ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ КОНСТРУИРОВАНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В. С. Проценко, В. Л. Рвачев

(Харьков)

В работе на примере осесимметричной задачи приводится ряд общих соображений относительно конструирования приближенного решения пространственных смешанных задач теории упругости.

Предложена структура решения, которая позволяет точно удовлетворять смешанным граничным условиям определенного типа и, кроме того, содержит в себе ряд произвольных функций, выбором которых можно распорядиться, так, чтобы удовлетворить наилучшим (в том или ином смысле) образом системе дифференциальных уравнений равновесия упругого тела.

Исследования основаны на использовании R-функций [1], что дает возможность рассматривать практически любые реальные трехмерные тела. Вопрос обоснования метода не затрагивается.

§ 1. Рассмотрим систему функций $H\{\varphi_i(x_1,x_2)\}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, принадлежащих классу $C^{(k)}$. Назовем систему H-системой базисных функций. Этой системой в дальнейшем будем пользоваться при построении координатных последовательностей. Как и в работе [2], функции, которые могут быть построены при помощи этой базисной системы, будем называть H-реализуемыми. Множество H-реализуемых функций обозначим символом $M(H)$.

Всякой функции $f(x_1, x_2) \in M(H)$ можно поставить в соответствие на плоскости x_1x_2 некоторый чертеж L, который определим уравнением $f(x_1, x_2) = 0$. (Чертеж может оказаться и пустым множеством.) Чертеж L назовем H-реализуемым чертежом, а множество H-реализуемых чертежей обозначим $N(H)$.

Множество областей на плоскости x_1x_2, определяемых неравенством вида

$$f(x_1, x_2) \geqslant 0, \qquad f(x_1, x_2) \in M(H) \tag{1.1}$$

будем называть множеством H-реализуемых областей и обозначим символом $G(H)$.

Очевидно, что множества $M(H)$, $N(H)$, $G(H)$ вполне определяются заданием базисной системы функций $H\{\varphi_i(x_1,x_2)\}$ $(i = 1,2,\ldots, n)$.

В работах [1,2] введено понятие алгоритмической полноты системы H базисных функций и показано, что если система является алгоритмически полной, то при помощи ее можно написать уравнение любого чертежа.

Если в качестве системы H взять функции

$$\begin{gathered}\varphi_1(x_1,x_2) = x_1 + x_2, \quad \varphi_2(x_1,x_2) = x_1x_2 \\ \varphi_3(x_1, x_2) = {}^1/_2\,(x_1 + x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1x_2})\,(x_1^2 + x_2^2)^{1/2k} \\ \varphi_4(x_1, x_2) = {}^1/_2\,(x_1 + x_2 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2\alpha x_1x_2})\,(x_1^2 + x_2^2)^{1/2k} \\ -1 < \alpha < 1; \quad \varphi_5(x_1,x_2) = \bar{x}_1 = -x_1, \quad \varphi_6(x_1x_2) \\ \varphi_7(x_1,x_2),\ldots, \varphi_n(x_1,x_2), \qquad \varphi_i(x_1, x_2) \in C^{(k)}\ (i = 6,7,\ldots, n)\end{gathered} \tag{1.2}$$

то система оказывается алгоритмически полной в классе $C^{(k)}$. Это дает возможность построить функцию $\omega(x_1,x_2) \in M(H)$, обращающуюся в нуль в точках (и только в них) любого наперед заданного чертежа $L \in N(H)$. Многочисленные примеры построения функции $\omega(x_1,x_2)$ для замкнутых и разомкнутых линий приведены в работах [1-5].

