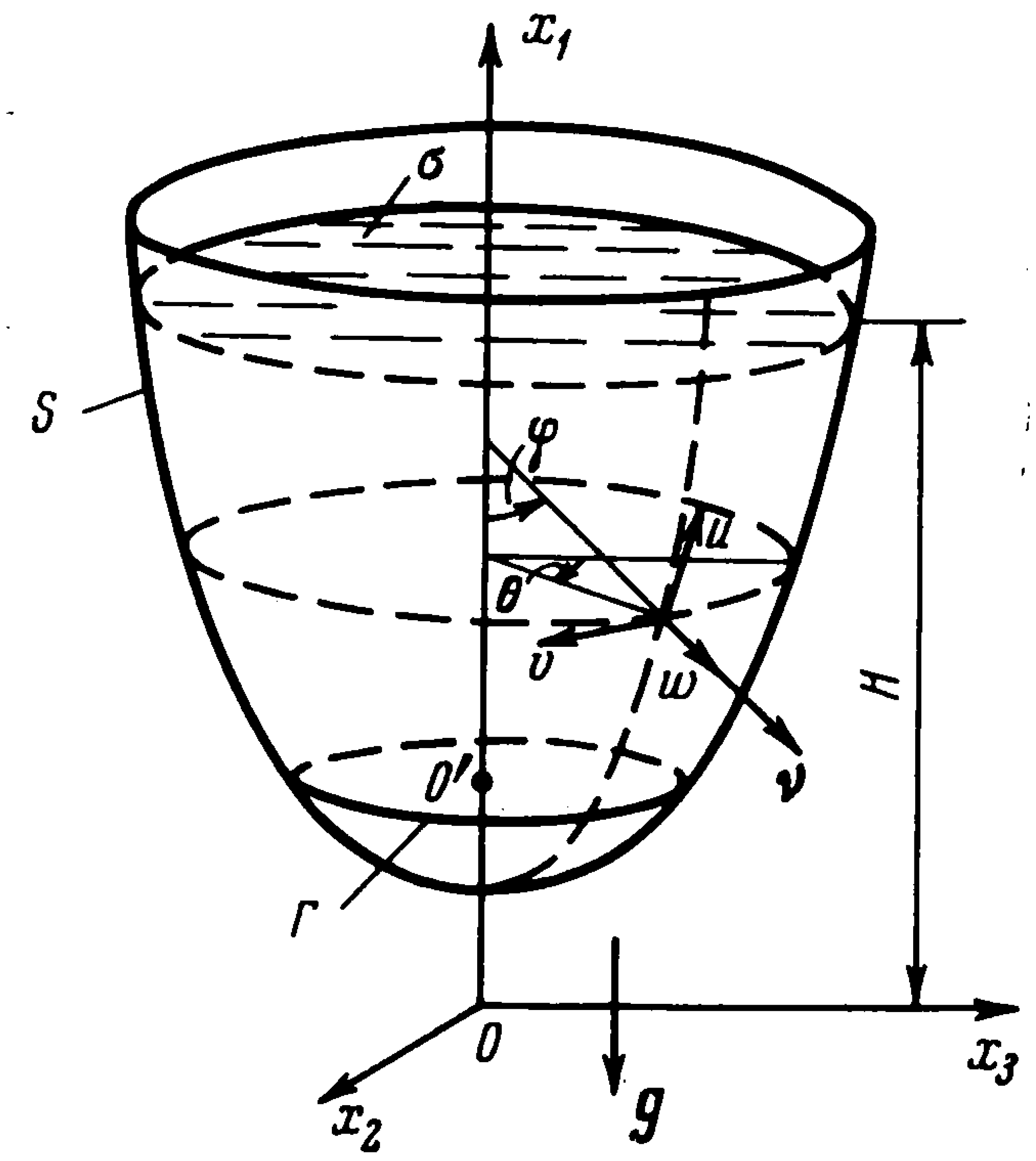
$$\mathbf{m}_{0n} \mathbf{u}_0^{\cdot\cdot} + \boldsymbol{\lambda}_{0n} \theta_0^{\cdot\cdot} + m_n q_n^{\cdot\cdot} + \varkappa_{0n} \theta_0 + \omega_n^2 m_n q_n = Q_n \tag{3.10}$$

$$(n = 1, \ldots, \infty)$$

Если несущее тело абсолютно твердое, то его можно сразу считать присоединенным к оболочке, и при вычислении массовых характеристик m_0, $\mathbf{S}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{C}$, главного вектора и главного момента внешних сил $\mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ интегрирование следует распространить на объем твердого тела; тогда уравнения (3.9) при $\mathbf{T} = \mathbf{H} = 0$ будут уравнениями движения твердого тела с тонкостенной упругой оболочкой, частично заполненной жидкостью. При этом коэффициенты, входящие в уравнения (3.10), не изменяются.

