Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ АНИЗОТРОПНОЙ СЛОИСТОЙ ОБОЛОЧКИ В РАМКАХ ТЕОРИИ СРЕДНЕГО ИЗГИБА

Г. А. Косушкин

(Москва)

Разрешимость нелинейной задачи для упругой пологой оболочки изучалась в работе [1] [1]. Уравнения непологих оболочек имеют свои особенности и поэтому нуждаются в математическом обосновании. Разрешимости общей задачи для круговой замкнутой цилиндрической оболочки в нелинейной постановке посвящена работа [2]. В данной работе методика [2] обобщается на случай анизотропной слоистой оболочки произвольной конфигурации под действием общей нагрузки и температурного поля при произвольном закреплении. Метод состоит в том, что неравенство коэрцитивности, полученное здесь для регулярного куска оболочки, переносится на случай кусочно-регулярной оболочки. Отсюда следует применимость принципа Лере — Шаудера, существование обобщенного решения, применимость проекционных методов и другие результаты. Выводы справедливы и в случае, если на каждом куске применяется своя (линейная, нелинейная) теория расчета. Автор искренне благодарит И. И. Воровича за руководство.

§ 1. Обозначения. Основные соотношения. Пусть координатная поверхность оболочки σ задается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ (обозначения взяты из [3]), причем выполнены следующие условия:

1) уравнение определяет взаимнооднозначное отображение поверхности σ на некоторую ограниченную область G плоскости α_1, α_2 с границей Γ;

2) α_1, α_2 — ортогональная криволинейная система координат и $0 < m_1 \leqslant A_i \leqslant m_2$ $(i = 1, 2)$;

3) G состоит из конечного числа областей, обладающих свойством звездности [4], Γ — состоит из конечного числа замкнутых контуров;

4) $\sigma \in W_p^{(3)}$ $(p > 1)$, т. е. функция $\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2)$ имеет в G все обобщенные производные до третьего порядка включительно, суммируемые в некоторой степени p;

5) $\Gamma \subset Л_1(m, 0)$ — классу Ляпунова.

Средний изгиб характеризуется тем, что удлинения, сдвиги и квадраты углов поворота пренебрежимы по сравнению с единицей [3,5]. В этих предположениях можно получить из общих формул [3] следующие деформационные соотношения: (1.1)

$$2\varepsilon_{ik} = e_{ik} + e_{ki} + e_{i3}e_{k3}, \quad e_{ik} = A_i^{-1} u_{k,1} + (-1)^{i+k}(A_1A_2)^{-1}A_{i,s}u_s + k_{ik}w$$

$$e_{i3} = A_i^{-1} w_{,i} - k_{ii}u_i - k_{is}u_s$$

$$\varkappa_{ik} = -A_i^{-1} e_{k3,i} - (-1)^{i+k}(A_1A_2)^{-1}A_{i,s}e_{s3} + k_{ir}e_{kr} + \\ + k_{ik}(e_{rr} + 2e_{kk}) + k_{ik}e^2_{k3} + k_{ir}e_{k3}e_{r3}$$

$$s = 3 - i, \quad r = 3 - k, \quad (\cdot)_{,i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\cdot) \qquad (i, k = 1, 2)$$

---

[1] См. также докторскую диссертацию И. И. Воровича.

Как известно, в теории оболочек нет общепринятого определения компонентов изгибной деформации для общего случая. Поэтому в пределах погрешности, допускаемой теорией оболочек, возможны и другие выражения для $\varkappa_{ik}$. Так, в [5] в отличие от (1.1) принято

$$2\varkappa_{12} = \sum_{i=1}^{2} [-A_i^{-1} e_{s3,i} + (A_1 A_2)^{-1} A_{i,2} e_{i3} + k_{ii} e_{si} + k_{ii} e_{i3} e_{s3} + k_{is} e_{s3}^2] \qquad (1.2)$$

Условимся о некоторых обозначениях. Как правило, компоненты и вектор (шести- или трехкомпонентный) обозначаются одной буквой. Трехкомпонентный вектор задается проекциями на орты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ или, если снабжен верхним значком градус, то проекциями на ортогональные орты $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, где $\mathbf{n}_3 = \mathbf{m}$, $\mathbf{n}_1$ — внешняя нормаль к Г, $\mathbf{n}_2$ — касательный вектор к Г. Область интегрирования указывается в дифференциале под знаком интеграла.

