

## ПРОГРАММИРОВАНИЕ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

Д. А. Маматказин

(Москва)

Рассматривается задача об управляемом движении космического летательного аппарата в центральном поле тяготения по пространственной траектории с закрепленными концами.

Переменные параметры траекторий движения аппарата аппроксимируются степенными многочленами по времени, коэффициенты которых находятся из граничных условий.

1. Движение космического летательного аппарата под действием управляющего ускорения  $W$ , приложенного к его центру масс  $O_1$ , описывается уравнениями во вращающейся правой ортогональной системе координат  $Oxyz$ , ось  $y$  которой совпадает с радиусом-вектором  $r$ , проведенным из центра тяготения  $O$  в точку  $O_1$ , а ось  $x$  направлена в сторону движения так, что вектор абсолютной скорости его центра масс  $V$  лежит в плоскости  $xy$ . Ориентация осей  $Oxyz$  относительно инерциальных  $O\xi\eta\zeta$  определяется (фиг. 1) долготой восходящего узла  $\Omega$ , наклонением мгновенной плоскости орбиты к экватору  $i$  и углом дальности  $u$ . Уравнениями движения будут

$$\begin{aligned} V_x' &= W_x + \omega_z V_y, & V_y' &= W_y - \omega_z V_x - g \\ 0 &= W_z + \omega_y V_x, & \omega_z &= -V_x / r, & g &= g_0 (R_0 / r)^2 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Скорости изменения углов, определяющих ориентацию вращающихся осей относительно инерциальных, описываются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d\Omega}{dt} = \omega_y \frac{\sin u}{\sin i}, \quad \frac{di}{dt} = \omega_y \cos u, \quad \frac{du}{dt} = -\omega_z - \omega_y \sin u \operatorname{ctg} i \quad (1.2)$$

В работе рассматривается способ программирования пространственной траектории движения аппарата с заданными граничными условиями.

Параметры траектории движения аппарата представляются в виде аналитических зависимостей, которые реализуются достаточно простыми функциями управления  $W_x(t)$ ,  $W_y(t)$ ,  $W_z(t)$ . Эти функции управления представляют собой проекции управляющего ускорения  $W$ , приложенного к центру масс аппарата, на подвижные оси  $xuz$ .

Управляющее ускорение находится из выражения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} \quad (1.3)$$

Кажущаяся скорость, затрачиваемая на управление, определяется из уравнения

$$v(T) = \int_0^T W dt \quad (1.4)$$

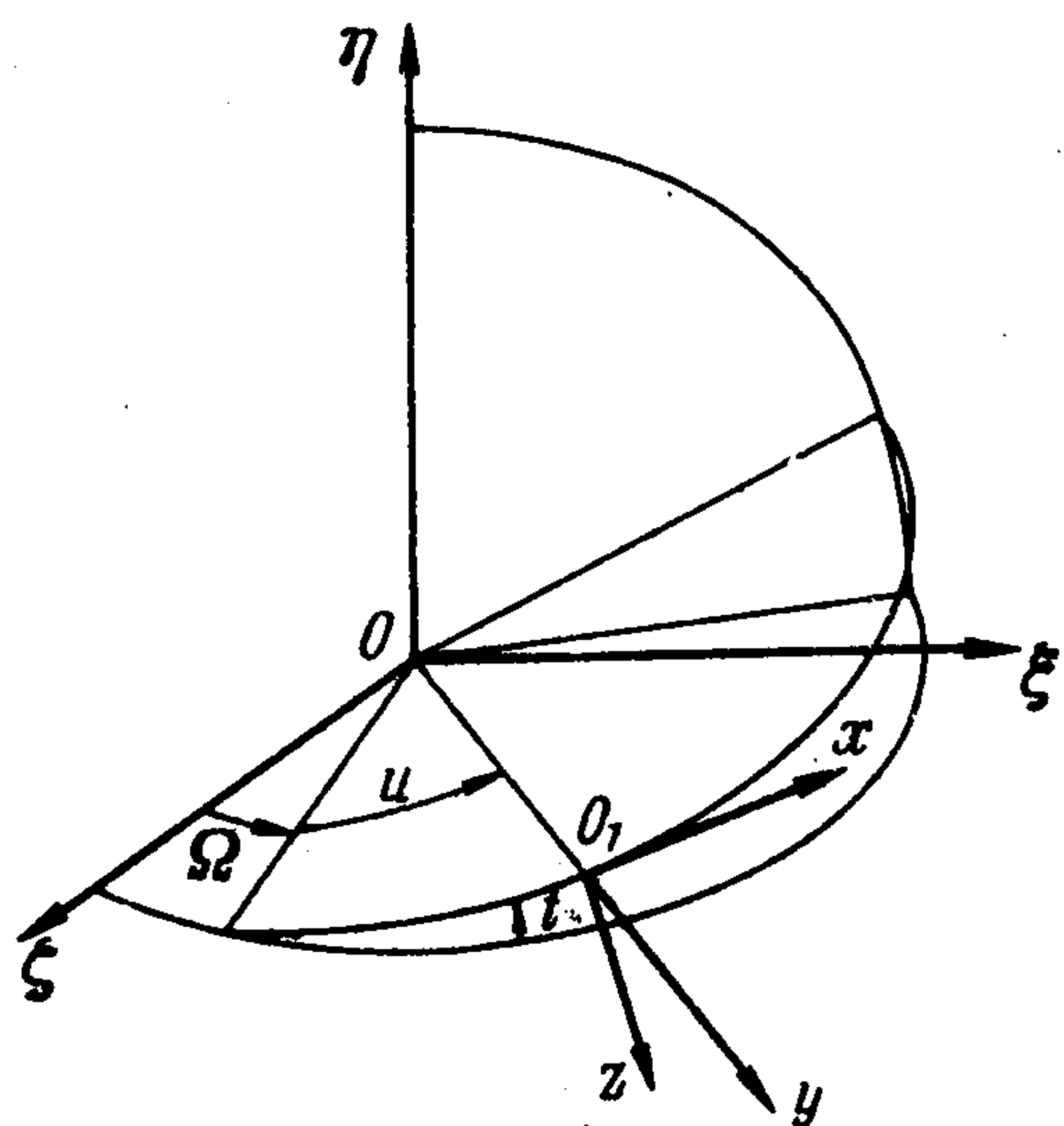
где  $T$  — время управляемого движения.

