СХОДИМОСТЬ ЗАДАЧИ ПРЕДЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ

А. М. Проценко

(Москва)

Обычно в рамках теории предельного равновесия идеальнопластического тела [1] рассматриваются системы с конечным числом степеней свободы. Методы теории математического программирования позволяют результаты, полученные для конечномерных моделей, распространять на задачи предельного равновесия сплошного тела.

Рассматривается идеальнопластическое тело конечного объема V с поверхностью S. Нагрузка, пропорциональная параметру P, приложена на части поверхности S_σ. На другой части поверхности S_u заданы условия несмещаемости $u_i = 0$ $(i = 1,2,3)$, где $\mathbf{u}$ — вектор скоростей перемещений. Поле напряжений должно удовлетворять уравнениям равновесия и граничным условиям на S_σ

$$\sigma_{ij,j} = 0, \qquad \sigma_{ij}\nu_j - Pk_i = 0 \tag{1}$$

Условия пластичности принимаются в виде выпуклого оператора $f(\sigma) \leqslant 0$. При таких условиях задача предельного равновесия в статической формулировке заключается в определении $P^* = \sup P(\sigma)$. Этому соответствует обобщенный функционал Лагранжа [2]

$$L(P, \sigma, \mathbf{u}, \lambda) = P + \int\limits_V [u_i\sigma_{ij,j} - \lambda f(\sigma)]\, dv + \int\limits_S u_i(\sigma_{ij}\nu_j - Pk_i)\, ds \tag{2}$$

Статической предельной нагрузке соответствует обобщенная седловая точка

$$L^* = \sup_{P,\sigma} \inf_{u,\lambda} L(P, \sigma, \mathbf{u}, \lambda) \qquad (\lambda \geqslant 0) \tag{3}$$

Предельной кинематической нагрузке соответствуют переставленные экстремальные процедуры, также определяющие седловую точку

$$L^{**} = \inf_{u,\lambda} \sup_{P,\sigma} L(P, \sigma, \mathbf{u}, \lambda) \qquad (\lambda \geqslant 0) \tag{4}$$

Совпадать седловые точки $(L^* = L^{**} = P^*)$ будут в том случае, когда условия пластичности имеют вид пластического потенциала, т. е. имеет место ассоциированный закон пластического течения $\varepsilon_{ij} = \lambda df/d\sigma_{ij}$, где $\lambda \geqslant 0$ — параметры пластичности, ε_{ij} — компоненты тензора скоростей пластической деформации.

Интегралы, составляющие (2), естественно рассматривать как линейные функционалы в гильбертовом пространстве. Так $\mathbf{u}$ есть элемент пространства перемещений H_u, $\sigma \in H_\sigma$, где H_σ — операторносопряженное к H_u пространство напряжений. Пусть в H_u выделен базис $\{\varphi_1, \varphi_2 \ldots\}$ так, что на S_u имеет место $\varphi_\alpha = 0$ $(\alpha = 1,2,\ldots)$. Разложение скоростей перемещений по этому базису удовлетворяет несмещаемости на S_u

$$u_i = \sum_\alpha x_i^\alpha \varphi_\alpha \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{5}$$

Уравнение мощности работы внутренних и внешних сил такое

$$\int\limits_V \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} dv - P \int\limits_S k_i u_i ds = 0$$

Подстановка сюда (5) приводит к уравнению

$$\sum_\alpha x_i^\alpha \left(\int\limits_V \sigma_{ij}\varphi_{\alpha,j} dv - P \int\limits_S k_i \varphi_\alpha ds \right) = 0 \tag{6}$$

Поле напряжений, при котором (6) выполняется для любого $\mathbf{u} \in H_u$, является статически возможным. Это показывается так. Интегрированием по частям (6) приводится к уравнению

$$\sum_\alpha x_i^\alpha \left(\int\limits_S \varphi_\alpha (\sigma_{ij}\nu_j - Pk_i)\, ds - \int\limits_V \varphi_\alpha \sigma_{ij,j} dv \right) = 0 \tag{7}$$

Если поле напряжений статически возможное (уравнения (1) выполняются), то при любых x_i^α уравнение (7) тождественно имеет место. Следовательно, уравнение (6) должно выполняться при любых x_i^α. Поэтому оно распадается на отдельные уравнения

$$\int\limits_V \sigma_{ij}\varphi_{\alpha,j}dv - P\int\limits_S k_i\varphi_\alpha ds = 0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

Эта система эквивалентна уравнениям (1) и может быть получена, если разрывы поля напряжений ортогональны разрывам поля скоростей деформаций. Система (8) также может быть получена из условия $\partial L \,/\, \partial \mathbf{u} = 0$ для функционала (2), что соответствует процедуре inf в (3).