Приняты сокращения следующего вида:

$$\boldsymbol{\eta} = (e_{13}, e_{23}, -{}^1/_2), \qquad \boldsymbol{\xi} = (e_{13}, e_{23}, 0), \qquad \boldsymbol{\omega} = (u_1, u_2, w)$$

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots, \mathbf{h} \rangle = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \ldots h_i$$

$$\gamma_i^+ \setminus \gamma_k^- = \gamma_{i,k}^{+,-}, \qquad d\gamma_{i,3}^{+,-} = (d\gamma_{1,3}^{+,-}, d\gamma_{2,3}^{+,-}, d\gamma_{3,3}^{+,-})$$

$$\mathbf{P}^\circ = (T^\circ, S^\circ, N^\circ), \qquad \mathbf{P}_1^\circ = (T_1^\circ, S_1^\circ, N_1^\circ)$$

$$\mathbf{Z} = (X, Y, Z), \qquad \mathbf{Z}_1 = (0, 0, Z_1)$$

Для векторов вводится операция покомпонентного умножения

$$\mathbf{c} = \mathbf{ab}, \quad c_i = a_i b_i \qquad (i = 1, \ldots, l;\ l = 3, 6)$$

В дальнейшем окажется удобным отклониться от обозначений [3] для деформаций и усилий

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11}, \quad \varepsilon_2 = 2\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{22}, \quad \varepsilon_4 = \varkappa_{11}, \quad \varepsilon_5 = \varkappa_{12}, \quad \varepsilon_6 = \varkappa_{22}$$

$$S_1 = T_{11}, \quad S_2 = T_{12}, \quad S_3 = T_{22}, \quad S_4 = M_{11}, \quad S_5 = 2M_{12}, \quad S_6 = M_{22}$$

Общие соотношения упругости для анизотропных слоистых оболочек с учетом температурного расширения имеют вид

$$\mathbf{S} = B\boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{t}, \quad \mathbf{t} = (\mathbf{b}_1^{(\lambda)} + \mathbf{b}_3^{(\lambda)}) T_0 + (\mathbf{b}_4^{(\lambda)} + \mathbf{b}_6^{(\lambda)}) T_1 \qquad (1.3)$$

Здесь B — положительноопределенная матрица жесткостей, коэффициенты которой выражаются через характеристики слоев по известным формулам ((8.3) — (8.5) [6]); $\mathbf{b}_i^{(\lambda)}$ ($i = 1, 3, 4, 6$) i-столбец матрицы $B^{(\lambda)}$, коэффициенты которой вычисляются по тем же формулам, как в случае матрицы B, при условии, что в формулы ((8.3) —(8.5) [6]) вместо $B_{jk}{}^s$ подставляется $\lambda_s B_{jk}{}^s$ (λ_s — коэффициент температурного расширения s-го слоя); T_0 — температура координатной поверхности, T_1 — градиент температуры.

Удобно считать, что

$$\varepsilon_i = e_i + \theta_i = e_i + \sum_{j=1}^{2} \psi_{ij} \tau_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, 6) \qquad (1.4)$$

где e_i, ψ_{ij}, τ_{ij} — соответствующие линейные операторы от ω. Формулой такого вида описываются весьма различные варианты деформационных соотношений.

Заданы следующие силовые факты:

$$\mathbf{Z},\ \mathbf{Z}_1,\ \mathbf{k}\ \text{на}\ \sigma,\quad T^\circ,\ T_1^\circ,\ \beta_1,\ \text{на}\ \overset{+}{\gamma}_1,$$
$$S^\circ,\ S_1^\bullet,\ \beta_2\ \text{на}\ \overset{+}{\gamma}_2,\ N^\circ,\ N_1^\circ,\ \beta_3\ \text{на}\ \overset{+}{\gamma}_3,\ M^\circ,\ \beta_4\ \text{на}\ \overset{+}{\gamma}_4$$

Здесь $\mathbf{Z}_1$, $\mathbf{P}_1^\circ$ — следящая нагрузка, $\mathbf{k}$ и β — коэффициенты упругости опор.

