

ДВЕ ЩЕЛИ В ПОЛОСЕ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

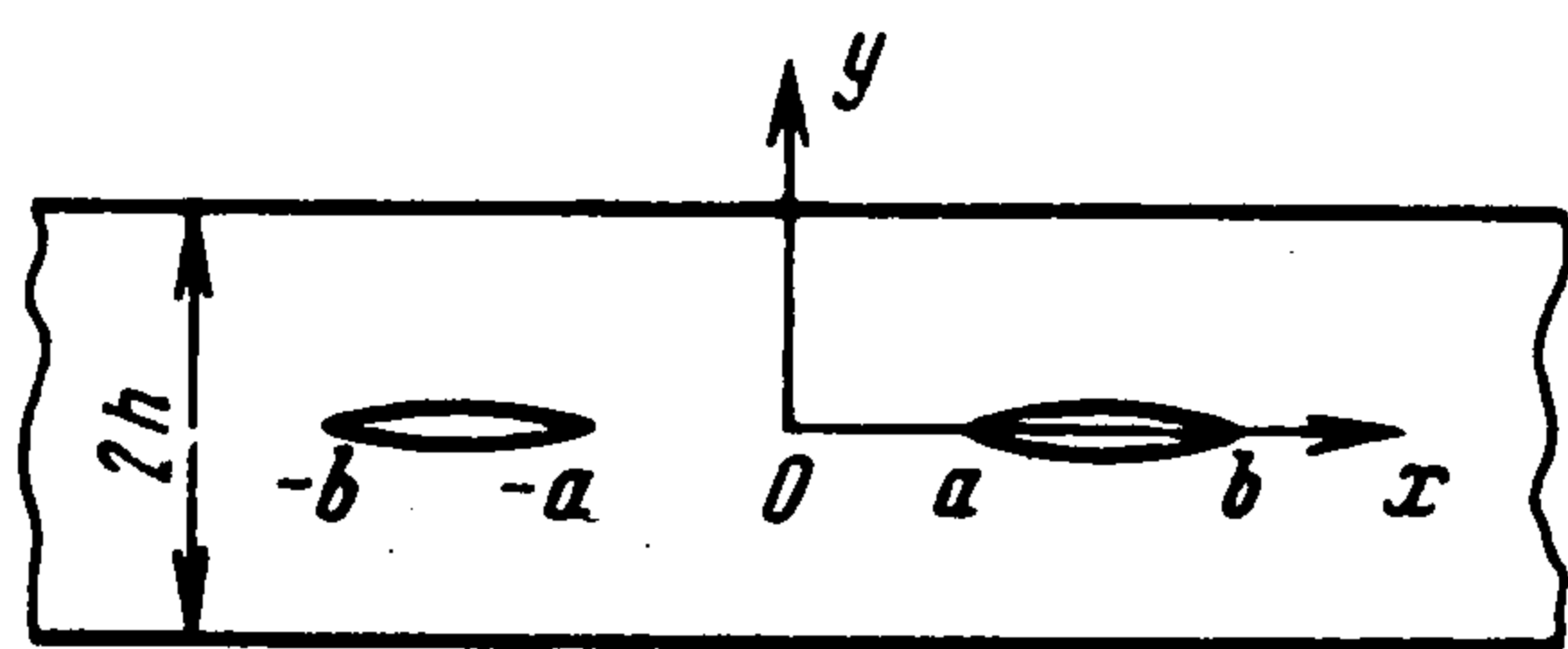
Б. И. Сметанин

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются следующие плоские смешанные задачи теории упругости: задача о растяжении полосы, ослабленной двумя продольными щелями равной длины, и задача о продольном расклинивании полосы клином конечной длины¹. Перед каждым концом клина имеются щели. Щели и клин расположены симметрично относительно граней полосы.

При решении задач используется метод, аналогичный развитому в работе [2]. Получены формулы, определяющие форму поверхности щелей и коэффициент интенсивности нормальных напряжений. Эти формулы представляют собой разложение точного решения задач в асимптотические ряды по отрицательным степеням параметра $\lambda = h/b$, характеризующего относительную толщину полосы.

