ОБ АВТОКОЛЕБАНИЯХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СТАБИЛИЗАТОРОВ

Ю. Н. Бибиков, А. М. Лестев

(Ленинград)

Изучается система дифференциальных уравнений третьего порядка, описывающая движение одноосного гироскопического стабилизатора с поплавковым интегрирующим гироскопом. Управление двигателем стабилизации осуществляется контактным устройством с зоной нечувствительности δ. Доказывается, что при достаточно малом δ система имеет замкнутую траекторию, соответствующую автоколебаниям гироскопического стабилизатора. Указывается область фазового пространства, в которую погружена замкнутая траектория.

Автоколебания гироскопических стабилизаторов рассматривались в работах [1-4]. Я. Н. Ройтенберг [1,2] исследовал движение гиростабилизатора при релейном законе управления двигателем стабилизации. Методом точечных преобразований определены параметры и исследована устойчивость периодического движения. С. А. Черников [3,4] применил метод гармонической линеаризации Е. П. Попова и электронное моделирование. В указанных работах основное внимание уделялось вычислению периодического движения. Для теории гироскопических приборов, в которых используются автоколебательные режимы работы, особую важность имеет выяснение условий и доказательство существования замкнутых траекторий дифференциальных уравнений движения гироскопической системы и их локализация. В данной статье этот вопрос рассматривается для одноосного гироскопического стабилизатора с поплавковым интегрирующим гироскопом.

1. Примем, что гироскопический стабилизатор расположен на неподвижном основании. Пренебрежем упругой податливостью элементов конструкции гиростабилизатора, силами сухого трения в опорах подвеса и будем считать, что двигателем стабилизации является двухфазный индукционный двигатель. Управление двигателем осуществляется контактным устройством с зоной нечувствительности δ. При сделанных предположениях дифференциальные уравнения гиростабилизатора будут [5]

$$A\ddot{\psi} + H\dot{\vartheta} = -M(\vartheta) - n_2\dot{\psi}, \qquad B\ddot{\vartheta} - H\dot{\psi} = -n_1\dot{\vartheta} \tag{1.1}$$

$$M(\vartheta) = M_0 \operatorname{sign} \vartheta \ (|\vartheta| \geqslant \delta), \qquad M(\vartheta) = 0 \ (|\vartheta| < \delta)$$

Здесь φ — угол поворота внешнего карданового кольца, ϑ — угол поворота кожуха, A — сумма приведенных к оси стабилизации моментов подвижных частей гиростабилизатора, B — сумма моментов инерции кожуха и ротора относительно оси кожуха, H — кинетический момент гироскопа, n_1, n_2 — коэффициенты демпфирования, $M(\vartheta)$ — момент, создаваемый двигателем стабилизации.

Введем обозначения

$$\lambda_1 = \frac{H}{B}, \quad \lambda_2 = \frac{H}{A}, \quad \nu_1 = \frac{n_1}{B}, \quad \nu_2 = \frac{n_2}{A}, \quad f(\vartheta) = \frac{M(\vartheta)}{A}, \quad f_0 = \frac{M_0}{A}$$

и новые переменные

$$\psi^{\cdot} = \xi, \ \vartheta^{\cdot} = \eta, \ \vartheta = \zeta$$

Уравнения (1.1) представим в следующем виде:

$$\xi^{\cdot} = -\nu_2\xi - \lambda_2\eta - f(\zeta), \qquad \eta^{\cdot} = \lambda_1\xi - \nu_1\eta, \quad \zeta^{\cdot} = \eta \tag{1.2}$$

$$f(\zeta) = f_0 \operatorname{sign} \zeta \ (|\zeta| \geqslant \delta), \quad f(\zeta) = 0 \ (|\zeta| < \delta)$$

Параметры гироскопических стабилизаторов с поплавковыми гироскопами обычно таковы, что выполнено условие

$$(\nu_1 + \nu_2)^2 \geqslant 4(\lambda_1\lambda_2 + \nu_1\nu_2) \tag{1.3}$$

Ниже доказывается существование замкнутой траектории системы (1.2) и определяется область, содержащая замкнутую траекторию.