Пусть в H_σ' существует базис $\{\psi_1, \psi_2 \ldots\}$, для которого на S_σ выполняются условия $\psi_\beta \nu_i = c_\beta k_i$ ($i = 1, 2,3$; $\beta = 1, 2, \ldots$). Здесь c_β — любые числа, включая нуль, но обязательно $|c_1| + |c_2| + \ldots < \infty$. Разложение напряжений по такому базису удовлетворяет условиям на S_σ при некотором значении параметра P

$$\sigma_{ij} = \sum_\beta \zeta_{ij}{}^\beta \psi_\beta, \qquad \sigma_{ij}\nu_j = k_i \sum_\beta c_\beta \tag{9}$$

Здесь $\zeta_{ij}{}^\beta$ — тензоры, симметричные по нижним индексам. Подстановка (9) в (8) приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{\beta=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} \zeta_{ij}{}^\beta h_j{}^{\beta\alpha} - P\rho_i{}^\alpha = 0 \qquad (i = 1, 2, 3;\ \alpha = 1, \ldots, m) \tag{10}$$

$$h_j{}^{\beta\alpha} = \int\limits_V \psi_\beta \varphi_{\alpha,j} dv, \qquad \rho_i{}^\alpha = \int\limits_S k_i \varphi_\alpha ds$$

Для этой системы принято, что разложения (5) и (9) конечные, с числом слагаемых соответственно m и n. При $2n > m$ система (10) допускает неоднозначное решение $\sigma(n, m)$, сходящееся по норме H_σ к статически возможному полю напряжений. При $n = m$ эта система $3n$ раз недоопределена в трехмерной задаче, n раз недоопределена в двумерной и определима в одномерной задачах, что согласуется с порядком неопределимости дифференциальных уравнений равновесия.

Последовательность статических решений задачи, соответствующих седловой точке (3), определяется как последовательность $P(n, m) = \sup P(\sigma)$ при условиях (10) и

$$f\left(\sum_{\beta=1}^{n} \zeta_{ij}{}^\beta \psi_\beta\right) \leqslant 0 \tag{11}$$

При фиксированном m последовательность $P(n,m)$ монотонно возрастающая. Это доказывается так. Пусть имеются два разложения (9) с числом слагаемых l и $n<l$. Неравенство (11) выделяет в H_σ выпуклые замкнутые области Ω^n и Ω^l, расположенные в линейных оболочках, натянутых на $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ и $\{\psi_1, \ldots, \psi_n, \ldots, \psi_l\}$. Из выпуклости, и того что второй базис включает в себя первый, следует, что Ω^l содержит в себе Ω^n ($\Omega^n \subset \Omega^l$). Число уравнений (10) фиксировано, значит, многообразие $\sigma(n, m) \subset \sigma(l,m)$. Если бы оказалось, что при таких условиях $P(n, m) > P(l, m)$, то была бы нарушена статическая теорема предельного равновесия. Поэтому последовательность $P(n, m)$ не убывает с ростом n и в силу ограниченности имеет предел

$$P(m) = \lim P(n,m) \quad (n \to \infty) \tag{12}$$

Если обозначить линейную оболочку функций $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_m\}$ как R_m, то $P(m)$ есть седловая точка функционала Лагранжа (3) при условии, что $\mathbf{u} \in R_m$. В силу свойств двойственности $P(m)$ так же есть седловая точка (4) при том же условии, что $\mathbf{u} \in R_m$. Но тогда с увеличением m происходит расширение R_m до H_u, а последовательность $P(m)$ не может быть возрастающей и имеет своим пределом

$$P^* = \lim_{m\to\infty} P(m) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} P(n, m) \tag{13}$$