1. Задача о растяжении полосы, ослабленной двумя щелями. Пусть в упругой бес-



Фиг. 1

конечной полосе толщиной $2h$ имеются две щели равной длины $b - a$ (фиг. 1). Щели расположены симметрично относительно граней полосы, поверхность щелей свободна от нагрузки. Грани полосы либо раздвинуты на заданную величину δ , либо к ним приложена равномерно распределенная растягивающая нагрузка интенсивности p . Требуется определить форму поверхности щелей $\gamma(x)$ и коэффициент

интенсивности нормальных напряжений N , возникающих вне щелей на их продолжении. Граничные условия задачи имеют вид

при $y = 0$

$$\sigma_y = 0 \quad (a \leq |x| \leq b), \quad u_y = 0 \quad (|x| \leq a, \quad b \leq |x|), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (0 \leq |x|) \quad (1.1)$$

при $y = \pm h, \quad 0 \leq |x|$

$$(1) \quad u_y = \pm \delta, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (2) \quad u_y = \pm \delta, \quad u_x = 0, \quad (3) \quad \sigma_y = p, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь знаки плюс и минус соответствуют верхней и нижней граням полосы. Рассматриваемая задача может быть сведена к вспомогательной задаче со следующими граничными условиями:

при $y = 0$

$$\sigma_y = -q \quad (a \leq |x| \leq b), \quad u_y = 0 \quad (|x| \leq a, \quad b \leq |x|), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (0 \leq |x|) \quad (1.3)$$

при $y = \pm h, \quad 0 \leq |x|$

$$(1) \quad u_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad (2) \quad u_y = 0, \quad u_x = 0, \quad (3) \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = 0 \quad (1.4)$$

Для условий на гранях полосы (1) и (2)

$$q = 2G\delta h^{-1} (1 - \nu) (1 - 2\nu)^{-1}$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона, для условия (3) $q = p$. Решение задачи с граничными условиями (1.1), (1.2) может быть получено наложением на решение вспомогательной задачи полей напряжений и деформаций, соответствующих вектору смещений с компонентами:

$$u_x = 0, \quad u_y = h^{-1}\delta y$$

для условий (1) и (2) на гранях полосы и

$$u_x = 0, \quad u_y = 0.5pG^{-1} (1 - \nu)^{-1} (1 - 2\nu) y$$

для условия (3). Функция $\gamma(x)$ и величина N одинаковы для исходной и вспомогательной задач. Очевидно, что в силу симметрии достаточно рассмотреть область $0 \leq y \leq h, -\infty < x < \infty$.

¹ Контактные задачи для полосы с двумя равными участками контакта исследовались в работе [1].

Методами операционного исчисления [3] задача с граничными условиями (1.3), (1.4) может быть приведена к определению функции $\gamma'(x)$ из следующего интегрального уравнения:

$$\left(\int_{-b}^{-a} + \int_a^b \right) \gamma'(\xi) Q\left(\frac{\xi-x}{h}\right) d\xi = -\pi h q \frac{(1-\nu)}{G} \quad (a \leq |x| \leq b) \quad (1.5)$$

$$Q(t) = \int_0^\infty L(u) \sin(ut) du \quad (1.6)$$

Функция $L(u)$ для условий (1) — (3) имеет соответственно вид

$$(1) \quad L(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u + 2u}{\operatorname{ch} 2u - 1}$$

$$(2) \quad L(u) = \frac{\kappa \operatorname{ch} 2u + 2u^2 + 0.5(1 + \kappa^2)}{\kappa \operatorname{sh} 2u - 2u} \quad (\kappa = 3 - 4\nu)$$

$$(3) \quad L(u) = 2 \frac{\operatorname{sh}^2 u - u^2}{\operatorname{sh} 2u + 2u}, \quad L(u) \rightarrow 1 + O(e^{-2u}) \quad \text{при } u \rightarrow \infty$$

Представим ядро $Q(t)$ интегрального уравнения (1.5) в виде

$$Q(t) = \frac{1}{t} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{2i+1} \quad (1.7)$$

Постоянные c_i определяются соотношением

$$c_i = \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} \int_0^\infty [L(u) - 1] u^{2i+1} du \quad (i = 0, 1, \dots) \quad (1.8)$$

Для условий (1), (2) и (3) эти постоянные имеют следующие значения:

$$(1) \quad c_i = \frac{2i+3}{(2i+2)!} \pi^{2i+2} B_{2i+2} \quad (i = 0, 1, \dots)$$

$$(2) \quad (\nu = 0.3) \quad c_0 = 3.48, \quad c_1 = -1.25, \quad c_2 = 0.518$$

$$(3) \quad c_0 = -2.35, \quad c_1 = 1.69, \quad c_2 = -0.844$$

Здесь B_{2m} — числа Бернулли [4].