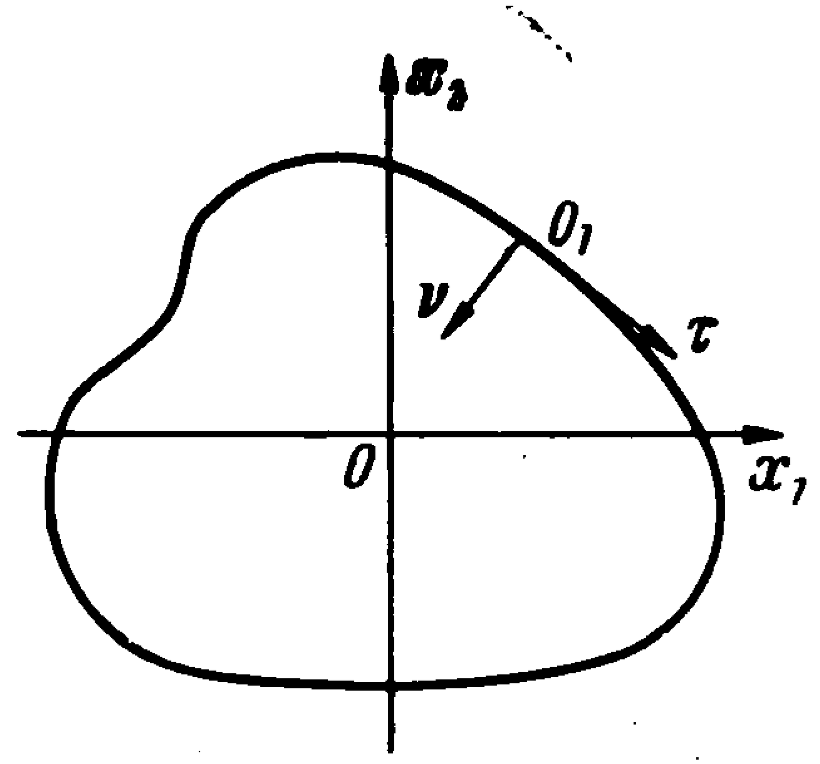
В работе [5] указан общий алгоритм построения функции $\omega \in M(H)$, удовлетворяющей условиям

$$\omega(x_1, x_2) = 0, \qquad d\omega/d\nu = 1, \quad (x_1, x_2) \in L \tag{1.3}$$

$$\omega(x_1, x_2) > 0, \text{ когда } (x_1, x_2) \in (S) \tag{1.4}$$

где ν — направление внутренней нормали к кривой L. (Заметим, что второе из условий (1.3) имеет смысл для точек, не являющихся угловыми.) Под (S) будем подразумевать H-реализуемую область, ограниченную H-реализуемой замкнутой кривой. В случае, если кривая L разомкнута, то под (S) будем понимать часть плоскости, лежащую справа либо слева от кривой. Иногда удобно чертеж L рассматривать как совокупность чертежей $L_i(i = 1,2,\ldots, p)$. В этом случае функцию $\omega(x_1, x_2) = 0$ только на L_i будем снабжать индексом i.

На линии L выберем систему координат (ν, O_1, τ) так, чтобы для наблюдателя, смотрящего вдоль направления $O_1\nu$, ось $O_1\tau$ была направлена влево (фиг. 1).



Фиг. 1

Введем в рассмотрение операторы дифференцирования

$$D_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (1.5)$$

$$T_1 = \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} \qquad (1.6)$$

Нетрудно установить, что они обладают свойствами

$$D_1(u)_{|L} = \partial u/\partial\nu, \qquad D_1(\omega)_{|L} = 1 \qquad (1.7)$$

$$T_1(u)_{|L} = du/d\tau, \quad T_1(\omega) \equiv 0 \qquad (1.8)$$

Действительно, в силу второго условия (1.3) имеем

$$\frac{d\omega}{dx_1}_{|L} = [\,|\operatorname{grad}\omega|\cos(\nu, x_1)]_L = \frac{\partial\omega}{\partial\nu}\cos(\nu, x_1) = \cos(\nu, x_1) \qquad (1.9)$$