2. Преобразование

$$x = \lambda_1\xi + \nu_2\eta + (\lambda_1\lambda_2 + \nu_1\nu_2)\zeta, \quad y = \eta, \quad z = \zeta \tag{2.1}$$

приводит систему (1.2) к виду

$$x^{\cdot} = -\varphi(z), \quad y^{\cdot} = x - \alpha y - \beta z, \quad z^{\cdot} = y \tag{2.2}$$

где

$$\alpha = \nu_1 + \nu_2, \quad \beta = \lambda_1\lambda_2 + \nu_1\nu_2, \quad \varphi(z) = \lambda_1 f(z)$$

Примем систему (2.2) за исходную, в которой

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0$$

$$\varphi(z) = \varphi_0 \operatorname{sign} z \quad (|z| \geqslant \delta), \; \varphi_0 = \lambda_1 f_0, \quad \varphi(z) = 0 \; (|z| < \delta)$$

и в дальнейшем считаем, что справедливо неравенство

$$\alpha^2 \geqslant 4\beta \tag{2.3}$$

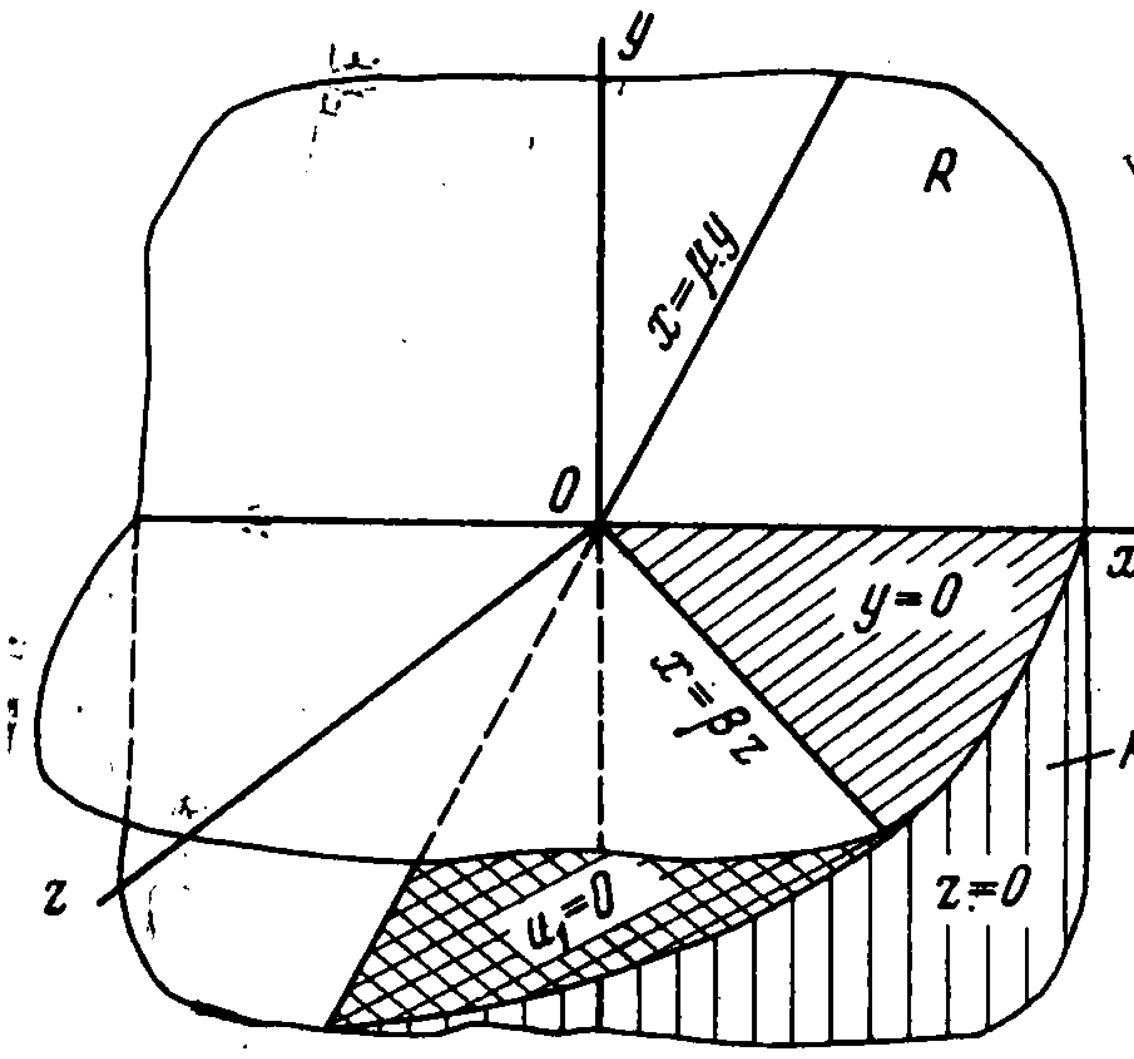
равносильное (1.3). Введем постоянную

$$\mu = {}^1/_2\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}\right), \qquad {}^1/_2\,\alpha \leqslant \mu < \alpha$$

Рассмотрим коническую поверхность K_1 (фиг. 1), образованную следующими плоскостями:

$$y = 0, \quad 0 \leqslant \beta z \leqslant x, \quad z = 0, \quad x \geqslant \mu y, \quad y \leqslant 0$$
$$x - \mu y - \beta z = 0, \quad y \leqslant 0$$

Через K_2 обозначим поверхность, симметричную K_1 относительно начала координат. Пусть S — дополнение областей, ограниченных K_1 и K_2 до всего пространства, и R — сечение, S плоскостью $z = 0$ при $x \geqslant 0$. Область R определяется неравенствами $0 \leqslant y \leqslant \mu^{-1}x$, $x \geqslant 0$.