Вдоль прогнозируемой траектории движения аппарата на интервале времени управления  $0 \leq t \leq T$  проверяются неравенства

$$W_{\min}(t) \leq W(t) \leq W_{\max}(t), \quad v(T) \leq v_* \quad (1.5)$$

где  $W_{\min}(t)$  и  $W_{\max}(t)$  — некоторые ограниченные функции времени. При выполнении этих неравенств управление считается допустимым.

Задача приведения летательного аппарата в заданную точку фазового пространства в заданное время имеет достаточно простое решение, если параметры движения его



Фиг. 1

центра масс на интервале управления  $0 \leq t \leq T$  представляются многочленами

$$V_x/r = a_0 + a_1t + a_2t^2, \quad r = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3 \quad (1.6)$$

При помощи этих уравнений находятся остальные параметры траектории и из граничных условий определяются коэффициенты  $a_0, \dots, a_2, \dots, b_0, \dots, b_3$ .

Полярный угол в плоскости развертки между начальным и текущим положениями радиуса-вектора центра масс аппарата определяется уравнением

$$J = - \int_0^t \omega_z d\tau \quad (1.7)$$

Это уравнение интегрируется с учетом четвертого уравнения (1.1) и первого уравнения (1.6).

После интегрирования получается

$$J = t(a_0 + 1/2a_1t + 1/3a_2t^2) \quad (1.8)$$

Коэффициенты уравнения (1.8) и первого уравнения (1.6) находятся из граничных условий при  $t = 0$  и  $t = T$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{V_{x0}}{r_0}, & a_1 &= \frac{2}{T} \left( -\frac{V_{xk}}{r_k} - 2a_0 + \frac{3}{T} J_k \right) \\ a_2 &= \frac{3}{T^2} \left( \frac{V_{xk}}{r_k} + a_0 - \frac{2}{T} J_k \right) \end{aligned} \quad (1.9)$$

К началу управляемого движения величины  $V_{x0}, V_{xk}, r_0, r_k, r_0', r_k', J_k$  и  $T$  считаются известными.

Дифференцированием второго уравнения (1.6) находится вертикальная скорость аппарата и относительное ускорение вдоль радиуса-вектора его центра масс

$$r' = V_y = b_1 + 2b_2t + 3b_3t^2, \quad V_y' = 2b_2 + 6b_3t \quad (1.10)$$

Коэффициенты  $b_0, \dots, b_3$  находятся из совместного решения этих уравнений и второго уравнения (1.6) по заданным граничным условиям при  $t = 0$  и  $t = T$ .

$$\begin{aligned} b_0 &= r_0, & b_1 &= r_0', & b_2 &= \frac{1}{T} \left( \frac{3h}{T} - r_k' - 2r_0' \right) \\ b_3 &= \frac{1}{T^2} \left( r_k' + r_0' - \frac{2h}{T} \right), & h &= r_k - r_0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