Внося (1.7) в (1.5) и учитывая, что $\gamma'(-x) = -\gamma'(x)$, получим после простых преобразований

$$\int_a^b \frac{\xi \gamma'(\xi) d\xi}{\xi^2 - x^2} = -\frac{\pi q (1-\nu)}{2G} - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i}{h^{2i+2}} \int_a^b \gamma'(\xi) [(\xi+x)^{2i+1} + (\xi-x)^{2i+1}] d\xi \quad (1.9)$$

Применив к уравнению (1.9) формулу обращения [5], получим интегральное уравнение второго рода относительно функции $\gamma'(x)$

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \frac{2}{\pi R(x)} \left\{ P_1 + \frac{q\pi(1-\nu)}{4G} (a^2 + b^2 - 2x^2) + \right. \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i b^{-2i-2}}{\lambda^{2i+2}} \int_a^b \frac{t R(t) dt}{t^2 - x^2} \int_a^b \gamma'(\xi) [(\xi+t)^{2i+1} + (\xi-t)^{2i+1}] d\xi \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$R(x) = \sqrt{(x^2 - a^2)(b^2 - x^2)}$$

Здесь P_1 — постоянная, подлежащая определению. Разыскивая решение уравнения (1.10) в виде ряда по степеням λ^{-2} , найдем

$$\gamma'(x) = (1-\nu) G^{-1} R^{-1}(x) [P_1 \Phi_1(x) + \Phi_2(x)] \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.11)$$

$$\Phi_1(x) = G\pi^{-1} (1-\nu)^{-1} \left\{ 2 + (1 + \varepsilon^2 - 2x^2/b^2) c_0 \lambda^{-2} + [1/4 (5 - 2\varepsilon^2 + 5\varepsilon^4) + \right. \\ \left. + 2(1 + \varepsilon^2) x^2/b^2 - 6x^4/b^4] c_1 \lambda^{-4} + O(\lambda^{-6}) \right.$$

$$\left. \Phi_2(x) = 1/2 q b^2 \beta (1 + \varepsilon^2 - 2x^2/b^2) + O(\lambda^{-6}) \right. \quad (1.12)$$

$$\varepsilon = a/b, \quad \beta = 1 - 1/8 c_1 k^4 \lambda^{-4}, \quad k = \sqrt{1 - \varepsilon^2}$$

Проинтегрировав (1.10) по x с учетом $\gamma(a) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= P_1 (\pi b)^{-1} \Omega(x) + 1/2 q b \beta G^{-1}(1-\nu) \chi(x) + O(\lambda^{-6}) \quad (a \leq x \leq b) \quad (1.13) \\ \Omega(x) &= 2F(\omega, k) + \chi(x) c_0 \lambda^{-2} + [(1 + \varepsilon^2) \chi(x) + 1/4 k^4 F(\omega, k) + 2xb^{-3}R(x)] c_1 \lambda^{-4} \\ \chi(x) &= (1 + \varepsilon_2) F(\omega, k) - 2E(\omega, k) + 2(bx)^{-1} R(x), \quad \omega = \arcsin(k^{-1} \sqrt{1 - (a/x)^2} \end{aligned}$$

Здесь $F(\omega, k)$ и $E(\omega, k)$ — эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Постоянную P_1 определим из условия

$$\gamma(b) = 0 \quad (1.14)$$

Внося $\gamma(x)$ в форме (1.13) в (1.14), получим

$$P_1 = -1/2 q \pi b^2 \beta (1 - \nu) G^{-1} \chi(b) \Omega^{-1}(b) \quad (1.15)$$

Коэффициент интенсивности нормальных напряжений N для точек $x = a$ и $x = b$ определяется соответственно следующими соотношениями:

$$N_a = \lim_{x \rightarrow a-0} \sqrt{a-x} \sigma_y(x, 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} \sqrt{x-a} \frac{G}{1-\nu} \gamma'(x) \quad (1.16)$$

$$N_b = \lim_{x \rightarrow b+0} \sqrt{x-b} \sigma_y(x, 0) = - \lim_{x \rightarrow b-0} \sqrt{b-x} \frac{G}{1-\nu} \gamma'(x)$$