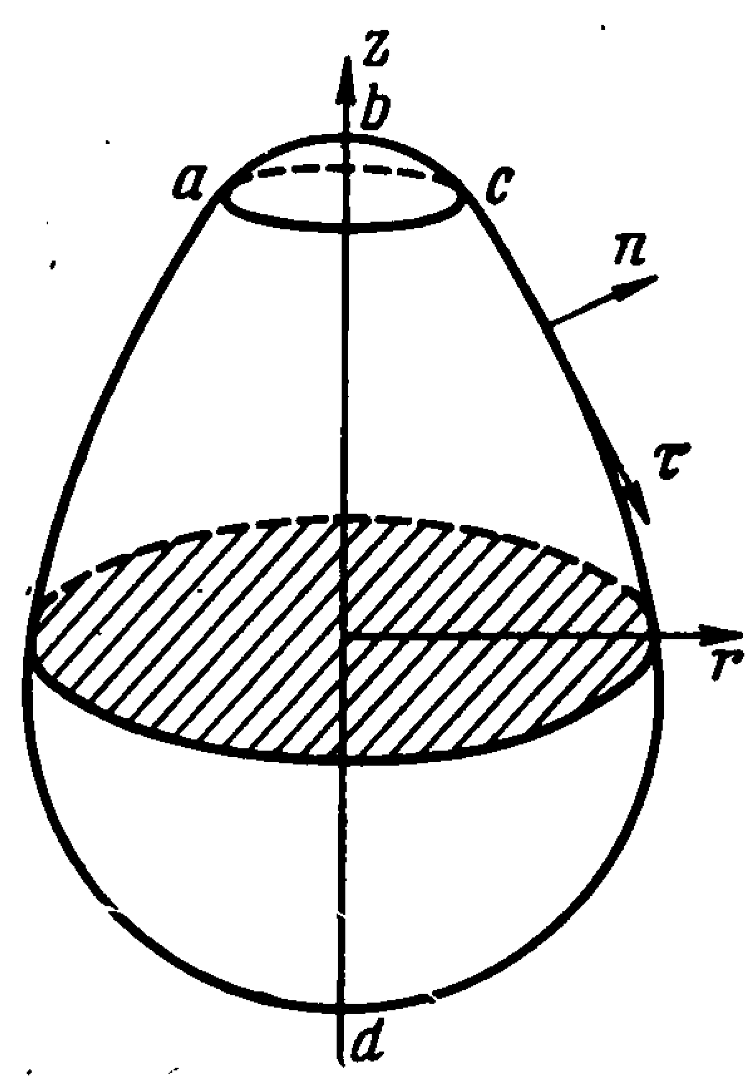
($|\operatorname{grad}\omega|$ на L равен $d\omega/d\nu$, так как $\omega = 0$ есть одна из линий уровня функции $\omega(x_1, x_2)$). Аналогично находим, что

$$\frac{\partial\omega}{\partial x_2}_{|L} = \cos(\nu, x_2) \qquad (1.10)$$

Следовательно

$$D_1(u)\,|_L = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\nu, x_1) + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\nu, x_2) = \frac{\partial u}{\partial\nu}$$

$$T_1(u)\,|_L = \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos(\nu, x_1) - \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos(\nu, x_2) = \frac{\partial u}{\partial\tau}$$



Фиг. 2

Вторые равенства в формулах (1.7), (1.8) очевидны. Операторы D_1 и T_1 линейны

$$D_1(u + v) = D_1(u) + D_1(v), \quad T_1(u + v) = T_1(u) + T_1(v)$$

и, как нетрудно проверить, для них справедливы формулы дифференцирования произведения

$$D_1(uv) = D_1(u)v + uD_1(v), \quad T_1(uv) = T_1(u)\,v + uT_1(v)$$

Введенными операторами будем часто пользоваться.