Проекция вектора абсолютной скорости  $V$  на направление движения определяется как произведение первого и второго уравнений (1.6)

$$V_x = c_0 + c_1t + \dots + c_5t^5 \quad (1.12)$$

После вычислений коэффициентов  $c_0, \dots, c_5$  получается

$$\begin{aligned} c_0 &= a_0b_0, & c_1 &= a_0b_1 + a_1b_0, & c_2 &= a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 \\ c_3 &= a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1, & c_4 &= a_1b_3 + a_2b_2, & c_5 &= a_2b_3 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Дифференцированием уравнения (1.12) находится относительное ускорение аппарата вдоль направления движения

$$V_x' = c_1 + 2c_2t + \dots + 5c_5t^4 \quad (1.14)$$

Умножением первого уравнения (1.6) на первое уравнение (1.10) находится поворотное ускорение аппарата

$$V_x V_y / r = p_0 + p_1t + \dots + p_4t^4 \quad (1.15)$$

После вычислений коэффициентов  $p_0, \dots, p_4$  получается

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0b_1, & p_1 &= 2a_0b_2 + a_1b_1, & p_2 &= 3a_0b_3 + 2a_1b_2 + a_2b_1 \\ p_3 &= 3a_1b_3 + 2a_2b_2, & p_4 &= 3a_2b_3 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Умножением первого уравнения (1.6) на уравнение (1.12) находится центростремительное ускорение вдоль траектории движения аппарата

$$V_x^2 / r = q_0 + q_1t + \dots + q_7t^7 \quad (1.17)$$

После вычислений коэффициентов  $q_0, \dots, q_7$  с учетом (1.13) получается

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0^2 b_0, & q_1 &= a_0(2a_1 b_0 + a_0 b_1), & q_2 &= 2a_0(a_1 b_1 + a_2 b_0) + a_0^2 b_2 + a_1^2 b_0 \\ q_3 &= 2(a_1 a_2 b_0 + a_0 a_2 b_1 + a_0 a_1 b_2) + a_0^2 b_3 + a_1^2 b_1 \\ q_4 &= 2(a_1 a_2 b_1 + a_0 a_2 b_2 + a_0 a_1 b_3) + a_1^2 b_2 + a_2^2 b_0 \\ q_5 &= 2a_2(a_1 b_2 + a_0 b_3) + a_1^2 b_3 + a_2^2 b_1, & q_6 &= a_2(a_2 b_2 + 2a_1 b_3), & q_7 &= a_2^2 b_3 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Функция управления  $W_x'(t)$  находится из первого уравнения (1.1) с учетом уравнений (1.14) и (1.15)

$$W_x = c_1 + p_0 + (2c_2 + p_1)t + \dots + (5c_5 + p_4)t^4 \quad (1.19)$$

Функция управления  $W_y(t)$  определяется из второго уравнения (1.1) с учетом второго уравнения (1.10) и уравнения (1.17)

$$W_y = 2b_2 - q_0 + (6b_3 - q_1)t - q_2 t^2 - \dots - q_7 t^7 + g \quad (1.20)$$

В этом уравнении ускорение поля тяготения  $g$  в соответствии с пятым уравнением (1.1) и вторым уравнением (1.6) является известной функцией времени.

Законы управления (1.19), (1.20) полностью определяют движение аппарата в плоскости развертки по выбранной траектории с закрепленными концами.

2. Закон управления движением плоскости орбиты аппарата заимствуется из работы [1].

$$W_z = KV_x^2 / r \quad (2.1)$$

При этом законе управления уравнения (1.2) интегрируются независимо от уравнений (1.1) и появляется возможность программирования пространственной траектории космического летательного аппарата.

Программирование управляемого движения плоскости орбиты начинается с установления формы следа траектории аппарата на поверхности сферы единичного радиуса.

На участке траектории, где  $W_z = 0$ , движение изображающей точки происходит по дуге большого круга и угол  $J$  определяется из граничных условий.

Изображающая точка определяется как точка пересечения радиуса-вектора центра масс аппарата с поверхностью сферы единичного радиуса.

При  $W_z \neq 0$  характер движения изображающей точки определяется из формул, полученных в работе [1]

$$J = \int_{x_0}^{x_k} \frac{dx \operatorname{sign}(K \cos u)}{\sqrt{-(1+K^2)x^2 + 2kx + K^2 - k^2}} \quad (x = \cos i) \quad (2.2)$$

$$\cos i - K \sin u \sin i = k, \quad k = \cos i_0 - K \sin u_0 \sin i_0$$

$$\Omega_k - \Omega_0 = \int_{x_0}^{x_k} \frac{(x-k) \operatorname{sign}(K \cos u) dx}{(x^2-1) \sqrt{-(1+K^2)x^2 + 2kx + K^2 - k^2}}$$

Для упрощения дальнейших выкладок при установлении формы траектории изображающей точки ориентация инерциальных осей выбирается так, чтобы в момент времени начала управления движением плоскости орбиты

$$u_0 = \Omega_0 = i_0 = 0$$

Тогда из третьего соотношения (2.2) получается постоянная  $k = 1$ .