Геометрические граничные условия имеют вид

$$\langle \omega, \mathbf{n}_i\rangle|_{\gamma_i^-} = f_i \quad (i = 1, 2, 3) \qquad \langle \xi, \mathbf{n}_1\rangle|_{\gamma_4^-} = f_4 \tag{1.5}$$

Оболочка может быть частью конструкции, поэтому наряду с геометрическими и статическими граничными условиями приходится рассматривать и условия сопряжения. На множестве γ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ задаются i-е геометрическое и i-е статическое условия сопряжения. Плоская мера множеств γ_i, $\overset{-}{\gamma}_i$, $\overset{+}{\gamma}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ равна нулю. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что

$$\gamma_i \cup \gamma_i^- \cup \gamma_i^+ = \Gamma \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Уравнения равновесия оболочки в усилиях и моментах имеются в ряде работ [3] и здесь не приводятся, тем более что их можно вывести из принципа возможных перемещений, который формулируется в § 4.

§ 2. **Вспомогательные предложения.** Ниже наряду с обычными пространствами $C(G)$, $L_p(G)$, $p \geqslant 1$ используются [7] пространства С. Л. Соболева — Л. Н. Слободецкого $W_p^{(r)}(G)$ и $W_p^{(r-1/p)}(G)$ (r — целое) и $V = W_2^{(1)}(G) \times W_2^{(1)}(G) \times W_2^{(2)}(G)$, причем приняты обозначения

$$\|f\|_{C(G)} = |f|, \quad \|f\|_{0,p,\Omega}^p = \int |f|^p\, d\Omega, \qquad \|f\|_{W_p^{(r)}(G)} = \|f\|_{r,p}$$

Нормы в пространствах W и V определяются естественным образом.

Лемма 2.1. Пусть входящие в уравнение (1.5) функции

$$f_i \in W_2^{(l_i - 1/p)}(\gamma_i^-), \qquad l_1 = l_2 = l_4 = 1,\ l_3 = 2 \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

В этом случае существует вектор-функция ω^-, удовлетворяющая (1.5) и аннулирующая вблизи γ_i — i-е геометрическое условие сопряжения, такая, что $\omega^- \in V$.

Доказательство очевидным образом следует из теорем о продолжении [7].

Обозначим через E — замыкание всех гладких в $\overline{G}$ вектор-функций ω, удовлетворяющих однородным геометрическим граничным условиям (1.5) — замыкание по норме пространства V. Введем билинейную форму

$$A(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}) = \int (\langle B\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}\rangle + b\,\langle \xi^{(1)}, \xi^{(2)}\rangle)\, dG_A \quad (b > 0,\ dG_A = A_1A_2\,d\alpha_1 d\alpha_2) \tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что если $A(\omega, \omega) = 0$, то $\mathbf{e} = 0$ и $\xi = 0$. Это означает, что ω — перемещение оболочки как жесткого целого.

Пусть $M \subset E$ — подпространство: $M = \{\omega : A(\omega, \omega) = 0\}$. Введем фактор-пространство $E^* = E / M$. По определению

$$\|\omega\|_{E^*} = \inf \|\omega'\|_E \qquad (\omega' \in E,\ \omega \in E^*,\ \omega' \in \omega)$$

Существует единственный «нормальный» представитель ω^* класса ω такой, что

$$\|\omega\|_{E^*} = \|\omega^*\|_E,\ \omega^* \in \omega$$

Пространство E — гильбертово, поэтому E^* — также гильбертово.

Лемма 2.2. [2]. Существует такая константа m, что

$$m\Omega \leqslant \|\omega\|_{E^*} \qquad \forall \omega \in E^* \qquad (m > 0)$$

$$\Omega = |w^*|,\ \|f\|_{0,p,a}, \qquad f = w_{,1}^{*},\ w_{,2}^{*},\ u_1^*,\ u_2^*, \qquad a = G,\ \gamma \tag{2.2}$$

Здесь γ — кусочно-гладкий контур из G. $1 \leqslant p < \infty$. Кроме того, отношение, выражаемое неравенством (2.2), обладает полной непрерывностью, т. е. из ограниченности множества $\{\omega\}$ в E^* следует компактность в смысле левых частей (2.2).