Уравнения (3.9), (3.10) при $\mathbf{T} = \mathbf{H} = 0$ по форме совпадают с уравнениями возмущенного движения абсолютно твердого тела с полостью, частично заполненной идеальной несжимаемой жидкостью [1–4], и переходят в них, если оболочку считать недеформируемой и жидкость несжимаемой. При этом координаты q_n характеризуют волновые движения на свободной поверхности.

4. Оболочка вращения. Вектор перемещений срединной поверхности оболочки вращения представим в виде составляющих проекций на направления касательных к координатным линиям φ и θ (фигура) и на внешнюю нормаль ν к поверхности в рассматриваемой точке



$$\mathbf{u} = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2 + w\boldsymbol{\nu}$$

где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — единичные орты координатных линий φ и θ.

Потенциальную энергию Π_0 в общем случае можно представить в виде трех составляющих

$$\Pi_0 = \Pi_0^{(1)} + \Pi_0^{(2)} + \Pi_0^{(3)} \tag{4.1}$$

Здесь $\Pi_0^{(1)}$ — потенциальная энергия деформации оболочки на основе гипотезы Кирхгоффа [5]; $\Pi_0^{(2)}$ — потенциальная энергия сил в срединной поверхности, возникающих в невозмущенном движении; $\Pi_0^{(3)}$ — потенциальная энергия массовых сил жидкости в возмущенном движении при неподвижной свободной поверхности. Следуя [6], $\Pi_0^{(2)}$ определим формулой

$$\Pi_0^{(2)} = \frac{1}{2}\iint\limits_S [N_1^\circ(\vartheta_1^2 + \vartheta_{12}^2) + N_2^\circ(\vartheta_2^2 + \vartheta_{12}^2) + 2N_{12}^\circ\vartheta_1\vartheta_2]\, dS \tag{4.2}$$

Для оболочки вращения

$$\vartheta_1 = \frac{u}{R_1} - \frac{1}{R_1}\cdot\frac{\partial w}{\partial\varphi}, \qquad \vartheta_2 = \frac{v}{R_2} - \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial\theta}, \qquad \begin{aligned} R &= R_2\sin\varphi \\ dS &= R_1 R\, d\varphi\, d\theta \end{aligned}$$

$$\vartheta_{12} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{R_1}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} - \frac{\partial R_1}{R\partial\theta}u\right) - \frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial\theta} - \frac{\partial R}{R_1\partial\varphi}v\right)\right] \tag{4.3}$$

Здесь R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны срединной поверхности оболочки.

Гидростатическое давление на оболочку, ось которой в невозмущенном движении параллельна оси Ox_1, равно

$$p = \rho g\,[(H - x_1) - (u\sin\varphi - w\cos\varphi)] \tag{4.4}$$

Здесь x_1 — координата точки на S_0 в невозмущенном движении, при этом $x_1 = H$ на σ. Вариацию работы гидростатического давления в возмущенном движении с учетом изменения площади элементов оболочки в процессе деформации $dS^* = dS\,(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ можно записать так:

$$\delta A_p = \iint\limits_{S_0} p\,[\delta w + \vartheta_1\delta u + \vartheta_2\delta v]\,(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, dS$$

Подставляя сюда давление p (4.4), углы поворота ϑ_1 и ϑ_2 (4.3), деформации

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + \frac{w}{R_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\theta} + \frac{u}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi + \frac{w}{R_2}$$

и удерживая только линейные члены при вариациях перемещений, получим

$$\delta A_p = \rho g \iint\limits_{S_0} (H - x_1)\,\delta w\,dS + \iint\limits_{S_0} (p_1 \delta u + p_2 \delta v + p_\nu \delta w)\, dS \tag{4.5}$$

$$p_1 = \rho g\,(H - x_1)\frac{1}{R_1}\left(u - \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right), \qquad p_2 = \rho g\,(H - x_1)\frac{1}{R_2}\left(v - \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)$$

$$p_\nu = \rho g \left\{-(H - x_1)\frac{1}{R_1}\frac{\partial u}{\partial \varphi} + [\sin\varphi - (H - x_1)\frac{1}{R_2}\operatorname{ctg}\varphi]\,u - \right.$$

$$\left. -(H - x_1)\frac{1}{R}\frac{\partial v}{d\theta} - \left[\cos\varphi + (H - x_1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right] w\right\} \tag{4.6}$$

Здесь p_1, p_2, p_ν представляют собой компоненты приведенной нагрузки на оболочку от гидростатического давления в возмущенном движении.