Предполагается, что на интервале времени управления экстремальное значение угла наклона плоскости орбиты  $i_*$  не достигается. Тогда, после интегрирования первого и последнего уравнений (2.2), получается

$$J = \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \arccos \left[ \frac{(1+K^2) \cos i - 1}{K^2} \right] \quad (2.3)$$

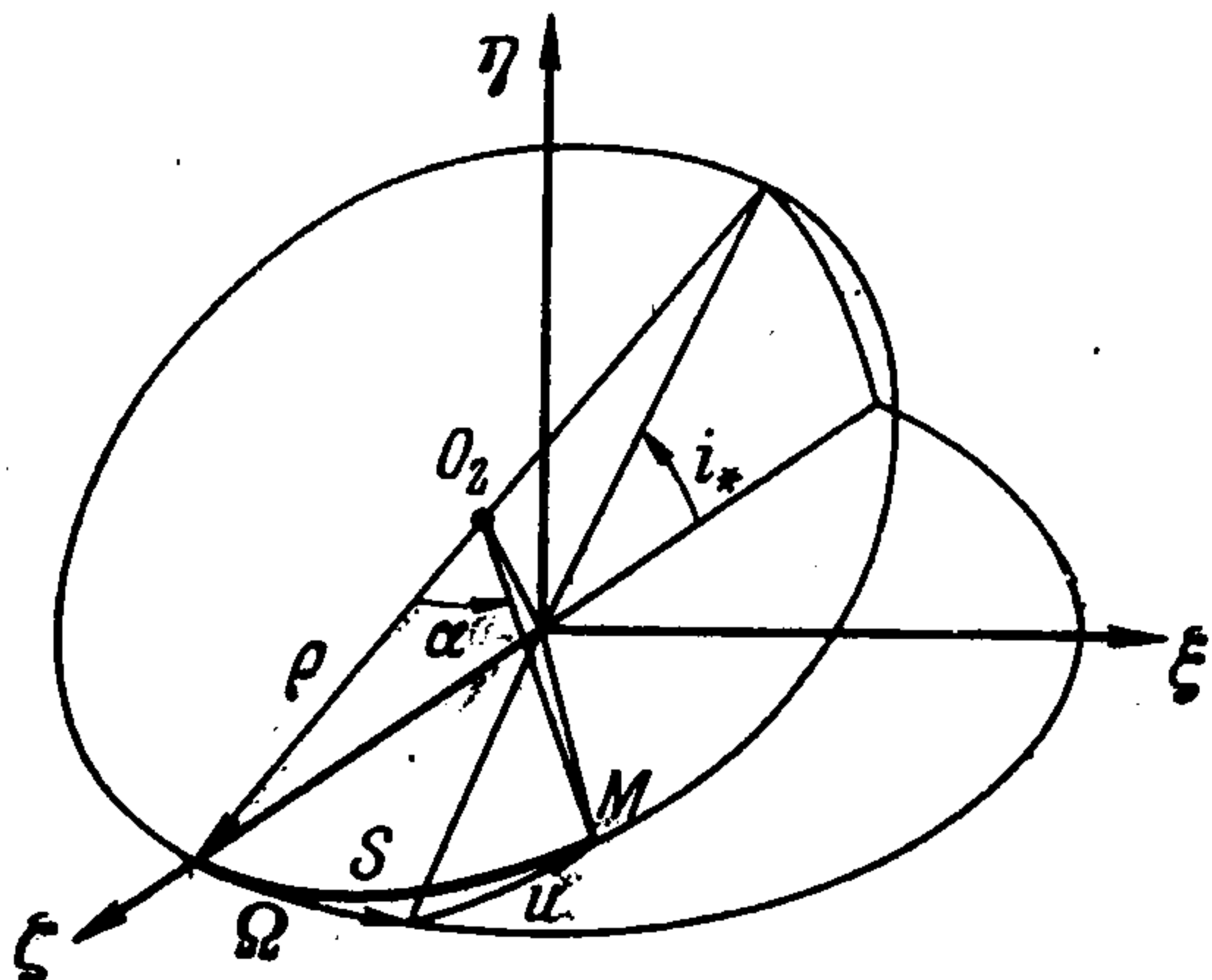
$$\Omega = \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{1}{K^2} \left( -\frac{4}{\cos i + 1} + 2 + K^2 \right) \right]$$