Лемма 2.3. (в терминах [8]). Для эллиптической задачи

$$L(x, \partial/\partial x)\, u(x) = f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad B(x, \partial/\partial x)\, u(x)|_S = \Phi(x')$$

имеет место априорное неравенство

$$\sum_{j=1}^{m} \|u_j\|^{\Omega}_{p,\,l+t_j} \leqslant C\Big(\sum_{\substack{i=1\\ l\geqslant s_i}}^{m} \|f_i\|^{\Omega}_{p,\,l-s_i} + \sum_{\substack{q=1\\ l>\sigma_q}}^{r} \|\Phi_q\|^{S}_{p,\,l-\sigma_q-1/p}\Big) \tag{2.3}$$

Априорная оценка (2.3) для случая $l - s_i \geqslant 0$, $l - \sigma_q > 0$ ($i = 1, \ldots, m$; $q = 1, \ldots, r$) известна [8]; неравенство (2.3) получено на основе выкладок работы [8].

Билинейная форма (2.1) определяет в E^* скалярное произведение и норму

$$(\omega^{(1)}, \omega^{(2)})_H = A(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}), \qquad \|\omega\|_H^2 = \int (\langle Be, e\rangle + b\langle \xi, \xi\rangle)\, dG_A$$

Лемма 2.4. Существуют такие константы m, m_1, что равномерно для всех $\omega \in E^*$

$$m\|\omega\|_{E^*} \leqslant \|\omega\|_H \leqslant m_1 \|\omega\|_{E^*} \qquad (m, m_1 > 0) \tag{2.4}$$

Существование m_1 доказано [2]. Остается доказать, что

$$m = \inf_\omega (\|\omega\|_H \|\omega\|^{-1}_{E^*}) > 0, \qquad \omega \in E^*$$

Пусть $m = 0$. В этом случае существует последовательность $\{\omega^{(n)}\}$

$$\|\omega^{(n)}\|_{E^*} = 1, \qquad \|\omega^{(n)}\|_H \to 0, \qquad \omega^{(n)} \to \omega^{(0)} \text{ слабо в } E^*$$

Так как случай $\omega^{(0)} \neq 0$ невозможен [2], то отсюда из (1.1) и леммы (2.2) следует

$$\|a^{(n)}\|_{0,2,G} \to 0, \qquad a = e_i \qquad (i = 1, \ldots, 6) \tag{2.5}$$

$$|w^{*(n)}|,\ \|a^{(n)}\|_{0,p,b} \to 0, \qquad a = u_1^*,\ u_2^*,\ w_{,1}^{*},\ w_{,2}^{*}, \qquad b = G,\ \gamma \tag{2.6}$$

$$\|g_i^{(n)}\|_{0,2,G} \to 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{2.7}$$

Здесь g_1, g_2 соответствуют следующей эллиптической задаче:

$$\overset{*}{u}_{1,1} - \overset{*}{u}_{2,2} = g_1, \qquad A_2^{-1}\overset{*}{u}_{1,2} + A_1^{-1}\overset{*}{u}_{2,1} = g_2, \qquad \frac{\partial u_1^*}{\partial \mathbf{n}_1}\bigg|_\Gamma = 0$$

Из (2.7) и леммы 2.3 следует пункт а), а из а), (2.5), (2.6) и (1.1) — пункт в) и затем с) следующего утверждения

$$\text{c)}\ \|u_i^{*(n)}\|_{1,2} \to 0 \quad (i = 1, 2), \qquad \text{в)}\ \|w^{*(n)}\|_{2,2} \to 0, \qquad \text{c)}\ \|\omega^{(n)}\|_{E^*} \to 0$$

Утверждение с) противоречит условию $\|\omega^{(n)}\|_{E^*} = 1$.

Пространство E^* с нормой $\|\cdot\|_H$ обозначим через H.

Лемма 2.5. Утверждение леммы 2.2 сохраняет силу, если всюду в формулировке заменить E^* на H.