Выражение (4.5) преобразуется к виду

$$\delta A_p = \rho g \iint\limits_{S_0} (H - x_1)\,\delta w\,dS + \rho g \left[\int\limits_0^{2\pi} (H - x_1)\,R w\,\delta u\,d\theta\right]_{x_1 = x_{10}}^{x_1 = H} - \delta\Pi_0^{(3)} \tag{4.7}$$

$$\Pi_0^{(3)} = -\frac{\rho g}{2} \iint\limits_{S_0} \left\{(H - x_1)\left[\frac{1}{R_1}u^2 + \frac{1}{R_2}v^2 + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)w^2 + 2\frac{\partial v}{R\partial\theta}w\right] + \right.$$

$$\left. + w^2\cdot\cos\varphi + \frac{2}{RR_1}\frac{\partial}{\partial\varphi}[(H - x_1)\,Ru]\,w\right\} dS \tag{4.8}$$

Второй член в выражении (4.7) для оболочек, замкнутых внизу при $x_1 = x_{10}$, всегда равен нулю и в этом случае

$$\delta\Pi_0^{(3)} = -\iint\limits_{S_0} (p_1 \delta u + p_2 \delta v + p_\nu \delta w)\, dS \tag{4.9}$$

Соответственно (4.1), оператор $L\,(\ldots)$ также можно представить в виде трех составляющих

$$L\,(\mathbf{u}) = L^{(1)}(\mathbf{u}) + L^{(2)}(\mathbf{u}) + L^{(3)}(\mathbf{u})$$

и на основании (4.8), (4.9)

$$L^{(}\quad(\mathbf{u}) = -\varepsilon\,(p_1\mathbf{e}_1 + p_2\mathbf{e}_2 + p_\nu\boldsymbol{\nu})$$

является самосопряженным, так же как $L^{(1)}(\mathbf{u})$ и $L^{(2)}(\mathbf{u})$.

Система уравнений возмущенного движения (3.9), (3.10) в применении к оболочке вращения с осесимметричным закреплением по замкнутому контуру Г при выборе точки O' на оси оболочки распадается на уравнения, описывающие продольные осесимметричные колебания, на две одинаковые независимые системы уравнений, описывающих поперечные антисимметричные колебания в плоскостях Ox_1x_2 и Ox_1x_3, и уравнения асимметричных колебаний, которые не связаны с движением оболочки как твердого тела.

Уравнения продольных колебаний

$$T_1 = -\left(m_0\ddot{u}_{01} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{0n1}\ddot{q}_n\right) + P_1$$

$$m_{0n1}\ddot{u}_{01} + m_n\ddot{q}_n + \omega_n^{2} m_n q_n = Q_n \qquad (n=1,\ldots,\infty) \tag{4.10}$$

Уравнения поперечных колебаний в плоскости Ox_1x_3

$$T_3 = -\left(m_0\ddot{u}_{03} + S_{22}^*\ddot{\theta}_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} m_{0n3}\ddot{q}_n\right) + P_3 \tag{4.11}$$

$$H_2 = -\left(S_{22}^*\ddot{u}_{03} + I_{22}^*\ddot{\theta}_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{0n3}\ddot{q}_n - gS_{22}^*\theta_{02} + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa_{0n3}q_n\right) + M_2$$

$$m_{0n3}\ddot{u}_{03} + \lambda_{0n3}\ddot{\theta}_{02} + m_n\ddot{q}_n + \varkappa_{0n3}\theta_{02} + \omega_n^2 m_n q_n = Q_n$$
$$(n = 1, \ldots, \infty)$$