§ 2. В цилиндрической системе координат (r, φ, z) рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для тела, полученного от вращения H — реализуемой кривой L вокруг оси oz (фиг. 2), при условиях

$$u_z(r,z) = u^\circ(r, z) \quad \text{на} \quad (S_1) \qquad (2.1)$$

$$\sigma_n(r,z) = \sigma_n^\circ(r,z) \quad \text{на} \quad (S_2) \qquad (2.2)$$

$$\tau_n(r,z) = \tau_n^\circ(r, z) \quad \text{на} \quad (S) \qquad (2.3)$$

где u_z — перемещение вдоль оси z, τ_n и σ_n — касательное и нормальное напряжения.

Положим $u_1 = u_r$ и $u_2 = u_z$, кроме того, пусть (S) — поверхность, ограничивающая тело вращения (V), а (S_1) и (S_2) — части $(aвc)$ и (cda) этой поверхности, $\mathbf{n}$ — направление внешней нормали. Относительно заданных функций u°, $\sigma_n{}^\circ$, $\tau_n{}^\circ$ предположим, что первая из них непрерывная, а две другие кусочно-непрерывные. Граничные условия такого типа имеют место, например, в контактных задачах [6].

Задача будет состоять в том, чтобы найти такую структуру функций u_1 и u_2, которая удовлетворяла бы граничным условиям (2.1), (2,3) и, кроме того, обладала бы определенной степенью свободы, с тем чтобы в рамках этой структуры решения можно было сколь угодно близко приблизиться к функциям из класса функций, удовлетворяющих смешанным граничным условиям (2.1), (2.3).

Граничные условия (2.2), (2.3) запишем в развернутом виде (2.4)

$$(\lambda + 2\mu)\left[\frac{\partial u_1}{\partial n}\cos(n, r) + \frac{\partial u_2}{\partial n}\cos(n, z)\right] + \lambda\left[\frac{\partial u_2}{\partial \tau}\cos(n,r) - \frac{\partial u_1}{\partial \tau}\cos(n, z) + \frac{u_1}{r}\right] = \\ = \sigma_n{}^\circ(r, z) \text{ на } (S_2)$$

$$\mu\left[\frac{\partial u_1}{\partial n}\cos(n, z) - \frac{\partial u_2}{\partial n}\cos(n, r) + \frac{\partial u_1}{\partial \tau}\cos(n, r) + \frac{\partial u_2}{\partial \tau}\cos(n, z)\right] = \tau_n{}^\circ(r, z) \text{ на } (S) \quad (2.5)$$

Выписанные условия (2.4), (2.5) продолжим непрерывным образом внутрь области (V) при помощи операторов (1.5), (1.6) и равенств (1.9), (1.10)

$$(\lambda + 2\mu)\left[D_{11}(u_1)\frac{\partial \omega}{\partial r} + D_{11}(u_2)\frac{\partial \omega}{\partial z}\right] + \lambda\left[T_1(u_2)\frac{\partial \omega}{\partial r} - T_1(u_1)\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{u_1}{r}\right] = \\ = F_1(r, z) + \omega_2\varphi_{10}(r,z) \quad (2.6)$$

$$\mu\left[D_1(u_1)\frac{\partial \omega}{\partial z} - D_1(u_2)\frac{\partial \omega}{\partial r} - T_1(u_1)\frac{\partial \omega}{\partial r} - T_1(u_2)\frac{\partial \omega}{\partial z}\right] = F_2(r, z) + \omega\varphi_{20}(r, z) \quad (2.7)$$

Здесь

$$D_{11} = \left(1 + \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\right)D_1 = \begin{cases} 2D_1 \text{ на } (S_1) \\ D_1 \text{ на } (S_2)\end{cases} \quad (2.8)$$

$$\omega(r, z) = 0, \quad \partial\omega / \partial\nu = 1, \quad \text{когда} \quad (r, z) \in (S)$$

$$\omega_i(r, z) = 0, \quad \partial\omega_i/\partial\nu = 1, \quad \text{когда} \quad (r, z) \in (S_i) \quad (i = 1,2)$$