Введем множества $\gamma_i^\circ \subset \gamma_i^+$ и $G_i^\circ \subset G$, на которых почти везде $\beta_i < 0$ и $k_i < 0$ соответственно ($i = 1, 2, 3$). Согласно лемме 2.4, существуют такие константы c_i^* ($i = 1, \ldots, 6$), что

$$\| u_j^*, A \|^2_{0, q_1, G_j^\circ} \leqslant c_j^* \| \omega \|_H^2 \quad (j = 1, 2) \quad \left(\| f, A \|^p_{0, p, G} = \int | f |^p \, dG_A\right)$$

$$\operatorname{mes} G_3^\circ \, | A_1 A_2 | \, | w^* |^2 \leqslant c_3^* \| \omega \|_H^2, \quad \| \langle \omega, \mathbf{n}_j \rangle \|^2_{0, q_1 \gamma_j^\circ} \leqslant c^*_{3+j} \| \omega \|_H^2$$

$$| w^* |^2 \leqslant c_6^* \| \omega \|_H^2, \qquad q_1 = 2q / (q - 1) \qquad q > 1$$

Дальнейшие рассуждения ведутся в следующих предположениях

1) линейные операторы ψ_{ij}, τ_{ij} (1.4) вполне непрерывны в H;

2) величина $\theta = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$;

3) если $\xi = 0$, то $\psi_{ij} = \tau_{ij} = 0$ ($i = 1, \ldots, 6$; $j = 1, 2$);

4) $B \in L_\infty(G)$, $\lambda T_0, \lambda T_1 \in L_2(G)$, $X, Y, Z_1, k_1, k_2 \in L_q(G)$

$$\langle \mathbf{P}^\circ, \mathbf{n}_i \rangle, \langle \mathbf{P}_1^\circ, \mathbf{n}_i \rangle, \beta_i \in L_q(\gamma_i^+) \ (i = 1, 2), \ M^\circ, \beta_4 \in L_q(\gamma_4^+)$$

$$k_3, Z \in C^*(G), \ N_1^\circ \in C^*(\gamma_3^+), \quad L_q(\gamma^{+,-}_{3,1}), L_q(\gamma^{+,-}_{3,2})$$

$$N^\circ, \beta_3 \in C^*(\gamma_3^+) \qquad (q > 1)$$

5) существуют такие константы $c_i > c_i^*$ ($i = 1, \ldots, 6$), что

$$c_1 \| k_1, A \|_{0, q, \overset{\circ}{G_1}} + c_2 \| k_2, A \|_{0, q, \overset{\circ}{G_2}} + c_3 \| k_3 \|_{C^*(\overset{\circ}{G_3})} +$$

$$+ c_4 \| \beta_1 \|_{0, q, \overset{\circ}{\gamma_1}} + c_5 \| \beta_2 \|_{0, q, \overset{\circ}{\gamma_2}} + c_6 \| \beta_3 \|_{C^*, (\overset{\circ}{\gamma_3})} < 1/2 \tag{2.8}$$

6) выполнены условия леммы 2.1.

Ссылка на предположение будет иметь вид, например, 5), (2.8). Предположения 1) (2.8) — 3) (2.8) выполняются для большинства деформационных соотношений. Обычно при помощи леммы 2.3 удается установить лемму 2.4.

Если рассматривать оболочку как часть конструкции, то она вносит в уравнение принципа возможных перемещений вклад, выражаемый следующим функционалом:

$$\Lambda^a (\omega^- + \omega, \omega^\wedge) = (\omega, \omega^\wedge)_H + Q_1^a (\omega, \omega^\wedge) + Q_2^a (\omega, \omega^\wedge)$$

$$Q_1^a (\omega, \omega^\wedge) = \int [\langle B (\varepsilon_a^- + \varphi'^- + \theta^a), (\mathbf{e}^\wedge + \varphi^{\wedge, -} + \varphi'^{\wedge a}) +$$

$$+ \langle B\mathbf{e}, (\varphi^{-, \wedge} + \varphi'^{\wedge a}) \rangle - \mathbf{t} (\mathbf{e}_a + \varphi_a^{-, \wedge} + \varphi'^{\wedge a}) - b \langle \xi, \xi^\wedge \rangle] \, dG_A$$

$$Q_2^a (\omega, \omega^\wedge) = -\int \langle [\mathbf{Z}_a - \mathbf{k} (\omega_a^- + \omega) - Z_1 (\eta_a^- + \eta)], \omega^\wedge \rangle \, dG_A \, | -$$

$$- \int \langle [P_a^\circ + P_{1a}^\circ - \beta (\omega_a^- + \omega)^\circ], \omega^{\wedge, \circ}, d\gamma_i^+ \rangle \, | -$$

$$- \int \langle P_1^\circ \xi_a^- + \xi)^\circ, w d\gamma^{+,-}_{i,3} \rangle + \int N_1 \langle (\xi_a^- + |\xi)^\circ, \omega^{\wedge, \circ}, d\gamma^{+,-}_{3,i} \rangle -$$