Пределы эти не перестановочны, хотя бы из-за условия $2n > m$, позволяющего решать систему (10). Сходимость $P(n, m)$ к $P(m)$ и $P(m)$ к P^* означает, что имеют место неравенства

$$| P^* - P(m) | \leqslant \varepsilon_m, \qquad | P(m) - P(n,m) | \leqslant \varepsilon_{nm}$$

Их следствием яляется такое неравенство

$$| P^* - P(n, m) | = | P^* - P(m) + P(m) - P(n,m) | \leqslant \varepsilon_m + \varepsilon_{nm}$$

Это указывает на то, что последовательность $P(n, m)$ сходится к P^* при одновременном увеличении n и m $(2n > m)$

$$P^* = \lim P(n, m) \qquad (n \to \infty, \ m \to \infty) \tag{14}$$

Здесь сходимость немонотонная и соответствует методу, который может быть назван смешанным, по аналогии со статическим и кинематическим методами, для которых последовательности $P(n,m)$ и $P(m)$ монотонные.

Предельное решение задачи, часто называемое оптимальным планом, определяет седловую точку $L^*(P^*, \boldsymbol{\sigma}^*, \mathbf{u}^*, \lambda^*)$. Для нее имеется единственное решение $L^* = P^*$, так же как для $\mathbf{u}^*$ и λ^*, связанных законом течения. В пластических областях, где $f(\sigma^*)=0$, распределение напряжений единственное, но в жестких областях, где $f(\sigma^*)<$ <0, распределение напряжений определяется с точностью до самоуравновешенного поля σ°, удовлетворяющего на S_σ однородным условиям $\sigma_{ij}{}^\circ \nu_j = 0$. Для $\boldsymbol{\sigma}^\circ$ в жесткой области должно выполняться условие пластичности $f(\boldsymbol{\sigma}^* + \boldsymbol{\sigma}^\circ) \leqslant 0$. В этой связи построение сходящейся последовательности для напряжений можно производить как решение некорректной задачи программирования по А. Н. Тихонову [3]. Это значит, что для ограничений (10) и (11) целевой функцией, максимум которой разыскивается, будет не $P(\sigma)$, в регуляризованный функционал

$$M_\alpha (P, \boldsymbol{\sigma}^n) = P - \alpha_n \omega (\boldsymbol{\sigma}^n) \tag{15}$$

Здесь $\alpha_n > 0$ и $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, $\omega(\sigma^n)$ — стабилизирующий функционал, например определенным образом назначенная норма $\| \boldsymbol{\sigma} \|$. В рассматриваемой задаче $\| \boldsymbol{\sigma} \|$ можно определять в пространстве С. Л. Соболева $W_2{}^2$. Тогда последовательность $\boldsymbol{\sigma}^{n*}$ равномерно сходится на интервалах непрерывной дифференцируемости, если

$$M_\alpha [P (n, m), \boldsymbol{\sigma}^{n*}] = \sup (P - \alpha_n \| \boldsymbol{\sigma}^n \|^2)$$

Для несжимаемого материала норму тензора напряжений можно определять по девиатору s_{ij}

$$\| \boldsymbol{\sigma} \|^2 = \int\limits_V (s_{ij} s_{ij} + \gamma s_{ij,kl} s_{ij,kl})\, dv \qquad \left(s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{ii}}{3} \right)$$

Здесь γ — некоторая положительная функция, согласующая размерность подынтегрального выражения. На участках непрерывной дифференцируемости $\boldsymbol{\sigma}^{n*}$ и его первые производные равномерно сходятся к некоторому оптимальному $\boldsymbol{\sigma}^*$, а вторые производные сходятся в среднем. Все это имеет место с точностью до гидростатического давления.

Поступила 11 IX 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Гвоздев А. А. Определение величины разрушающей нагрузки для статистически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. Тр. конф. по пластическим деформациям. Декабрь, 1936. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1938.
2. Гольштейн Е. Г. Двойственные задачи выпуклого и дробно-выпуклого программирования в функциональных пространствах. Сб. «Исслед. по матем. программир.», М., «Наука», 1968.
3. Тихонов А. Н. Об устойчивости задач оптимизации функционалов. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 4.