Функции ω и ω_i — строго положительны в области (V), φ_{10}, φ_{20} — совершенно произвольные пока функции, а F_1, F_2 — функции, осуществляющие непрерывное продолжение функций $\sigma_n{}^\circ$ и $\tau_n{}^\circ$ внутрь области (V) и, следовательно, обладают свойствами

$$F_1 = \sigma_n{}^\circ \text{ на } (S_2), \quad F_2 = \tau_n{}^\circ \text{ на } (S) \quad (2.9)$$

Соотношения (2.6), (2.7) в отличие от (2.4), (2.5) имеют смысл везде внутри области (V), а на границе области они в силу соотношений (1.7), (1.10) и (2.9) переходят в граничные условия (2.4), (2.5).

§ 3. Решение задачи ищем в виде

$$u_1 = \psi_{11} + \omega\psi_{12}, \qquad u_2 = \psi_{21} + \omega\psi_{22} \quad (3.1)$$

где ψ_{ij} — некоторые функции, относительно которых предположим, что они не менее чем дважды непрерывно дифференцируемы в области (V).

Чтобы удовлетворить первому из граничных условий задачи, достаточно положить

$$\psi_{21} = f(r,z) + \omega_1\psi_{23}$$

где $f(r, z)$ — нужное число раз непрерывно дифференцируемая в области (V) функция, удовлетворяющая условию

$$f(r, z) = u^\circ(r,z), \qquad \text{когда} \ (r,z) \in (S_1)$$

Подставляя функции (3.1) в соотношения (2.6), (2.7) с учетом свойств операторов D_1 и T_1, найдем

$$(\lambda+2\mu)\left\{[D_{11}(\psi_{12})\,\omega+D_{11}(\omega)\,\psi_{12}]\frac{\partial\omega}{\partial r}+[D_{11}(\omega)\,\psi_{22}+\omega D_{11}(\psi_{22})]\frac{\partial\omega}{\partial z}\right\}+$$
$$+\lambda\left\{[T_1(\omega)\,\psi_{22}+\omega T_1(\psi_{22})]\frac{\partial\omega}{\partial r}-[T_1(\omega)\,\psi_{12}+\omega T_1(\psi_{12})]\frac{\partial\omega}{\partial z}+\frac{\lambda}{r}\,\omega\psi_{12}\right\}=$$
$$=\Phi_1+\omega_2\varphi_{10} \tag{3.2}$$

$$\mu\left\{[D_1(\omega)\,\psi_{12}+\omega D_1(\psi_{12})]\frac{\partial\omega}{\partial z}-[D_1(\omega)\,\psi_{22}+\omega D_1(\psi_{22})]\frac{\partial\omega}{\partial r}-\right.$$
$$\left.-[T_1(\omega)\,\psi_{12}+\omega T_1(\psi_{12})]\frac{\partial\omega}{\partial r}-[T_1(\omega)\,\psi_{22}+\omega T_1(\psi_{22})]\frac{\partial\omega}{\partial z}\right\}=\Phi_2+\omega\varphi_{20} \tag{3.3}$$

где

$$\Phi_1=F_1-(\lambda+2\mu)\left[D_{11}(\psi_{11})\frac{\partial\omega}{\partial r}+D_{11}(\psi_{21})\frac{\partial\omega}{\partial z}\right]-$$
$$-\lambda\left[T_1(\psi_{21})\frac{\partial\omega}{\partial r}-T_1(\psi_{11})\frac{\partial\omega}{\partial z}+\frac{\lambda}{r}\psi_{11}\right] \tag{3.4}$$

$$\Phi_2=F_2-\mu\left[D_1(\psi_{11})\frac{\partial\omega}{\partial z}-D_1(\psi_{21})\frac{\partial\omega}{\partial r}-T_1(\psi_{11})\frac{\partial\omega}{\partial r}-T_1(\psi_{21})\frac{\partial\omega}{\partial z}\right] \tag{3.5}$$

Так как

$$\left.\frac{\partial\omega_i}{\partial\nu}\right|_{S_i}=1$$

то в области (V) имеет место формула

$$D_{11}(\omega)=1+\omega\chi_0=1+\omega_2\chi_1 \tag{3.6}$$

где χ_0, χ_1 — известные функции.