$$- \int [M_a^\circ - \beta_4 \langle \xi_a^- + \xi, \mathbf{n}_1 \rangle] \, \xi_1^{\wedge, \circ} \, d\gamma_4^+ \qquad (a = \ , +) \tag{2.9}$$

$$\varphi_i^{\alpha, \beta} = \sum_{j=1}^{2} (\psi_{i,j}^\alpha \tau_{ij}^\beta + \psi_{ij}^\beta \tau_{ij}^\alpha), \qquad \alpha, \beta = \quad , -, \wedge$$

$$y^- = y (\omega^-), \qquad y^\wedge = y (\omega^\wedge)$$

Здесь $\omega^\wedge$ — возможное перемещение при связях (1.5). Считается, что в формулах (2.9) для Λ, Q_1, Q_2 правые части вычисляются по нормальным представителям [2], и звездочка опущена.

Лемма 2.6. Пусть выполнены предположения (2.8). В этом случае для всех ω, $\omega^\wedge \in H$ справедливо представление

$$a)\quad Q_1(\omega, \omega^\wedge) = -(K_1\omega, \omega^\wedge)_H$$

$$b)\quad Q_2(\omega, \omega^\wedge) = -(K_2\omega, \omega^\wedge)_H$$

$$c)\quad \Lambda(\omega^- + \omega, \omega^\wedge) = (\omega - K\omega, \omega^\wedge)_H, \qquad K = K_1 + K_2$$

Здесь K_1K_2, K — вполне непрерывные операторы в H.

Подобные утверждения доказывались функциональным методом в работе [2], поэтому остановимся лишь на особенностях доказательства в данном случае.

Рассмотрим

$$P(\omega) = \int \langle [B\varepsilon, (e + \varphi,^- + \theta)\rangle + \langle Be, (\varphi,^- + \theta)\rangle + {}^1\!/_2 \langle B(\varphi,^- + \\ + \theta)(\varphi,^- + \theta)\rangle - t(e + \varphi,^- + \theta) - {}^1\!/_2 b\langle \xi, \xi\rangle]\, dG_A$$

Нетрудно доказать слабую непрерывность $P(\omega)$ в H и что $Q_1(\omega, \omega^\wedge)$ есть дифференциал Гато от $P(\omega)$. Дальнейшие рассуждения в п. а) следуют [2]. Доказательство п. в) также проводится по схеме [2].

§ 3. Доказательство основного неравенства. Введем дополнительные обозначения

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^{6} \| a_i \|_A^2, \quad \| g\|_A = \| g, A\|_{0,2,G}, \quad a^+ = Ra, \quad a_+ = R_a^{-1}$$

$$\Phi(\omega) = \Lambda(\omega^- + \omega, \omega), \quad \Phi^+(R, \omega_+) = R^{-2}\Phi(\omega) = \Lambda^+(\omega^- + \omega_+, \omega_+) \quad (\|\omega\|_H = R)$$

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (2.8). В этом случае существуют такие константы, μ, ρ, что

$$\Phi(\omega) \geqslant \mu R^2 \quad \forall \|\omega\|_H = R \geqslant \rho \quad (\mu, \rho > 0) \tag{4.1}$$

Доказательство проводится по схеме, развитой в [2]. Утверждению (4.1) эквивалентно следующее:

$$\Phi^+(R, \omega) \geqslant \mu \qquad \forall \|\omega\|_H = 1 \tag{4.2}$$

Очевидно, достаточно доказать, что равномерно по ω

$$\lim \Phi^+(R, \omega) > 0 \qquad \text{при } R \to \infty \qquad \forall \|\omega\|_H = 1 \tag{4.3}$$

Тогда найдется константа μ и при достаточно больших R будет иметь место (4.2). В противном случае нашлась бы последовательность $\{R_m, \omega^{(n)}\}$ такая, что

$$\Phi^+(R_m, \omega^{(n)}) \to c \leqslant 0, \quad R_m \to \infty \quad \text{при } n, m \to \infty \qquad (\|\omega^{(n)}\|_H = 1) \tag{4.4}$$

Это противоречит (4.3), поэтому логично признать достаточность (4.3).

