

Поступила 28 XI 1969

## ЛИТЕРАТУРА

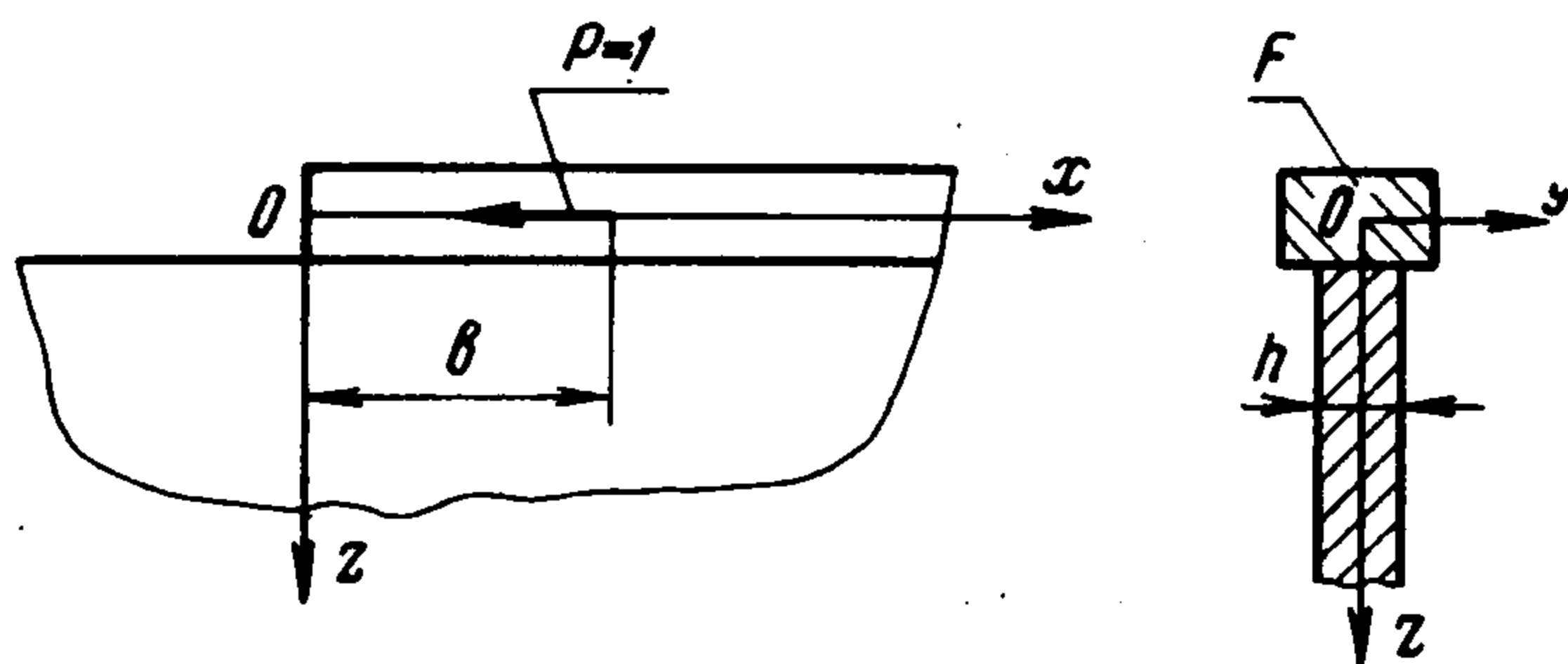
1. А р у т ю н я н Н. Х. А б р а м я н Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Л е б е д е в Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.
3. Б е л о в а Н. А., У ф л я н д Я. С. Задача Дирихле для тороидального сегмента. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
4. У л и т к о А. Ф. Об одном обобщении интегрального преобразования Мелера — Фока. Прикл. механ., 1967, т. 3, № 5.
5. Б е л о в а Н. А., У ф л я н д Я. С. О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 8.
6. Г р и н б е р г Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
7. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции, М., «Наука», 1965, т. 1.
8. Л е б е д е в Н. Н., С к а л ь с к а я И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
9. Б е л о в а Н. А. Об одном разложении в интеграл по сферическим функциям первого и второго рода. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 11.

### КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И СЦЕПЛЕННОГО С НЕЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

В. Л. Воробьев, Г. Я. Попов

(Одесса)

Рассматривается такая задача. К границе упругой полубесконечной пластинки толщиной  $h$  (фигура) приклеен (приварен) упругий полубесконечный стержень с постоянным поперечным сечением  $F$ . На произвольном расстоянии  $b$  от торца стержня приложена единичная сила, направленная по оси стержня. Требуется найти касательное контактное напряжение  $\tau_0(x)$  и нормальное напряжение в произвольном поперечном сечении стержня  $\sigma_0(x)$  в предположении, что стержень не воспринимает изгибающих моментов (нормальное контактное напряжение не учитывается). Как известно, аналогичная задача для бесконечного стержня решена в работе [1].



Случай полубесконечного стержня рассмотрен в работах [2,3]; в первой из них дано приближенное решение, во второй получено точное решение<sup>1</sup>. Однако в этих работах дано решение для того простого случая, когда сила приложена к торцу.

Здесь предлагается на основе совершенно иного подхода точное решение для случая, когда сила приложена на произвольном расстоянии. Использован способ, предложенный одним из авторов [4], для решения такой же задачи, когда сила действует перпендикулярно оси стержня и не учитывается касательное контактное напряжение. Дана численная реализация полученного точного решения.

<sup>1</sup> Точное решение приведено также в работе А. И. Каландия [11], появившейся после отсылки настоящей работы в редакцию.

1. Нетрудно убедиться, что задача определения касательного контактного напряжения  $\tau_0(x)$  и перемещения стержня  $U_0(x)$  вдоль оси  $x$  эквивалентна решению следующей системы:

$$U_0(x) = -\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} \ln \frac{1}{|x-t|} \tau_0(s) ds + \text{const} \quad (-\infty < x < \infty) \quad (1.1)$$

$$U_0''(x) = -\alpha [\tau_0(x) - h^{-1}\delta(x-b)] \quad (x \geq 0, \gamma = 2/E_0, \alpha = h(EF)^{-1})$$

с последующим удовлетворением краевому условию

$$U_0'(0) = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $\delta(x)$  — импульсная функция Дирака,  $E$  и  $E_0$  — модули упругости материала соответственно стержня и пластинки, а штрих означает производную.

Для случая, когда единичная сила приложена в торце стержня ( $b = 0$ ) более удобным оказывается [удовлетворять следующему условию:

$$h \int_0^{\infty} \tau_0(x) dx = 1 \quad (1.3)$$

Для решения системы (1.1) рассмотрим вспомогательную систему

$$U_\lambda(x) = -\frac{\gamma}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda|x-s|) \tau_\lambda(s) ds \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$U_\lambda''(x) - \lambda^2 U_\lambda(x) = -\alpha [\tau_\lambda(x) - h^{-1}\delta(x-b)] \quad (x \geq 0) \quad (1.4)$$

Здесь  $K_0(x)$  — функция Макдональда.

Если перейти к пределу  $\lambda \rightarrow 0$  в системе (1.4), то получим систему (1.1), так как известно, что

$$K_0 z = O(\ln z), \quad z \rightarrow 0$$

То, что первое уравнение системы (1.4) при  $\lambda \rightarrow 0$  переходит в первое уравнение системы (1.1), можно видеть и из работы [5].

Таким образом, для получения решения системы (1.1) достаточно найти  $\tau_\lambda(x)$  из системы (1.4), затем совершить предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$  и удовлетворить краевому условию (1.2).