Фиг. 1

Будем понимать под $L^+(p, t)$ положительную полутраекторию системы (2.2), проходящую через точку p при $t = 0$.

Лемма 2.1. Если $p \in S$, то $L^+(p, t) \in S$.

Для доказательства достаточно установить, что траектории системы (2.2) не могут пересекать поверхности K_1 и K_2 внутрь областей, ограниченных ими. Для K_1 это вытекает из следующих соотношений, в которых $[u^{\cdot}]_{(2.2)}$ означает производную по t в силу системы (2.2)

$$[y^{\cdot}]_{(2.2)} = x - \beta z \quad (0 \leqslant \beta z \leqslant x, \; y = 0)$$

$$[z^{\cdot}]_{(2.2)} = y \leqslant 0 \qquad (y \leqslant 0)$$

Пусть $u_1 = x - \mu y - \beta z$, тогда

$$[u_1^{\cdot}]_{(2.2)} = -\varphi(z) - \mu x + y\,(\mu\alpha - \beta) + \mu\beta z$$

При $u_1 = 0$, $z \geqslant 0$

$$[u_1^{\cdot}]_{(2.2)} = -\varphi(z) - y(\mu^2 - \mu\alpha + \beta) = -\varphi(z) \leqslant 0$$

Для поверхности K_2 рассуждения аналогичны. Лемма доказана.

Лемма 2.2. Существует ограниченная область $Q \subset S$, такая что, если $p \in Q$, то $L^+(p, t) \subset Q$.

Доказательство заключается в построении поверхности Γ, ограничивающей область Q. Рассмотрим плоскость

$$u_2 = x - {}^1/_4\,\alpha y - \beta z = -c, \qquad c > 0 \tag{2.4}$$

Плоскость (2.4) пересекает плоскость $u_1 = 0$ по прямой, вдоль которой $y = -c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1}$ и плоскость $z = 0$ по прямой $x - {}^1/_4\alpha y = -c$.