Предположим, что (4.3) нарушается. В этом случае имеет место (4.4). Функционал $\Phi^+(R, \omega)$ является многочленом четвертой степени относительно ω со старшим членом

$$\Phi_4^+(R, \omega) = 2\int \langle B\theta^+, \theta^+\rangle\, dG_A$$

и если последовательность $\{\|\theta^+_{n,m}\|\}$ не ограничена, то $\Phi^+(R_m, \omega^{(n)}) \to +\infty$ и (4.4) не имеет места. Отсюда последовательность $\{\|\theta^+_{n,m}\|\}$ ограничена, так как предположили, что (4.4), выполняется, и, следовательно, $\|\theta_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, так как $R_m \to \infty$

Итак предел последовательности

$$\lim \|\theta^+_{n,m}\| \quad \text{при } m, n \to \infty$$

существует, также существует предел по n при каждом фиксированном m и равен нулю. Применяя теорему о повторном пределе, получаем

$$\lim \|\theta^+_{n,m}\| = \lim_m \lim_n \|\theta^+_{n,m}\|, \qquad n, m \to \infty$$

В силу этого найдется такое $n_0(\varepsilon)$, что

$$\Phi^+(R_m, \omega^{(n)}) = \|\omega^{(n)}\|_H^2 + \int \langle \mathbf{k}, \omega^{(n)}, \omega^{(n)}\rangle \, dG_A + \int \langle \beta\omega^{\circ\,(n)}, \omega^{\circ\,(n)} d\gamma^+\rangle + f_{nm}$$

$$(\,|f_{nm}| < \varepsilon,\ n, m > n_0)$$

Принимая во внимание 5) (2.8), получим

$$\Phi^+(R_m, \omega^{(n)}) \geqslant {}^1/_2 \|\omega^{(n)}\|_H^2 - \varepsilon, \qquad n, m \geqslant n_0 \qquad (\|\omega^{(n)}\|_H = 1)$$

Полученное неравенство явно противоречит предположению (4.4) и, следовательно, отсюда логически вытекает справедливость утверждения леммы.

§ 4. Разрешимость задачи о формах равновесия произвольной анизотропной слоистой оболочки.

Оболочку, удовлетворяющую условиям §§ 1, 2 будем называть регулярной. Назовем оболочку кусочно-регулярной, если ее можно разбить на конечное число регулярных частей. Пусть σ — координатная поверхность оболочки, а $\sigma^{(k)}$ — ее регулярная часть ($k = 1, \ldots, N$). Соответственно разобьем нагрузку, которая действует на оболочку σ, и граничные условия на части, соответствующие $\sigma^{(k)}$.

Прибегнем к следующему построению. Снабдим все величины, входящие в §§ 1—3, дополнительным индексом k. Это должно обозначать, что величина относится к куску с номером k. Для величины с индексом k справедливы утверждения §§ 1—3. В этом случае

$$\sigma = \bigcup_{k=1}^{N} \sigma^{(k)}, \qquad G = \bigcup_{k=1}^{N} G^{(k)}, \qquad G^{(k)} = \{\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}\}$$

$$\Gamma = \Big(\bigcup_{k=1}^{N} \Gamma^{(k)}\Big) \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{N} \bigcap_{i=1}^{4} \gamma_i^{(k)}\Big), \qquad \gamma_i = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

Пусть запись

$$\omega = (\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(N)})$$

означает, что

$$\omega = \omega^{(k)} \text{ на } G^{(k)} \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

и на $\gamma_i^{(n)} \cap \gamma_i^{(m)}$ ($i = 1, \ldots, 4$) выполняются геометрические условия сопряжения в терминах величин $\omega^{(n)}$ и $\omega^{(m)}$ ($n, m = 1, \ldots, N$). Введем

$$H = \prod_{k=1}^{N} \times H^{(k)} \qquad (M^{(k)} = M,\ k = 1, \ldots, N)$$

прямое произведение пространств, где $H^{(k)}$ — определенное в § 2 пространство.

Условие равновесия оболочки можно выразить при помощи принципа возможных перемещений уравнением

$$\Lambda(\omega^{-} + \omega, \omega^{\wedge}) = \sum_{k=1}^{N} \Lambda^{(k)}(\omega^{-(k)} + \omega^{(k)}, \omega^{\wedge(k)}) = 0 \qquad (5.1)$$

Определение 4.1. Назовем обобщенным решением задачи для кусочно-регулярной оболочки такую функцию $\omega^{-} + \omega$ ($\omega \in H$), которая при всех $\omega^{\wedge} \in H$ удовлетворяет уравнению (5.1).