2. Считая  $\lambda > 0$ , можно непосредственной подстановкой убедиться, что общим, исчезающим на бесконечности решением дифференциального уравнения системы (1.4) будет функция

$$U_\lambda(x) = -C_\lambda e^{-\lambda x} + \lambda \int_0^{\infty} g_\lambda(x-s) [\tau_\lambda(s) - h^{-1}\delta(s-b)] ds \quad (2.1)$$

Здесь  $C_\lambda$  — произвольная постоянная

$$g_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm i\eta x}}{\eta^2 + \lambda^2} d\eta = \frac{e^{-\lambda|x|}}{2\lambda} \quad (2.2)$$

Приравняв (2.1) к первому из уравнений системы (1.4), придем к интегральному уравнению Винера — Хопфа первого рода

$$\int_0^{\infty} l_\lambda(x-s) \tau_\lambda(s) ds = \frac{C_\lambda}{\gamma} e^{-\lambda x} + \frac{c}{h} g_\lambda(x-b) \quad (x \geq 0)$$

$$l_\lambda(x) = c g_\lambda(x) + \pi^{-1} K_0(\lambda x) \quad (c = \alpha/\gamma = hE_0(2EF)^{-1}) \quad (2.3)$$

допускающего точное решение.

Представляется более удобным получить в начале решение такого уравнения

$$\int_0^{\infty} l_{\lambda}(x-s) \varphi_{\zeta}(s) ds = e^{i\zeta x} \quad (x \geq 0, \operatorname{Im} \zeta \geq 0) \quad (2.4)$$

после чего, пользуясь линейностью уравнения (2.3), его решение получим в виде [5, 6, 4]

$$\tau_{\lambda}(x) = \frac{C_{\lambda}}{\gamma} [\varphi_{\zeta}(x)]_{\zeta=i\lambda} + \frac{c}{2\pi h} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\lambda}(-\zeta) \varphi_{\zeta}(x) d\zeta \quad (2.5)$$

где  $G_{\lambda}(u)$  представляет собой преобразование Фурье функции  $g_{\lambda}(x-b)$ .

Решение уравнения (2.4) строится по формуле Хопфа — Фока [7, 5, 6, 4].

$$\varphi_{\zeta}(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\omega) \Psi(\zeta)}{\omega + \zeta} e^{-i\omega x} d\omega \quad (2.6)$$

Здесь функция  $\Psi(\omega)$  регулярна и отлична от нуля в верхней полуплоскости (без точки  $\infty$ ), удовлетворяет функциональному уравнению

$$L^{-1}(\omega) = \Psi(\omega)\Psi(-\omega)$$

и такому поведению на бесконечности

$$\Psi(\omega) = O(\omega^{\nu}) \quad (\omega \rightarrow \infty, \quad \nu < 1)$$

Функция  $L(\omega)$  есть преобразование Фурье функции  $l_{\lambda}(x)$ , вычисление которого приводит к формуле

$$\frac{1}{L(\omega)} = \frac{\omega^2 + \lambda^2}{c + \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} = H(\omega)$$

Таким образом необходимо выполнить факторизацию функции  $H(\omega)$ . Отцепив от  $H(\omega)$  множитель  $\sqrt{\omega^2 + \lambda^2}$ , допускающий очевидную факторизацию, согласно общей теории [7], найдем

$$\Psi(\omega) = \sqrt{\lambda - i\omega} \chi_{\lambda}(\omega/\lambda) \quad (2.7)$$

где

$$\chi_{\lambda}(z) = \exp \left[ -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{c}{\lambda \sqrt{t^2 + 1}} \right) \frac{dt}{t-z} \right]$$

Как показано в работе [8] (см. также [6, 4, 9]), последний интеграл приводится к виду

$$\chi_{\lambda}(z) = \chi_{\lambda}(i \cos \tau) = \left( \frac{\cos \tau + 1}{\cos \tau + \cos \sigma} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\tau-\sigma}^{\tau+\sigma} \frac{u}{\sin u} du \right], \quad \sin \sigma = -\frac{c}{\lambda} \quad (2.8)$$

Формула (2.6) путем деформирования пути интегрирования (эта операция более подробно описана в работах [9, 6]) в петлю, охватывающую луч  $(-i\lambda, -i\infty)$ , может быть представлена в виде

$$\varphi_{\zeta}(x) = \frac{\Psi(\zeta)}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \frac{R_{\lambda}(s)(s^2 - \lambda^2)}{\Psi(is)(s + i\zeta)} e^{-xs} ds + H(\zeta) e^{i\zeta x} \quad (2.9)$$

$$R_{\lambda}(s) = \sqrt{s^2 - \lambda^2} / (c^2 + s^2 - \lambda^2) \quad (2.10)$$