Преобразованием второго уравнения (2.2) при  $k = 1$  находится угол дальности

$$u = \frac{1}{2} \operatorname{arccos} \left[ \frac{1}{K^2} \left( -\frac{4}{\cos i + 1} + 2 + K^2 \right) \right] \quad (2.4)$$

Сравнением полученного уравнения со вторым уравнением (2.3) устанавливается тождественное равенство

$$\Omega = u \quad (2.5)$$



Фиг. 2

Из геометрических представлений это равенство может выполняться в любой момент времени только в случае, когда мгновенная плоскость орбиты непрерывно касается поверхности кругового конуса с вершиной в центре тяготения. В результате пересечения поверхности кругового конуса с поверхностью единичной сферы получается малый круг.

Покажем правильность этих геометрических представлений.

На фиг. 2 изображен круговой конус с вершиной в начале инерциальных осей координат  $\xi, \eta, \zeta$ .

Управляемое движение изображающей точки  $M$  происходит по дуге  $S$ , совпадающей с основанием кругового конуса.

Из геометрического построения видно, что экстремальное значение наклона плоскости орбиты  $i_*$  достигается при  $\Omega = u = \pi/2$ .

Такой же вывод получается из рассмотрения второго уравнения (1.2) и равенства (2.5). Угол при основании кругового конуса равняется  $i_*/2$ .

Радиус малого круга, который является основанием кругового конуса

$$\rho = 1 \cdot \cos (i_*/2) \quad (2.6)$$

Из второго уравнения (2.2) при  $i = i_*$  и  $u = \pi/2$  находится выражение

$$\cos (i_*/2) = 1 / \sqrt{1 + K^2} \quad (2.7)$$

Сравнением этого выражения с формулой (2.6) устанавливается равенство

$$\rho = 1 / \sqrt{1 + K^2} \quad (2.8)$$

Длина дуги малого круга на участке управления (фиг. 2)

$$S = \rho \alpha \quad (2.9)$$

С другой стороны устанавливается равенство

$$S = 1 \cdot J$$

Преобразованием этой формулы с учетом (2.8) и (2.9) получается

$$\alpha = J \sqrt{1 + K^2} \quad (2.10)$$

Из построений (фиг. 2) с учетом (2.7) выводится соотношение

$$\alpha = \operatorname{arccos} \left[ \frac{(1 + K^2) \cos i - 1}{K^2} \right] \quad (2.11)$$

Такое же соотношение с учетом (2.10) получается из первого уравнения (2.3).

Таким образом, окончательно убеждаемся в правильности геометрической интерпретации характера движения плоскости орбиты аппарата.

В работе рассматривается основной случай перевода аппарата из исходной плоскости орбиты в заданную, когда функция управления  $W_2$  знакопостоянна и движение происходит по единственной дуге малого круга.

Перевод аппарата из исходной плоскости орбиты в заданную может осуществляться по бесчисленному множеству дуг различной кривизны. Поэтому появляется задача оптимизации траектории движения плоскости орбиты.

В качестве критерия оптимальности принимается функционал

$$v_z = \int_{t_1}^{t_2} |W_z| dt = \min$$

С учетом (2.1) этот функционал переписывается в виде

$$v_z = \int_{t_1}^{t_2} |K| \frac{V_{x^2}}{r} dt = \min \quad (2.12)$$

Неизвестными в нем являются коэффициент  $K$  и пределы интегрирования  $t_1$  и  $t_2$ .

Моменты времени начала  $t_1$  и окончания  $t_2$  управляемого движения [плоскости орбиты являются функциями коэффициента  $K$ .

Зависимость пределов интегрирования  $t_1$  и  $t_2$  от параметра  $K$  находится при помощи геометрического построения (фиг. 3). На участках фигуры  $0-1$  и  $2-k$  движение происходит по дугам большого круга, а на участке  $1-2$  — по дуге малого.

Величина  $J_p$  — угловое расстояние по дуге большого круга между начальным положением радиуса — вектора центра масс аппарата и линии пересечения исходной и заданной плоскостей орбит.