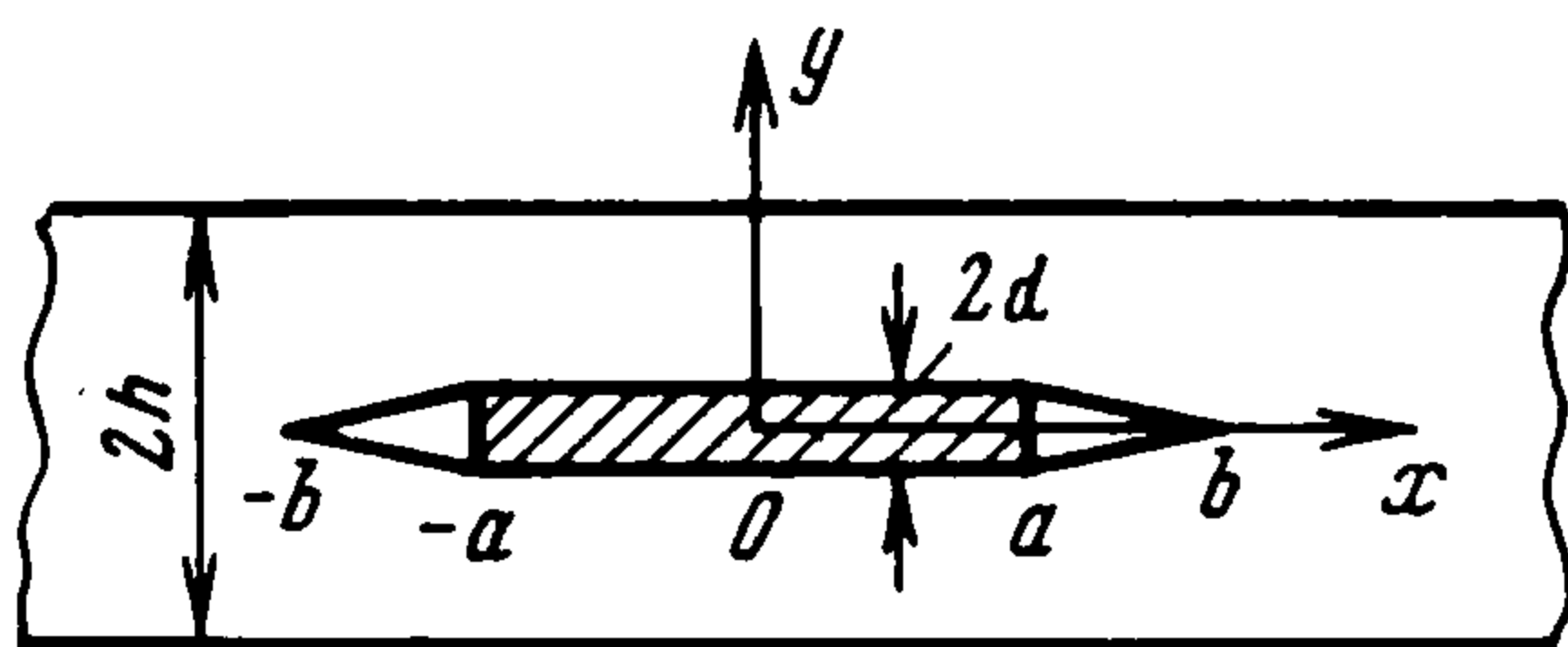
Подставив $\gamma'(x)$ в форме (1.11) в правые части соотношений (1.16), получим

$$N_a = \frac{P_1 \Phi_1(a) + \Phi_2(a)}{bk \sqrt{2a}}, \quad N_b = - \frac{P_1 \Phi_1(b) + \Phi_2(b)}{bk \sqrt{2b}} \quad (1.17)$$

Используя свойства функции $L(u)$, можно показать, что ряд (1.7) абсолютно сходится при $t < 2$. Следовательно, полученные результаты (1.13), (1.17) справедливы при $1 < \lambda < \infty$. Практически найденные соотношения рационально использовать при $2 \leq \lambda < \infty$. В случае $\lambda \rightarrow \infty$ из (1.12) и (1.15) имеем

$$\begin{aligned} P_1 \Phi_1(a) + \Phi_2(a) &= qb^2 [E(k)/K(k) - \varepsilon^2], \\ P_1 \Phi_1(b) + \Phi_2(b) &= -qb^2 [1 - E(k)/K(k)] \quad (1.18) \end{aligned}$$

Здесь $K(k)$ и $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Из (1.17) и (1.18) следует, что величины N_a и N_b при $\lambda \rightarrow \infty$ совпадают с



Фиг. 2

соответствующими величинами, найденными при решении задачи о двух щелях в плоскости [6]. Функция $\gamma(x)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ совпадает с аналогичной функцией, полученной в [7] при исследовании задачи о щели в полуплоскости, на границе которой осуществляется скользящая заделка. Рассмотренный в [7] случай соответствует также задаче о двух щелях равной длины в плоскости, расположенных на одной прямой.