Подставим найденное выражение (2.9) для  $\varphi_{\zeta}(x)$  в формулу (2.5) и поменяем порядок интегрирования в повторном интеграле. После этого проведем над интегралами по бесконечной прямой операции, уже сделанные выше при получении формулы (2.9). В результате вместо (2.5) будем иметь

$$\tau_{\lambda}(x) = A \int_{\lambda/c}^{\infty} \frac{R_{\lambda}(cs)(cs + \lambda)}{\Psi(ics)} e^{-cxs} ds + T_{\lambda}(x) \quad (2.11)$$

где

$$T_{\lambda}(x) = \frac{c^2}{h\pi^2} \int_{\lambda/c}^{\infty} \frac{R_{\lambda}(cs)(c^2s^2 - \lambda^2)}{\Psi(ics)} J_{\lambda}(cs) e^{-cxs} ds + \frac{c^2}{h\pi} \int_{\lambda/c}^{\infty} R_{\lambda}(cs) e^{-c(x-b)s} ds \quad (2.12)$$

$$J_{\lambda}(cs) = \int_{\lambda/c}^{\infty} \frac{R_{\lambda}(c\tau) e^{-cb\tau}}{\Psi(ic\tau)(\tau + s)} d\tau, \quad A = \frac{cC_{\lambda} \Psi(i\lambda)}{\pi\gamma} \quad (2.13)$$

В случае, когда сила приложена к торцу ( $b = 0$ ), второй член в правой части уравнения (2.3) выпадает, а следовательно, выпадают аналогичные члены и в формулах (2.5) и (2.11). И в этом случае решение системы (1.4) с учетом (2.7) будет иметь вид

$$\tau_{\lambda}(x) = A \int_{\lambda/c}^{\infty} \frac{R_{\lambda}(cs)(cs + \lambda)}{\sqrt{\lambda + cs} \chi_{\lambda}(ics/\lambda)} e^{-cxs} ds \quad (2.14)$$

3. Согласно сказанного в конце п. 1, для получения решения системы (1.1) надлежит в формулах (2.11)–(2.13) совершить предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$ .

Сначала рассмотрим случай, когда единичная сила приложена в торце стержня. Тогда указанный предельный переход следует совершить только в формуле (2.14).

Отметим, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \chi_{\lambda}(ics/\lambda) = s^{1/2} (1 + s^2)^{-1/4} \exp H_0(s) \quad (3.1)$$

$$H_0(s) = \frac{1}{\pi} \left[ \operatorname{arctg} s \ln s - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} s^{2k+1} \right] \quad (0 \leq s \leq 1)$$

Здесь использовано то обстоятельство, что функция  $\chi_{\lambda}(z)$  совпадает с функцией  $\chi_3(z; \lambda)$ , определяемой формулами (1.22) или (3.1) работы [4] и что там выполнен предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$  для функции  $\chi_3(z; \lambda)$  и получена формула (3.1). Там же<sup>1</sup> обнаружено и важное для вычислений свойство функции  $H_0(s)$ , заключающееся в том, что

$$H_0(s) = H_0(1/s) \quad (0 \leq s \leq 1) \quad (3.2)$$

Учитывая (3.1) и (2.10), легко из (2.14) найти

$$\tau_0(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \tau_{\lambda}(x) = \frac{A^*}{c^{1/2}} \int_0^{\infty} \frac{se^{-H_0(s)}}{(s^2 + 1)^{3/4}} e^{-cxs} ds \quad (A^* = \lim_{\lambda \rightarrow 0} A) \quad (3.3)$$

представляющее собой контактное касательное напряжение под стержнем, когда сила приложена к торцу.