Если воспользоваться формулой (2.6) и произволом функций φ_{10}, φ_{20}, то соотношения (3.2), (3.3) можно записать в виде системы уравнений для функций ψ_{12}, ψ_{22}

$$(\lambda+2\mu)\left(\psi_{12}\frac{\partial\omega}{\partial r}+\psi_{22}\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)=\Phi_1+\omega_2\varphi_{11}$$
$$\mu\left(\psi_{12}\frac{\partial\omega}{\partial z}-\psi_{22}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)=\Phi_2+\omega\varphi_{21} \tag{3.7}$$

где φ_{11}, φ_{21} — новые произвольные функции, полученные в результате объединения членов с множителями ω и ω_2.

Определитель этой системы

$$\Delta=\mu(\lambda+2\mu)\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\right]=\mu(\lambda+2\mu)\,|\operatorname{grad}\omega|^2$$

есть функция от (r, z), которая в области (V) отлична от нуля везде, за исключением точек экстремума и седловых точек функции ω.

Формальное решение этой системы имеет вид

$$\psi_{12}=\frac{1}{\Delta}\left[(\lambda+2\mu)(\Phi_2+\omega\varphi_{21})\frac{\partial\omega}{\partial z}+\mu(\Phi_1+\omega_2\varphi_{11})\frac{\partial\omega}{\partial r}\right] \tag{3.8}$$

$$\varphi_{22}=\frac{1}{\Delta}\left[\mu(\Phi_1+\omega_2\varphi_{11})\frac{\partial\omega}{\partial z}-(\lambda+2\mu)(\Phi_2+\omega\varphi_{21})\frac{\partial\omega}{\partial r}\right] \tag{3.9}$$

Легко убедиться в том, что формально полученное решение (3.8), (3.9) справедливо и в тех точках, в которых $\Delta=0$. Действительно, так как точки, в которых $\Delta=0$ лежат внутри области (V) и в них ω и ω_2 отличны от нуля, то достаточно произвольные функции φ_{11} и φ_{21} выбрать в виде

$$\varphi_{11}=\frac{1}{\omega_2(r_0,z_0)}\left[-\Phi_1+\Delta\left(\Phi_1+\omega_2\varphi_{31}\right)\right] \tag{3.10}$$

$$\varphi_{21}=\frac{1}{\omega(r_0,z_0)}\left[-\Phi_2+\Delta\left(\Phi_2+\omega\varphi_{32}\right)\right]$$

где φ_{31}, φ_{32} — новые произвольные функции, $A(r_0,z_0)$ — точка, в которой $\Delta=0$.

Заметим, что при таком выборе функций φ_{11}, φ_{21} формальное решение системы (3.7) сохраняет свою форму и в тех точках, в которых $\Delta=0$. Если таких точек n, то произвольные функции φ_{11} и φ_{21} придется подчинить n условиям типа (3.10), но форма решения остается все равно прежней. Однако на практике этого делать не придется. Дело в том, что решение (3.8), (3.9) можно существенно упростить, если принять во внимание, что

$$\Delta=\mu(\lambda+2\mu)+\omega\chi_2 \quad \text{или} \quad \frac{1}{\Delta}=\frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}+\omega\chi_3,$$

где χ_2, χ_3 — известные функции.

Перегруппировав члены, содержащие ω и ω_2 в (3.8), (3.9), найдем

$$\psi_{12}=\frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+2\mu)\,\Phi_2\frac{\partial\omega}{\partial z}+\mu\Phi_1\frac{\partial\omega}{\partial r}\right]+\omega_2\varphi_{33} \tag{3.11}$$

$$\psi_{22}=\frac{1}{\mu(\lambda+2\mu)}\left[\mu\Phi_1\frac{\partial\omega}{\partial z}-(\lambda+2\mu)\,\Phi_2\frac{\partial\omega}{\partial r}\right]+\omega_2\varphi_{34} \tag{3.12}$$

где φ_{33}, φ_{34} — по-прежнему произвольные функции.