В соответствии с (2.5) и (2.3)

$$\Omega_p = u_p = \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{1}{K^2} \left( -\frac{4}{\cos i_k + 1} + 2 + K^2 \right) \right]$$

С учетом полученного выражения, уравнения (1.8) и первого уравнения (2.3) из геометрических построений фиг. 3 получается

$$J_1 = J_p - \frac{1}{2} \arccos \left[ \frac{1}{K^2} \left( -\frac{4}{\cos i_k + 1} + 2 + K^2 \right) \right] = t_1 \left( a_0 + \frac{1}{2} a_1 t_1 + \frac{1}{3} a_2 t_1^2 \right)$$

$$J_2 = J_1 + \frac{1}{\sqrt{1+K^2}} \arccos \left[ \frac{(1+K^2) \cos i_k - 1}{K^2} \right] = t_2 \left( a_0 + \frac{1}{2} a_1 t_2 + \frac{1}{3} a_2 t_2^2 \right) \quad (2.13)$$

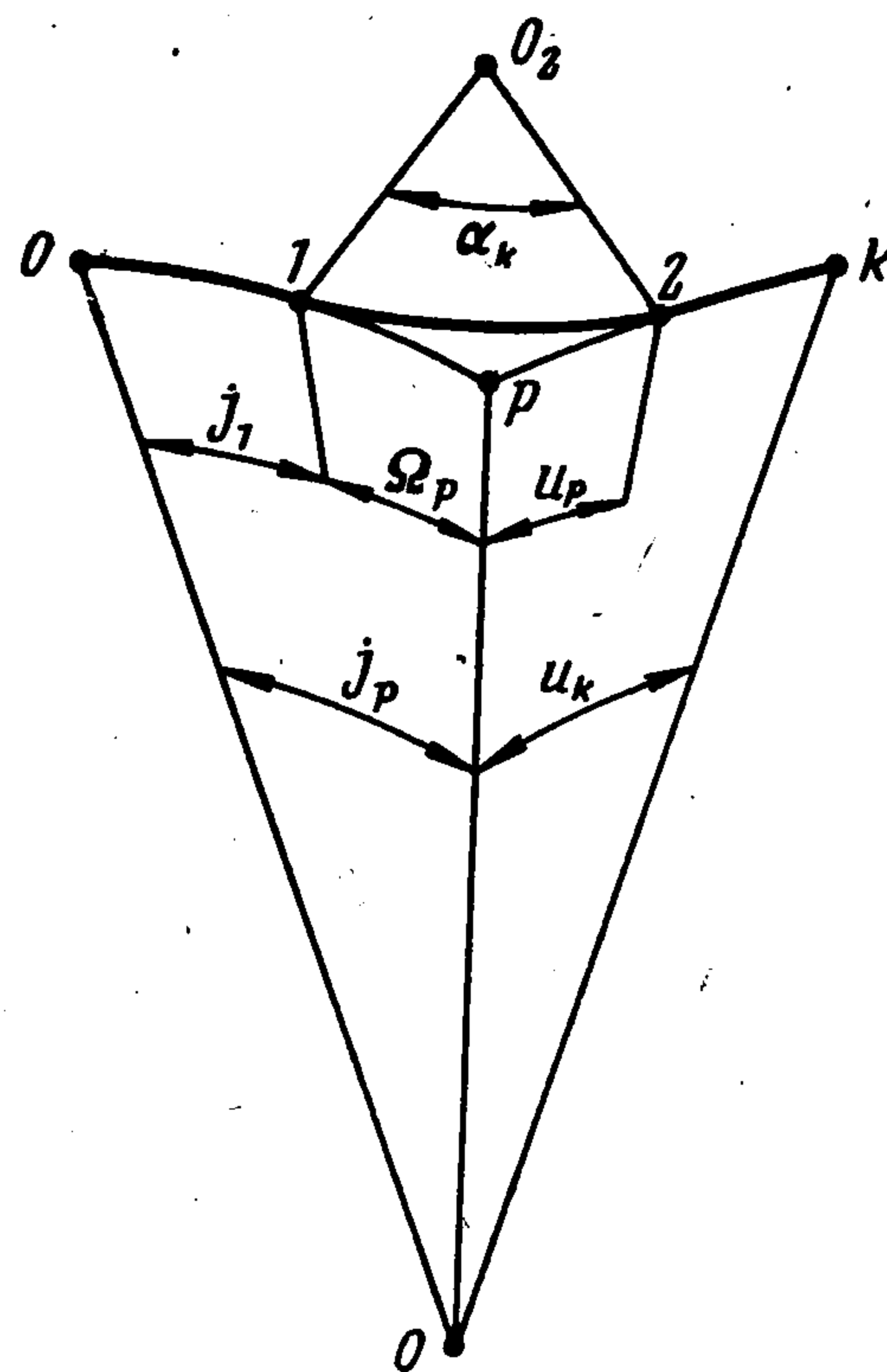
После дифференцирования функционала (2.12) по параметру  $K$  и приравнивания полученного результата к нулю получается уравнение для определения оптимального значения величины  $K$