Чтобы получить более удобные формулы как для контактного касательного напряжения  $\tau_0(x)$ , так и для нормального напряжения в стержне  $\sigma_0(x)$ , введем безразмерную абсциссу и приведенные напряжения  $\tau(\xi)$  и  $\sigma(\xi)$

$$\xi = cx, \quad \beta = cb; \quad \tau(\xi) = h(2c)^{-1} \tau_0(\xi/c), \quad \sigma(\xi) = h(2c)^{-1} \sigma_0(\xi/c) \quad (3.4)$$

Приняв во внимание последнее, а также (3.2), получим

$$\tau(\xi) = B \int_0^1 F(s) \left[ se^{-\xi/s} + \frac{e^{-\xi/s}}{s^{3/2}} \right] ds, \quad B = \frac{A^* h}{2c^{3/2}} \quad (3.5)$$

$$\sigma(\xi) = 2 \int_{\xi}^{\infty} \tau(\eta) d\eta = 2B \int_0^1 F(s) \left[ e^{-\xi/s} + \frac{e^{-\xi/s}}{s^{1/2}} \right] ds \quad (3.6)$$

$$F(s) = (s^2 + 1)^{-3/4} e^{-H_0(s)} \quad (3.7)$$

<sup>1</sup> Пользуясь случаем, укажем на опечатки и описки в работе [4]. В формуле (3.3) следует убрать  $i$  перед знаком  $\infty$ ; в (3.4) положить  $c = 1$  и считать  $\tau + \sigma_3 \rightarrow -\pi/2 - i\infty$ ; в (3.6) пределы интегрирования следующие: в первом интеграле  $(-\pi/6 - i\infty, \pi/6 - i \ln s)$ , в третьем  $(0, -i\pi/6 - \ln s)$ ; в (3.8) пропущен множитель  $(t - i)^{-1/2}$ ; всюду считать  $(-\pi < \operatorname{Im}(\ln z) < \pi)$ .

При этом произвольную постоянную найдем из условия (1.3)

$$B = \left[ \int_0^1 F(s) (1 + s^{-1/2}) ds \right]^{-1} = 0.157$$

По формулам (3.5) и (3.6) вычислены значения  $\tau(\xi)$  (табл. 1,  $\beta = 0$ ) и  $\sigma(\xi)$  (табл. 2,  $\beta = 0$ ). Полученные величины практически совпадают с результатами [2,3].

4. Рассмотрим теперь более общий случай, когда к упругому стержню в произвольной точке  $x = b > 0$  приложена единичная сила. Как уже отмечалось, чтобы найти  $\tau_0(x)$ , надо совершить предельный переход в формулах (2.11)–(2.13), после чего произвольную постоянную определить из краевого условия (1.2).

Покажем, что последнее будет выполнено, если  $A = 0$ . Для этого достаточно показать, что функция

$$U_{\lambda}^*(x) = \int_0^{\infty} g_{\lambda}(x-s) f(s) ds$$

которая при  $f(x) = \alpha[\tau_{\lambda}(x) - h^{-1}\delta(x-b)]$  будет частным решением дифференциального уравнения системы (1.4), обладает свойством

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{dU_{\lambda}^*(x)}{dx} \right]_{x=0} = 0 \quad (4.1)$$

Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\left( \frac{d}{dx} - \lambda \right) g_{\lambda}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{inx}}{\eta - i\lambda} d\eta = 0 \quad (x < 0)$$

Отсюда, как следствие, вытекает, что

$$\left[ \left( \frac{d}{dx} - \lambda \right) U_{\lambda}^*(x) \right]_{x=0} = 0$$

Тем самым доказано (4.1).

Таким образом, чтобы получить  $\tau_0(x)$  достаточно совершить предельный переход  $\lambda \rightarrow 0$  в формулах (2.12) и (2.13). Проведем над интегралами в (2.12) и (2.13) операции, уже сделанные выше при получении формул (3.5) и (3.6). В результате получим

$$\tau(\xi) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^1 F(s) \left[ sJ(s) e^{-\xi s} + J\left(\frac{1}{s}\right) \frac{e^{-\xi/s}}{s^{3/2}} \right] ds + \tau_{\infty}(\xi - \beta) \quad (4.2)$$