Покажем, что

$$[u_2^{\cdot}]_{(2.2)} > 0 \text{ в области } u_2 = -c, \ |y| \leqslant c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1} \tag{2.5}$$

если c достаточно велико. При $u_2 = -c$ имеем

$$[u_2^{\cdot}]_{(2.2)} = -\varphi(z) + {}^1/_4\alpha c + ({}^3/_{16}\alpha^2 - \beta)y$$

Если $\beta \leqslant {}^3/_{16}\alpha^2$, то (2.5) справедливо при

$$c > c_1 = \varphi_0(4\mu - \alpha)(4\beta + \mu\alpha - \alpha^2)^{-1}$$

При $\beta > {}^3/_{16}\alpha^2$ неравенство (2.5) выполняется, если

$$c > c_2 = \varphi_0(4\mu - \alpha)({}^1/_2\alpha^2 + \mu\alpha - 4\beta)^{-1}$$

Выбрав $c > c_1$ или $c > c_2$ в зависимости от знака $\beta - {}^3/_{16}\alpha^2$, получим, что часть плоскости $u_2 = -c$ при $|y| < c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1}$, $z \geqslant 0$ пересекается траекториями системы (2.2) в направлении возрастания x.

Заметим далее, что так как $\mu < \alpha$, то $[y^{\cdot}]_{(2.2)} < 0$ в области $u_1 <0> 0$.

Аналогично можно показать, что

$$[u_2^{\cdot}]_{(2.2)} < 0, \text{ если } u_2 = c, \ |y| \leqslant c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1}$$

$$[y^{\cdot}]_{(2.2)} > 0 \text{ при } u_1 \geqslant 0, \ y < 0$$

Поверхность Г образуем из плоскостей

$$u_2 = \pm c, \qquad y = \mp c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1}$$

в указанных областях, добавив к ним плоскости

$$x = -\mu c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1}, \ z \geqslant 0 \text{ и } x = \mu c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1}, \ z \leqslant 0$$

Чтобы сделать Г замкнутой, осталось добавить треугольник T_1 плоскости $z = 0$, ограниченный отрицательной полуосью x и прямыми $x = -\mu c(\mu - {}^1/_4\alpha)^{-1}$, $x - {}^1/_4\alpha y = -c$, треугольник T_2, симметричный T_1, а также соответствующие элементы поверхностей K_1 и K_2.

Из проведенных рассуждений вытекает, что поверхность Г пересекается траекториями системы (2.2) внутрь области Q, ограниченной Г, а поэтому Q обладает требуемым в формулировке леммы 2.2 свойством. Лемма доказана.

Теорема. Если выполнено условие (2.3), система (2.2) имеет замкнутую траекторию, погруженную в Q, если δ достаточно мало.

Доказательство. Обозначим через R_1 ту часть сектора R, которая принадлежит Q и для которой $x \geqslant \beta z_0$, где $z_0 > \delta$ — некоторая постоянная, которая будет определена ниже.

Рассмотрим в плоскости xz прямую l

$$x - \frac{2\beta z_0}{h} z = -1/h\ \beta z_0(z_0 + \delta), \qquad y = 0 \qquad (h = z_0 - \delta > 0)$$

Через прямую l и точку $A(\beta z_0, \beta h/\alpha, \delta)$, лежащую в плоскости $y^{\cdot} = x - \alpha y - \beta z = 0$, проведем плоскость P, уравнение которой

$$u_3 = x - \frac{2\alpha z_0}{h} y - \frac{2\beta z_0}{h}(z - z_0 - \delta) = 0$$

На плоскости P

$$[u_3^{\cdot}]_{(2.2)} = -\varphi(z) - \frac{2\beta z_0}{h} y + \frac{\alpha(z_0 + \delta)}{h}(\beta z_0 - x) \tag{2.6}$$