Здесь

$$S_{22}^* = -m_0 x_{1t}' + \rho \iint_\sigma \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial \nu} - x_3'\right) x_3' d\sigma$$

$$I_{22}^* = \iint_S m\,(x_1'^2 + x_2'^2)\, d\sigma + \rho \int_{S_0+\sigma}\int \frac{\partial \Psi_2}{\partial \nu}\, \Psi_2 dS$$

$$\varkappa_{0n3} = \iint_S \Big[N_1^\circ \frac{1}{R_1}(U_n - W_n') \cos^2\theta - N_2^\circ \frac{1}{R}(V_n \sin\varphi + W_n)\cos\varphi \sin^2\theta +$$
$$+ \frac{1}{2}(N_1^\circ + N_2^\circ)\left(\frac{1}{R}U_n + \frac{1}{R_1}V_n' + \frac{1}{R}V_n \cos\varphi\right)\sin\varphi\sin^2\theta\Big] dS +$$
$$+ \rho g \iint_{S_0} [(H - x_1)(-U_n \cos^2\theta + V_n \cos\varphi \sin^2\theta) - RW_n \cos^2\theta]\, dS +$$
$$+ \rho g \iint_\sigma \frac{\partial \Psi_2}{\partial \nu}\frac{\partial \Phi_n}{\partial \nu}\, d\sigma \tag{4.12}$$

Здесь x_{1t}' — координата центра тяжести оболочки с жидкостью, отсчитываемая от точки O'; $U_n(\varphi)\cos\theta$, $V_n(\varphi)\sin\theta$, $W_n(\varphi)\cos\theta$ — компоненты перемещений n-й собственной формы антисимметричных колебаний оболочки.

Уравнения асимметричных колебаний, когда число меридиональных узловых линий на поверхности S и σ равно двум или больше

$$m_n\ddot{q}_n + \omega_n^2 m_n q_n = Q_n \qquad (n = 1, \ldots, \infty) \tag{4.13}$$

5. Смешанный вариационный принцип. Для определения коэффициентов уравнений возмущенного движения оболочки с жидкостью (3.9), (3.10) необходимо знать векторную функцию $\mathbf{\Psi}$, собственные формы колебаний $\mathbf{u}_n$, Φ_n и частоты ω_n закрепленной оболочки с жидкостью.

Для произвольных оболочек, содержащих такие объемы жидкости, которые не допускают полное разделение переменных при решении уравнения Гельмгольца, функции $\mathbf{\Psi}$ и Φ_n могут быть найдены только приближенно. При решении задачи вариационными методами в перемещениях возникают трудности, связанные с удовлетворением кинематического граничного условия (1.4) на смоченной поверхности оболочки [7].

В случае недеформированных полостей, частично заполненных несжимаемой жидкостью, для определения собственных частот и форм, а также — функции $\mathbf{\Psi}$ эффективно применяется вариационный принцип типа принципа Кастильяно [8,9], из которого следуют уравнение неразрывности (1.5) и кинематическое граничное условие (1.4). Этот принцип удобен также для расчета колебаний безмоментных, безынерционных оболочек с жидкостью [10].

При расчете форм колебаний, для которых необходимо учитывать моментность и инерционность оболочки, можно использовать смешанный вариационный принцип, в котором перемещения оболочки рассматриваются как независимые функции наряду с давлением в жидкости. Смешанный вариационный принцип использовался в [11] для упругого тела с полостями, содержащими несжимаемую жидкость.

Рассмотрим смешанный вариационный принцип для расчета собственных колебаний упругой оболочки, частично заполненной тяжелой сжимаемой жидкостью. При формулировке различных вариантов смешанного вариационного принципа удобно исходить из принципа Лагранжа с неопределенными множителями. Неопределенным множителем Лагранжа при уравнении неразрывности жидкости и кинематическом граничном условии на смоченной поверхности оболочки служит возмущенное давление в жидкости, которое в случае потенциального движения жидкости при гармонических колебаниях равно $\rho\omega^2\Phi$.

Если жидкость считается сжимаемой, то уравнение неразрывности непосредственно следует из принципа Лагранжа (1.1). В этом случае в уравнение (1.1) необходимо добавить только работу реакций удержания кинематических связей на смоченной поверхности оболочки (1.4) и на краях оболочки $f_i(\mathbf{u}) = 0$; ($f_i(\ldots)$ — линейный алгебраический или дифференциальный оператор)

$$A = \rho\omega^2 \iint\limits_{S_0} \Phi\left(\mathbf{u}\mathbf{v} - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) dS + \sum_i \int \lambda_i f_i(\mathbf{u})\, dl \tag{5.1}$$

Здесь λ_i — реакции на закрепленных краях оболочки. Они могут быть представлены в виде линейных дифференциальных выражений от $\mathbf{u}$ на основании статических соотношений или могут рассматриваться как независимые неизвестные функции, что в некоторых случаях даже более удобно.