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 F(s) \left[ J_-(s) e^{-\xi s} + J(s^{-1}) \frac{e^{-\xi/s}}{s^{1/2}} \right] ds + \sigma_{\infty}(\xi - \beta) \quad (4.3)$$

где

$$J(z) = \int_0^1 F(t) \left[ \frac{e^{-\beta t}}{1 + t/z} + \frac{t^{1/2} e^{-\beta/t}}{t + z^{-1}} \right] dt$$

$$\tau_{\infty}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{te^{-zt}}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2\pi} (-ciz \cos z - siz \sin z) \quad (z > 0) \quad (4.4)$$

$$\sigma_{\infty}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{\pi} (ciz \sin z - siz \cos z) \quad (z > 0) \quad (4.5)$$

Функция  $F(s)$  определяется формулой (3.7).

При вычислении интегралов в (4.4) и (4.5) использовались формулы из ([10], стр. 326). Эти выражения определяют приведенные напряжения в случае бесконечного стержня, нагруженного единичной силой при  $z = 0$ , и полностью совпадают с формулами работы [1], полученными другим путем.

По формулам (4.2)—(4.5) вычислены значения  $\tau(\xi)$  (табл. 1) и  $\sigma(\xi)$  (табл. 2) в зависимости от приведенного расстояния ( $\beta = cb$ ) точки приложения единичной силы до торца стержня.

Таблица 1

$\beta$	$\xi = 0,2$	0,4	0,6	1,0	1,4	2,0
0.0	0.429	0.236	0.157	0.087	0.056	0.033
0.2	$\infty$	0.289	0.180	0.095	0.060	0.035
0.4	0.343	$\infty$	0.249	0.113	0.068	0.038
0.6	0.243	0.266	$\infty$	0.147	0.081	0.043
1.0	0.155	0.138	0.158	$\infty$	0.138	0.060
1.4	0.119	0.093	0.094	0.141	$\infty$	0,096

Таблица 2

$\beta$	$\xi = 0,2$	0,4	0,6	1,0	1,4	2,0
0.0	0.564	0.438	0.361	0.268	0.212	0.161
0.2	-0.347*	0.474	0.384	0.280	0.220	0,165
0.4	-0.227	-0.404*	0.436	0.304	0.234	0.173
0.6	-0.180	-0.278	-0.435*	0.341	0.254	0.184
1.0	-0.129	-0.186	-0.244	-0.464*	0.324	0.216
1.4	-0.100	-0.141	-0.178	-0.267	-0.478*	0.270

Из числового материала следует, что при  $\beta \geq 1.4$  расчет можно вести по формулам для бесконечного стержня.

При пользовании табл. 2 следует учесть, что значения со звездочкой относятся к сечению, расположенному слева от точки приложения единичной силы. Чтобы получить значения для сечения справа от силы, надо к записанным величинам прибавить единицу.

Поступила 26 VI 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. М е l a n E. Ein Beitrag zur Theorie geschweister Verbindungen. Ingr — Arch., 1932, Bd. 3, H. 2, S. 123.
2. В u e l l E. L. On the Distribution of Plane Stress in a Semi — Infinite Plate with partially Stiffened Edge. J. Math. Phys., 1948, vol. 26, p. 223.
3. К o i t e r W. T. On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, p. 164.
4. П о п о в Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
5. П о п о в Г. Я. Вдавливание полубесконечного штампа в упругое полупространство. Теорет. и прикл. матем., Львов, Изд-во Львовск. ун-та, № 1.
6. П о п о в Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом полупространстве. Научн. докл. высш. школы, Строительство, 1958, № 4.
7. К р е й н М. Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Усп. матем. н., 1958, т. 13, вып. 5.
8. Г р и н б е р г Г. А., Ф о к В. А. К теории береговой рефракции электромагнитных волн. В сб.: Исследования по распространению радиоволн. Сб. 2. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
9. П о п о в Г. Я. Об одном интегро-дифференциальном уравнении. Укр. матем. ж., 1960. № 1.
10. Г р а д ш т е й н И. С., Р ы ж и к И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
11. К а л а н д и я А. И. О напряженном состоянии в пластинках, усиленных ребрами жесткости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.