Решение системы (3.7), записанное в форме (3.11), (3.12), уже не содержит функции Δ в знаменателе (она исключена соответствующим подбором произвольных функций, входивших в первоначальную форму решения) и имеет смысл везде в области (V).

Функции u_1, u_2 зависят от двух основных ψ_{11} и ψ_{23} и двух вспомогательных φ_{33}, φ_{34} произвольных функций. При этом все граничные условия задачи будут удовлетворены. Произволом функций ψ_{ij} распорядимся при удовлетворении системе уравнений Ламе.

Если функции ψ_{ij}, входящие в структуру функций u_1 и u_2, разложить в ряд по некоторой полной ортонормированной системе функций и удержать конечное число членов разложений, то получим две последовательности функций $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, которые удовлетворяют всем условиям смешанной задачи.

Оставляя на некоторое время в стороне важные вопросы, касающиеся доказательства полноты последовательностей $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, укажем только на то, что предложенная структура решения обладает некоторыми свойствами полных систем.

Для этого выпишем формулу распределения нормального напряжения на участке (S_1)

$$\sigma_n\,|_{S_1}=F_1-(\lambda+2\mu)\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\frac{\partial\psi_{11}}{\partial r}+\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_{11}}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\psi_{23}\right]+\omega_2\varphi_{35} \tag{3.13}$$

где φ_{35} — некоторая функция.

В последней формуле функции ψ_{11} и ψ_{23} представим в виде

$$\psi_{11}=\psi_{13}+\omega\frac{\partial\omega}{\partial r}\,\psi_{14}, \qquad \psi_{23}=\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\psi_{14}+\psi_{15}$$

где ψ_{ij} — некоторые новые функции. Элементарные преобразования приводят к соотношению

$$\sigma_n\,|_{S_1}-F_1-\omega_2\psi_{35}+(\lambda+2\mu)\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)^2\frac{\partial\psi_{13}}{\partial r}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial\omega}{\partial z}\left(\frac{\partial\psi_{13}}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial z}\right)^2\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\psi_{15}\right]=-(\lambda+2\mu)\,\psi_{14} \tag{3.14}$$

Из последней формулы ясно, что произвола функции ψ_{14} и, следовательно, функций ψ_{11}, ψ_{23} вполне достаточно, чтобы обеспечить необходимые значения нормального напряжения σ_n на участке (S_1).