$$\frac{dv_z}{dK} = \text{sign}(K) \int_{t_1}^{t_2} \frac{V_{x^2}}{r} dt + |K| \left( \frac{dt_2}{dK} \frac{V_{x_2^2}}{r_2} - \frac{dt_1}{dK} \frac{V_{x_1^2}}{r_1} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Дифференцированием по параметру  $K$  формул (2.13) находятся производные, входящие в уравнение (2.14)

$$\frac{dt_1}{dK} = \frac{r_1}{V_{x_1}} \frac{a}{K \sqrt{K^2 - a^2}} \quad \left( a = \sqrt{\frac{1 - \cos i_k}{1 + \cos i_k}} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{dt_2}{dK} = \frac{r_2}{V_{x_2}} \left\{ \frac{a}{K \sqrt{K^2 - a^2}} \frac{K^2 - 1}{1 + K^2} - \frac{K}{(1 + K^2)^{3/2}} \arccos \left[ \frac{(1 + K^2) \cos i_k - 1}{K^2} \right] \right\}$$



Фиг. 3

Формула (2.14) с учетом полученных выражений преобразуется к виду

$$\frac{dv_z}{dK} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{V_{x^2}}{r} dt + V_{x^2}' \left\{ \frac{a}{\sqrt{K^2 - a^2}} \frac{K^2 - 1}{1 + K^2} - \right. \quad (2.16)$$

$$\left. - \frac{K^2}{(1 + K^2)^{3/2}} \arccos \cos \left[ \frac{(1 + K^2) \cos i_k - 1}{K^2} \right] \right\} - V_{x^1} \frac{a}{\sqrt{K^2 - a^2}} = 0$$

Это уравнение имеет решение при  $K \rightarrow \infty$ , так как каждое его слагаемое стремится к нулю.

В этом случае из уравнений (2.13) получается

$$J_1 = J_2 = J_p, \quad t_1 = t_2 = t_p$$

Здесь  $t_p$  — время, за которое аппарат достигает линии пересечения исходной и заданной плоскостей орбит при движении по дуге большого круга  $Op$ .

Преобразованием интеграла (2.12) с учетом (2.10), (1.7) и четвертого уравнения (1.1) получается

$$v_z = \frac{|K|}{\sqrt{1 + K^2}} \int_0^{\alpha_k} V_x d\alpha \quad (2.17)$$

Этот интеграл с учетом (2.11) при  $K \rightarrow \infty$  преобразуется к выражению

$$v_z = V_{xp} i_k$$

В действительности в соответствии с первым неравенством (1.5)  $K$  является ограниченной величиной.

Для минимизации затраты кажущейся скорости  $v_z$  на управление величина  $K$  должна быть максимально возможной. Коэффициент  $K$  выбирается с учетом неравенств (1.5) методом последовательных приближений. После его выбора из уравнений (2.13) находятся моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  начала и окончания управляемого движения плоскости орбиты аппарата.

3. Для приближенной аналитической оценки допустимости управления, которая определяется неравенствами (1.5), функция  $W(t)$  представляется в виде многочлена степени  $n$ . В этом случае уравнение (1.4) интегрируется и находится формула для определения затрат кажущейся скорости на управление  $v(T)$ .

Многочлен, который описывает функцию  $W(t)$ , получается путем разложения правой части уравнения (1.3) в ряд Тейлора и отбрасывания малых членов.

Для упрощения формул, которыми определяются коэффициенты разложения ряда, ускорение от сил тяготения в (1.20) разлагается в ряд Тейлора в точке  $r_0$ .

$$g = g^0 \sum_{n=0}^{\infty} S_n t^n, \quad g^0 = g_0 (R_0 / r_0)^2 \quad (3.1)$$

В реальных траекториях управляемого движения аппарата этот ряд весьма быстро сходится, так как относительное изменение величины  $r$  на участке управления незначительно.

С достаточной степенью точности ряд (3.1) представляется многочленом

$$g = g^0 (s_0 + s_1 t + \dots + s_3 t^3) \quad (3.2)$$

Коэффициенты  $s_0, \dots, s_3$  этого многочлена, вычисленные с учетом уравнений (1.10), определяются выражениями

$$s_0 = 1, \quad s_1 = -2b_1/b_0, \quad s_2 = (3b_1^2 - 2b_2b_0)/b_0^2 \quad (3.3)$$

$$s_3 = 2(-2b_1^3 + 3b_0b_1b_2 - b_0^2b_3)/b_0^3$$

В связи с малостью относительного изменения радиуса  $r$  и ограниченностью функции  $W(t)$  коэффициенты  $q_5, q_6, q_7$  в (1.17) принимаются равными нулю.