2. Задача о расклинивании полосы. Пусть упругая бесконечная полоса толщиной $2h$ расклинивается тонким жестким гладким клином длиной $2a$. Клином расположен симметрично относительно граней полосы, толщина клина равна $2d$. Перед каждым концом клина имеются щели длиной $b - a$ (фиг. 2). Грани полосы раздвинуты или сдвинуты на заданную величину δ , либо к ним приложена равномерно распределенная растягивающая или сжимающая нагрузка интенсивности p . Требуется определить форму поверхности щелей $\gamma(x)$ и коэффициент интенсивности нормальных напряжений N в точках $y = 0, x = \pm(b + 0)$. Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad u_y &= \pm d \quad (|x| \leq a), \quad u_y = 0 \quad (b \leq |x|) \\ \sigma_y &= 0 \quad (a \leq |x| \leq b), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (0 \leq |x|) \end{aligned}$$

На гранях полосы при $y = \pm h, 0 \leq |x|$ выполняется одно из трех условий (1.2).

Методом наложения эта задача может быть приведена к вспомогательной задаче с граничными условиями:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \quad u_y &= \pm d \quad (|x| \leq a), \quad u_y = 0 \quad (b \leq |x|) \\ \sigma_y &= -q \quad (a \leq |x| \leq b), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (0 \leq |x|) \end{aligned} \quad (2.1)$$

при $y = \pm h$ выполняется одно из трех условий (1.4). В (2.1) по-прежнему $q = 2G\delta h^{-1} \times (1 - \nu)(1 - 2\nu)^{-1}$ для условий (1) и (2) и $q = p$ для условия (3).

Методами операционного исчисления задача с граничными условиями (2.1), (1.4) может быть приведена к определению функции $\gamma'(x)$ из интегрального уравнения, совпадающего по форме с (1.5). Следовательно, выражение, определяющее функцию $\gamma'(x)$ для рассматриваемой в настоящем параграфе задачи, должно иметь вид:

$$\gamma'(x) = (1 - \nu)G^{-1}R^{-1}(x) [P_2\Phi_1(x) + \Phi_2(x)] \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.2)$$

где $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ даются соотношениями (1.12), P_2 — постоянная, подлежащая определению. Однако в отличие от задачи, рассмотренной в п. 1, в данной задаче функция $\gamma(x)$ должна удовлетворять условиям

$$\gamma(a) = d, \quad \gamma(b) = 0 \quad (2.3)$$

Поэтому функцию $\gamma(x)$ будем определять из соотношения

$$\gamma(x) = d + \int_a^x \gamma'(\xi) d\xi \quad (a \leq x \leq b) \quad (2.4)$$

где $\gamma'(\xi)$ имеет вид (2.2). Произведя необходимые вычисления по формуле (2.4), получим

$$\gamma(x) = d + P_2(\pi b)^{-1}\Omega(x) + 1/2qb\beta G^{-1}(1 - \nu)\chi(x) + O(\lambda^{-6}) \quad (2.5)$$

Постоянную P_2 определим из (2.5) и второго соотношения (2.3)

$$P_2 = -\pi b\Omega^{-1}(b) [d + 1/2qb\beta G^{-1}(1 - \nu)\chi(b)] + O(\lambda^{-6}) \quad (2.6)$$

Внося $\gamma'(x)$ в форме (2.2) во второе соотношение (1.16), найдем значение коэффициента интенсивности нормальных напряжений в точках $x = \pm(b + 0)$

$$N_b = -(bk\sqrt{2b})^{-1} [P_2\Phi_1(b) + \Phi_2(b)] \quad (2.7)$$

Полученное решение (2.5)–(2.7) рационально использовать при $2 \leq \lambda < \infty$. При $\lambda \rightarrow \infty$ и условии (3) из (1.12) и (2.6) найдем

$$P_2\Phi_1(b) + \Phi_2(b) = -\frac{bdG}{(1 - \nu)K(k)} - pb^2 \left[1 - \frac{E(k)}{K(k)} \right] \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что при $\lambda \rightarrow \infty$ найденное значение величины N_b совпадает со значением этой величины, полученным при исследовании задачи о расклинивании упругой плоскости клином конечной длины [8]. Можно убедиться также, что при $\lambda \rightarrow \infty$ выражение (2.4) с учетом (2.2), определяющее функцию $\gamma(x)$, совпадает с аналогичным выражением, полученным в [8].

Поступила 20 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров В. М., Кучеров В. А. Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
2. Александров В. М., Ворович И. И. О действии штампа на упругий слой конечной толщины. ПММ, 1960, т. 24, вып. 2.
3. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости, Л., «Наука», 1967.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
5. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. М., Гостехиздат, 1949.
6. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев, «Научкова думка», 1968.
7. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое. Инж. ж. МТТ, 1968, № 2.
8. Маркузон И. А. О расклинивании хрупкого тела клином конечной длины. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.