Положим $h = k\delta$, тогда $z_0 = (k+1)\delta$ и из (2.6) получаем, что на плоскости P

$$[u_3^{\cdot}]_{(2.2)} < 0 \qquad (z \geqslant \delta, \ |x| \leqslant \beta z_0)$$

если справедливо неравенство

$$\delta < \frac{k\varphi_0}{2\alpha\beta}(k+1)^{-1}(k+2)^{-1} \tag{2.7}$$

Геометрически это означает, что всякая траектория, проходящая при $|x| \leqslant \beta z_0$, $z \geqslant \delta$ через точку, которая лежит под плоскостью P (фиг. 2), пересечет с возрастанием времени плоскость $y = 0$ в области

$$x < \frac{2\beta z_0}{h} z - \frac{\beta z_0}{h}(z_0 + \delta), \quad z \geqslant \delta, \quad x \leqslant \beta z_0$$

Покажем, что этим свойством обладает траектория, проходящая через точку B $(\beta z_0, 0, 0)$. В области $0 \leqslant z \leqslant \delta$ система (2.2) интегрируется, так как там

$$x(t) = \beta z_0, \qquad \frac{dy}{dz} = -\frac{1}{y}[\alpha y + \beta(z - z_0)] \tag{2.8}$$

Учитывая начальные значения, получим

$$y^2 + \alpha y u + \beta u^2 = \beta z_0^2 \left[\frac{y(\alpha + \sqrt{\Delta}) + 2\beta u}{y(\alpha - \sqrt{\Delta}) + 2\beta u}\right]^{\varkappa}$$

$$u = z - z_0, \quad \varkappa = \alpha / \sqrt{\Delta}, \qquad \Delta = \alpha^2 - 4\beta$$

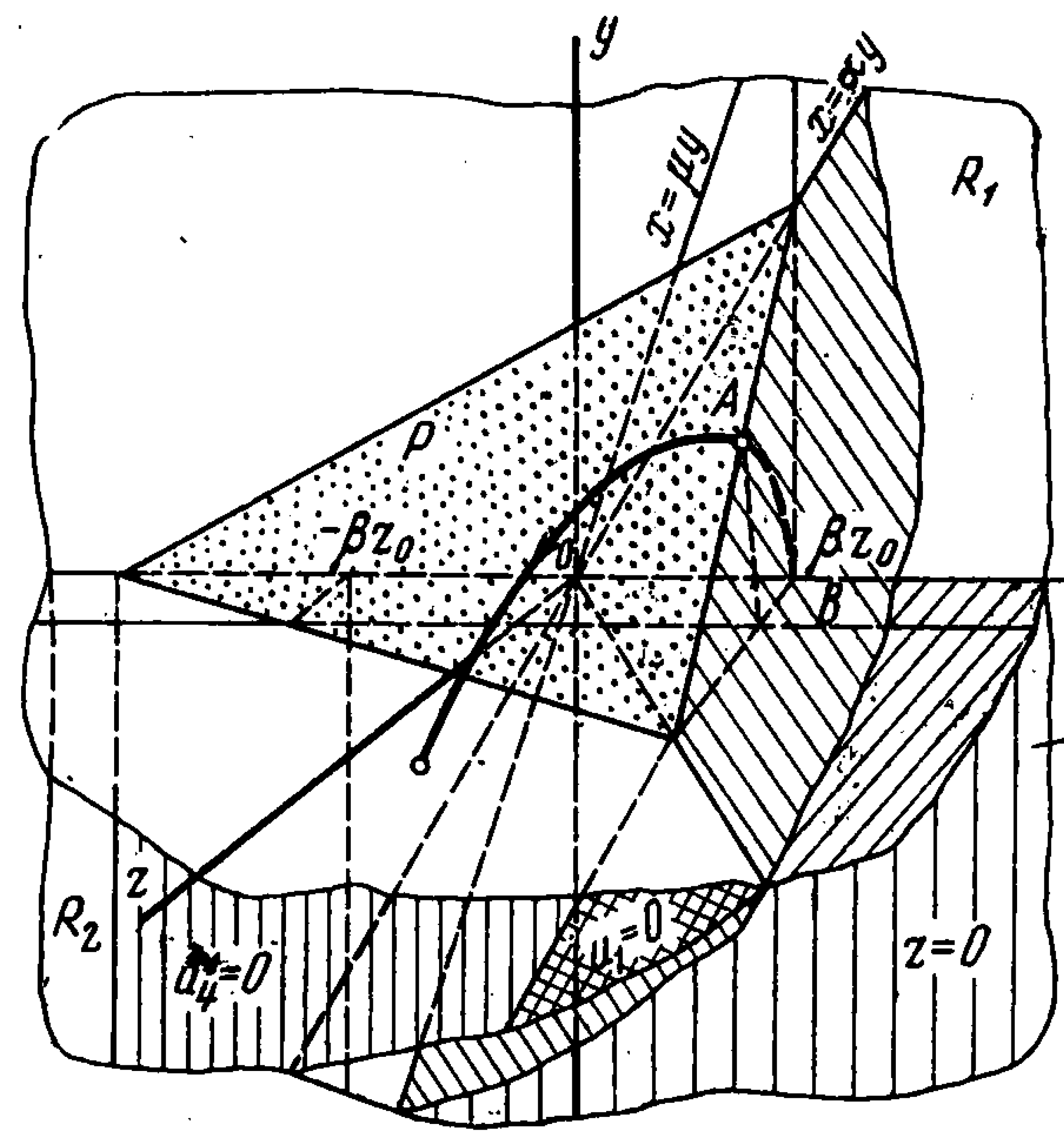
Пусть $y = y_0$ при $z = \delta$. Тогда y_0 определится из уравнения