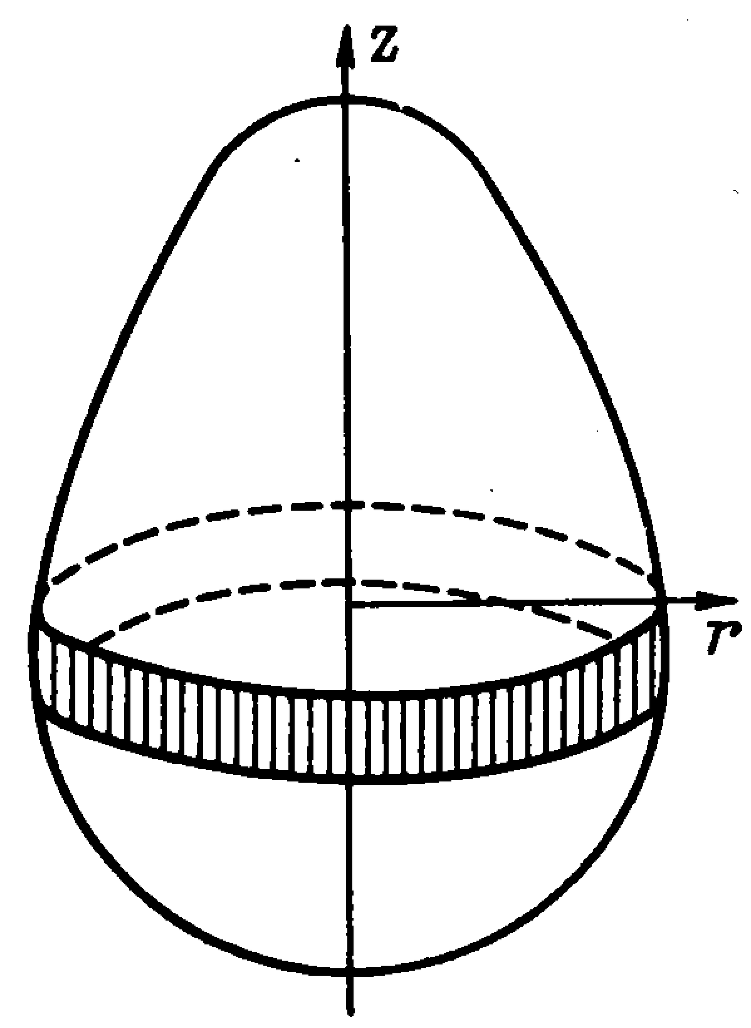
Замечание. Осевая симметрия задачи сохраняется, если условие (2.1) заменить условием

$$u_1(r,z) = u^\circ(r,z) \quad \text{на} \quad (S_1) \qquad (3.15)$$

где (S_1) — участок поверхности (S), заштрихованный на фиг. 3. Все приведенное выше для этого случая сохраняет силу, только функцию f следует положить тождественно равной нулю, а функцию ψ_{11} выбрать в виде

$$\psi_{11} = f_1(r,z) + \omega_1\psi_{13}^* \qquad (3.16)$$

где $f_1(r,z) = u^\circ(r,z)$, когда $(r,z) \in (S_1)$.



Фиг. 3

Следует отметить также, что поскольку продолжение функции $u^\circ(r, z)$ внутрь области (V) можно осуществить многими способами, то этим произволом нужно как-то разумно распорядиться. Можно, например, продолжение осуществить таким способом, чтобы при этом производные функции $f(r, z)$ имели те же особенности, что и искомое решение в угловых точках или в точках раздела граничных условий, и, таким образом, привнести в приближенное решение некоторые существенные черты точного решения. Это, очевидно, уменьшит «нагрузку» на функции ψ_{ij}.

Иногда в качестве функции $f(r, z)$ можно брать точное решение задачи, близкой к исследуемой. Например, в задаче для цилиндра конечной высоты, который сдавливается по торцам жесткими штампами, в качестве функции $f(r,z)$ можно взять решение задачи для слоя, который сдавливается двумя такими же штампами [7].

Во второй части работы будут приведены примеры решения некоторых конкретных задач с расчетами, выполненными на ЭЦВМ.

Поступила 11 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В. Л. Геометрические приложения алгебры логики. Киев, «Техніка», 1967.
2. Рвачев В. Л. Про алгоритмічну повноту засобі в аналітичної геометрії. Докл. АН УРСР, 1966, № 1.
3. Рвачев В. Л., Шкляров Л. И. О применении метода Бубнова — Галеркина к решению краевых задач для областей сложной формы. Дифференциальные уравнения, 1965, т. 1, № 11.
4. Рвачев В. Л. Об аналитическом описании некоторых геометрических объектов. Докл. АН СССР, 1963, т. 153, № 4.
5. Манько Г. П., Рвачев В. Л., Шкляров Л. И. О построении последовательности координатных функций при решении задач Дирихле и Неймана для областей сложной формы. Дифференциальные уравнения, 1968, т. 14, № 4.
6. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. М., Гостехтеоретиздат, 1953.
7. Кузьмин Ю. Н., Уфлянд Я. С. Контактная задача о сжатии упругого слоя двумя штампами. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.