С учетом потенциальной энергии (1.2) и работы (5.1) уравнение вариационного принципа Лагранжа с неопределенными множителями для случая свободных гармонических колебаний можно записать в виде

$$\begin{aligned}\delta\Bigg\{\Pi_0 &- \frac{\omega^2}{2}\iint\limits_{S_0} m\mathbf{u}^2 dS - \frac{\rho\omega^2}{2}\iint\limits_{S_0}\Phi\mathbf{u}\mathbf{v}\,dS + \\ &+ \frac{\rho}{2}\iint\limits_{\sigma}\left(g\,\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \omega^2\Phi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,d\sigma + \frac{\rho}{2}\iiint\limits_{\tau}(c^2\Delta\Phi + \omega^2\Phi)\,\Delta\Phi\,d\tau - \\ &- \frac{\rho\omega^2}{2}\iint\limits_{S_0}\left(\mathbf{u}\mathbf{v} - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\Phi\,dS - \sum_i\int\lambda_i f_i(\mathbf{u})\,dl\Bigg\} = 0\end{aligned} \tag{5.2}$$

Вариационное уравнение (5.2) неприменимо, если жидкость считается несжимаемой ($c \to \infty$) и при этом от функции Φ заранее не требуется, чтобы она была гармонической. Поэтому основной областью применения уравнения (5.2) являются акустические колебания.

Другой вариант смешанного вариационного принципа, из которого вытекает уравнение неразрывности как для сжимаемой, так и для несжимаемой жидкости, можно получить, если потенциальную энергию сжатия жидкости записать через давление, т. е.

$$\Pi = \Pi_0 + \frac{\rho g}{2}\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)^2 d\sigma + \frac{\rho\omega^4}{2c^2}\iiint\limits_{\tau}\Phi^2 d\tau \tag{5.3}$$

а в выражение работы (5.1) добавить еще работу давления при удержании кинематической связи — уравнения неразрывности,

$$\begin{aligned}A = \rho\omega^2 &\iint\limits_{S_0}\Phi\left(\mathbf{u}\mathbf{v} - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right) dS + \\ &+ \rho\omega^2\iiint\limits_{\tau}\Phi\left(\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi\right) d\tau + \sum_i\int\lambda_i f_i(\mathbf{u})\,dl\end{aligned} \tag{5.4}$$

Тогда (1.1) с учетом (5.3) и (5.4) можно привести к виду

$$\delta\left\{\Pi_0 - \frac{\omega^2}{2}\iint\limits_S m\mathbf{u}^2 dS - \frac{\rho\omega^2}{2}\iint\limits_{S_0}\Phi\mathbf{u}\nu dS + \right.$$
$$+\frac{\rho}{2}\iint\limits_\sigma\left(g\frac{\partial\Phi}{\partial\nu} - \omega^2\Phi\right)\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}d\sigma - \frac{\rho\omega^2}{2}\iiint\limits_\tau\left(\Delta\Phi + \frac{\omega^2}{c^2}\Phi\right)\Phi d\tau -$$
$$\left. - \frac{\rho\omega^2}{2}\iint\limits_{S_0}\left(\mathbf{u}\nu - \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\right)\Phi dS - \sum_i\int\lambda_i f_i(\mathbf{u})\,dl\right\} = 0 \qquad (5.5)$$

На основании уравнений (5.2) и (5.5) потенциал перемещений жидкости Φ и перемещения оболочки $\mathbf{u}$ можно разыскивать в виде независимых разложений по заданным координатным функциям с неизвестными коэффициентами, и таким образом задачу об отыскании собственных частот и форм колебаний оболочки с жидкостью можно свести по методу Ритца к системе линейных алгебраических уравнений.

Поступила 2 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. Движение тела, имеющего полости, частично заполненные идеальной капельной жидкостью. Докл. АН СССР, 1952, т. 85, № 4.
2. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
3. Рабинович Б. И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
4. The Dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA. Washington, 1966.
5. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
6. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.—М., Гостехиздат, 1948.
7. Григолюк Э. И., Горшков А. Г., Шклярчук Ф. Н. Об одном методе расчета колебаний жидкости, частично заполняющей упругую оболочку вращения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
8. Моисеев Н. Н. Вариационные задачи теории колебаний жидкости и тела с жидкостью. Сб.: «Вариационные методы в задачах о колебании жидкости и тела с жидкостью», М., ВЦ АН СССР, 1962.
9. Рабинович Б. И., Докучаев Л. В., Полякова З. М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 3, вып. 2.
10. Балабух Л. И. Взаимодействие оболочек с жидкостью и газом. Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин (Баку, 1966), М., «Наука», 1966.
11. Рапопорт И. М., Динамика упругого тела, частично заполненного жидкостью, М., «Машиностроение», 1966.