$$y_0^2 + \alpha h y_0 + \beta h^2 = \beta z_0^2 \left[\frac{y_0(\alpha + \sqrt{\Delta}) - 2h\beta}{y_0(\alpha - \sqrt{\Delta}) - 2h\beta}\right]^{\varkappa}$$

Потребуем, чтобы было $y_0 \geqslant \beta h / \alpha$. Это неравенство имеет место, если

$$k\left(\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}\exp\left\{\frac{\varkappa}{2}\ln\frac{\alpha + \sqrt{\Delta}}{\alpha - \sqrt{\Delta}}\right\} - 1\right) \leqslant 1 \tag{2.9}$$

В дальнейшем считаем, что k удовлетворяет неравенству (2.9). Тогда рассматриваемая траектория при $z = \delta$ оказывается выше плоскости P, откуда и следует доказываемое утверждение.



Фиг. 2

Рассмотрим теперь произвольную траекторию, проходящую через R_1. В силу (2.8) производная dy / dz возрастает вместе с z_0, поэтому как и раньше $y_0 \geqslant \beta h / \alpha$.

Кроме того

$$[y^{\cdot}]_{(2.2)} = -\varphi(z) - \beta y < 0$$

$$(y^{\cdot} = 0, \ y > 0, \ z \geqslant \delta)$$

В указанной области траектории могут пересечь плоскость $y^{\cdot} = 0$ лишь в направлении убывания $y^{\cdot}$ или, что то же, x. Следовательно, их точки пересечения с плоскостью $y = 0$ лежат:

в области

$$x \leqslant \frac{2\beta z_0}{h} - \frac{\beta z_0(z_0 + \delta)}{h}, \quad z \geqslant \delta \qquad (x \leqslant \beta z_0)$$