Лемма 4.1. Уравнение (5.1) эквивалентно операторному уравнению в H

$$\Lambda(\omega^{-} + \omega, \omega^{\wedge}) = (\omega - K\omega, \omega^{\wedge}) = 0 \text{ или } \omega - K\omega = 0$$

где вполне непрерывный оператор

$$K = \sum_{k=1}^{N} + K^{(k)}$$

— прямая сумма операторов $K^{(k)}$, действующих в $H^{(k)}$. Доказательство следует из леммы 2.6.

Лемма 4.2. Для кусочно-регулярной оболочки существуют такие положительные константы R_0, μ, что

$$\Phi(\omega) = \sum_{k=1}^{N} \Phi^{(k)}(\omega^{(k)}) \geqslant \mu R^2, \qquad \forall \|\omega\|_H = R \geqslant R_0 \qquad (5.2)$$

Вследствие леммы 3.1 найдутся такие μ_k и ρ, что

$$R_k^{-2}\Phi^{(k)}(\omega^{(k)}) \geqslant \mu_k \qquad \forall \|\omega^{(k)}\|_{H^{(k)}} = R_k \geqslant \rho \qquad (k = 1, \ldots, N)$$

Очевидно, что

$$R^{-2}\Phi(\omega) = \sum_{k=1}^{N} (R_k / R)^2 [\Phi^{(k)}(\omega^{(k)}) / R_k^2] \geqslant \sum_{R_k \geqslant \rho} \mu_k (R_k / R)^2 +$$

$$+ \sum_{R_k < \rho} (\mu_k - 1)(\rho / R)^2 \qquad \left(\sum_{R_k \geqslant \rho} R_k^2 \geqslant R^2 - N\rho\right) \qquad (5.3)$$

Из (5.3) следует

$$R^{-2}\Phi(\omega) \geqslant \inf \mu_k - N(\rho / R)^2 \sum_{k=1}^{N} \mu_k + (\rho / R)^2 \sum_{R_k < \rho} (\mu_k - 1)$$

Отсюда существует такое $R_0 > 0$, что

$$R^{-2}\Phi(\omega) \geqslant \inf_k \mu_k - \varepsilon = \mu, \qquad (\rho / R)^2 \left| \left[N \sum_{k=1}^{N} \mu_k + \sum_{R_k < \rho} (\mu_k - 1) \right] \right| < \varepsilon, \qquad R > R_0$$

Требуемое утверждение доказано.

Точно так же, как в [2], из полученного неравенства (5.2) следуют следующие утверждения.

Лемма 4.3. На сфере $S\ (R,\ 0)$ достаточно большого радиуса R вращение вполне непрерывного поля $\omega\ - K\omega$ равно $+1$.

Теорема 4.1. Если оболочка кусочно-регулярна, то в этом случае существует обобщенное решение задачи в смысле определения 4.1 и $\|\omega\|_H < R_0$.

Используя полученные результаты, можно изучить дифференциальные свойства решения.

Лемма 4.3 гарантирует, согласно теоремам [3], сходимость метода Галеркина и других проекционных методов.

Теорема существования работы [2] для замкнутой цилиндрической оболочки просто получается из теоремы 4.1. В этом случае достаточно рассечь оболочку диаметральной плоскостью на два регулярных куска и сформулировать на линиях разреза условия сопряжения.

Теорема 4.1 остается в силе, если на каждом из кусков используется своя (линейная, нелинейная) теория расчета.

Поступила 8 X 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ворович И. И. О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
2. Ворович И. И., Косушкин Г. А. О разрешимости общей задачи для упругой замкнутой цилиндрической оболочки в нелинейной постановке. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
3. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань, Таткнигоиздат, 1957.
4. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Л., Изд-во ЛГУ, 1950.
5. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Л.— М., Гостехиздат, 1948.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. М., Физматгиз, 1961.
7. Никольский С. М. О теоремах вложения, продолжения и приближения для дифференцируемых функций многих переменных. Усп. матем. н., 1961, т. 16, № 5.
8. Солонников В. А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса — Л. Ниренберга, ч. II. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 92.
9. Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.