Тогда уравнения (1.19), (1.20) и (2.1) с учетом (3.2) и (1.17) записываются в виде

$$\begin{aligned} W_x &= \alpha_0 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_4 t^4, & W_y &= \beta_0 + \beta_1 t + \dots + \beta_4 t^4 \\ W_z &= \gamma_0 + \gamma_1 t + \dots + \gamma_4 t^4 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Коэффициенты этих многочленов определяются по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (n+1)c_{n+1} + p_n \quad (n=0, 1, 2, 3, 4) \\ \beta_n &= (n+1)(n+2)b_{n+2} - q_n + g^0 s_n, & \gamma_n &= Kq_n \end{aligned} \quad (3.5)$$

В этих выражениях коэффициенты  $b_4, b_5, b_6, s_4$  равны нулю.

Теперь функция  $W(t)$  находится подстановкой в (1.3) уравнений (3.4)

$$W = (j_0 + j_1 t + \dots + j_8 t^8)^{1/2} \quad (3.6)$$

После вычисления коэффициентов  $j_0, \dots, j_8$  получается

$$\begin{aligned} j_0 &= \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2, & j_1 &= 2(\alpha_0 \alpha_1 + \beta_0 \beta_1 + \gamma_0 \gamma_1) \\ j_2 &= 2(\alpha_0 \alpha_2 + \beta_0 \beta_2 + \gamma_0 \gamma_2) + \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 \\ j_3 &= 2(\alpha_0 \alpha_3 + \beta_0 \beta_3 + \gamma_0 \gamma_3 + \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) \\ j_4 &= 2(\alpha_0 \alpha_4 + \beta_0 \beta_4 + \gamma_0 \gamma_4 + \alpha_1 \alpha_3 + \beta_1 \beta_3 + \gamma_1 \gamma_3) + \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 \\ j_5 &= 2(\alpha_1 \alpha_4 + \beta_1 \beta_4 + \gamma_1 \gamma_4 + \alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3) \\ j_6 &= 2(\alpha_2 \alpha_4 + \beta_2 \beta_4 + \gamma_2 \gamma_4) + \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 \\ j_7 &= 2(\alpha_3 \alpha_4 + \beta_3 \beta_4 + \gamma_3 \gamma_4), & j_8 &= \alpha_4^2 + \beta_4^2 + \gamma_4^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Функция  $W(t)$  в точках  $t_1$  и  $t_2$  начала и окончания управляемого движения плоскости орбиты аппарата имеет разрывы первого рода. Поэтому ее разложение в ряд Тейлора производится на каждом непрерывном интервале времени управления отдельно и в формуле (1.4) при  $0 < t_1 < t_2 < T$  разбиваются пределы интегрирования. В целях упрощения выкладок принимается  $t_1 = 0, t_2 = T$ . Тогда разложением правой части уравнения (3.6) в ряд Тейлора в точке  $t_0$ , где  $W = W_{\max}$ , получается

$$W(t) = W(t_0) \sum_{n=0}^{\infty} l_n \Delta t^n \quad (\Delta t = t - t_0) \quad (3.8)$$

Для допустимых траекторий движения аппарата этот ряд быстро сходится вследствие ограниченности  $W(t)$ .

Практически для целого ряда траекторий можно ограничиться учетом трех членов

$$W = W(t_0)(l_0 + l_1 \Delta t + l_2 \Delta t^2), \quad W(t_0) = (j_0 + j_1 t_0 + \dots + j_8 t_0^8)^{1/2} \quad (3.9)$$

После вычисления коэффициентов  $l_0, l_1, l_2$  этого многочлена получается

$$\begin{aligned} l_0 &= 1, & l_1 &= \frac{1}{2W^2(t_0)} \sum_{n=0}^7 (n+1) j_{n+1} t_0^n \\ l_2 &= \frac{1}{4W^2(t_0)} \sum_{n=0}^6 (n+1)(n+2) j_{n+2} t_0^n - \frac{1}{2} l_1^2 \end{aligned}$$

Интегрированием уравнения (1.4) с учетом (3.9) находится величина кажущейся скорости, затрачиваемой на управление

$$v(T) = TW(t_0)[l_0 + l_1(1/2 T - t_0) + l_2(1/3 T^2 - t_0 T + t_0^2)] \quad (3.10)$$

Подстановкой (3.6), (3.10) в неравенства (1.5) проверяется допустимость выбранной траектории движения аппарата с закрепленными концами.

Поступила 23 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М а м а т к а з и н Д. А. О некоторых законах управления орбитой космического летательного аппарата. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.