в области

$$x \leqslant \beta z \quad (x > \beta z_0)$$

Рассмотрим теперь в области Q при $y \leqslant 0$, $z \geqslant \delta$ плоскость

$$u_4 = x - \frac{2\beta z_0}{h}(z - z_0 - \delta) = 0$$

проходящую через прямую l. Если $u_4 = 0$, то в области Q при $z \geqslant 0$, $y \leqslant 0$

$$[u_4^{\cdot}]_{(2.2)} = -\varphi(z) - \frac{2\beta z_0}{h} y < 0 \qquad (2.10)$$

при условии

$$|y| < \frac{h\varphi_0}{2\beta z_0} = \frac{k\varphi_0}{2\beta(k+1)}$$

Но в области Q на плоскости $u_4 = 0$

$$|y| < \frac{\beta}{\mu}(z_0 + \delta) = \frac{\beta\delta}{\mu}(k+2) \qquad (y \leqslant 0,\ z \geqslant \delta)$$

Следовательно, неравенство (2.10) справедливо, если

$$\delta < \frac{k\mu\varphi_0}{2\beta^2}(k+1)^{-1}(k+2)^{-1} \qquad (2.11)$$

Производная $x^{\cdot} = 0$ при $0 \leqslant z \leqslant \delta$, прямая l при $z = \delta$ имеет абсциссу, равную $-\beta z_0$, поэтому траектории системы (2.2), начинающиеся в области R_1, пересекают с возрастанием времени область R_2 плоскости xy, симметричную R_1. В дальнейшем траектории системы (2.2) вновь пересекут R_1, определив тем самым на R_1 геомеоморфизм T со свойством $T(R_1) \subset R_1$. Следовательно, T имеет на R_1 неподвижную точку, через которую проходит замкнутая траектория системы (2.2), погруженная в область Q. Теорема доказана.

Замечание. Из (2.7), (2.9) и (2.11) следует, что целесообразно положить $k = \sqrt{2}$. Рассмотрим числовой пример. Пусть $A = 1000$ *гсмсек*^{2}, $B = 3{,}5$ *гсмсек*^{2}, $H = 1000$ *гсмсек*, $n_1 = 400$ *гсмсек*, $n_2 = 2800$ *гсмсек*, $M_0 = 5000$ *гсм*. Примем $k = \sqrt{2}$. Периодическое движение существует при $\delta < 5{,}9$ *угл.мин*.

В заключение отметим, что теорема остается справедливой и для случая, когда момент $M(\vartheta)$ двигателя стабилизации имеет кусочно-линейную характеристику с насыщением, т. е. когда

$$\varphi(z) = \varphi_0 \quad (|z| > \delta), \qquad \varphi(z) = \varphi_0\delta^{-1}z \quad (|z| \leqslant \delta)$$

Действительно, доказательства лемм 2.1 и 2.2 остаются без изменений. Положим далее

$$\delta < \varphi_0/\alpha\beta \qquad (2.12)$$

При выполнении неравенства (2.12) характеристическое уравнение линейной системы (при $|z| \leqslant \delta$) имеет один отрицательный корень ρ_1 и два комплексных корня с положительной вещественной частью. Направления, по которому траектории входят в начало координат при $t \to \infty$, определяются вектором $(\varphi_0/\delta, -\rho_1^2, -\rho_1)$, т. е. лежат внутри конусов K_1 и K_2. Остается заметить, что при $|z| \leqslant \delta$ прямые круговые цилиндры с осью вдоль указанного направления пересекаются траекториями при возрастании изнутри наружу.

Поступила 10 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ройтенберг Я. Н. Автоколебания гироскопических стабилизаторов. ПММ, 1947, т. 11, вып. 2.
2. Ройтенберг Я. Н. Гироскопы. М., «Наука», 1966.
3. Черников С. А. Симметричные автоколебания гиростабилизатора. Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика, 1960, № 6.
4. Черников С. А. Несимметричные автоколебания гиростабилизатора. Изв. АН СССР, ОТН, Энергетика и автоматика, 1962, № 2.
5. Ривкин С. С. Теория гироскопических устройств, ч. 1—2. Л., Судостроение, 1962—1964.