О КРУЧЕНИИ УСЕЧЕННОГО ГИПЕРБОЛОИДА

Н. А. Белова, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

Изучаются некоторые задачи кручения, разрешимые в эллипсоидальных координатах при помощи специального обобщения преобразования Мелера-Фока на случай неполного промежутка. Дано доказательство соответствующей формулы обращения.

§ 1. Постановка и общее решение задачи. Рассмотрим задачу о кручении двуполостного гиперболоида вращения, усеченного в вершине поверхностью эллипсоида. В вырожденных эллипсоидальных координатах

$$r = c\ \mathrm{sh}\,\alpha \sin\beta, \qquad z = c\ \mathrm{ch}\alpha\cos\beta \tag{1.1}$$

рассматриваемое тело занимает область $\alpha_0 < \alpha < \infty$, $0 \leqslant \beta < \beta_0$.

Если за основную неизвестную функцию принять единственную составляющую упругого смещения $v \equiv u_\varphi(\alpha,\beta)$, то задача сводится к решению уравнения [1]

$$\Delta v - r^{-2} v = 0 \tag{1.2}$$

при некоторых граничных условиях на поверхностях $\alpha = \alpha_0$ и $\beta = \beta_0$.

В случае, когда при $\alpha = \alpha_0$ эти условия однородны, следует рассмотреть два класса задач:

(а) сечение $\alpha = \alpha_0$ закреплено, т. е.

$$v(\alpha_0, \beta) = 0$$

(б) при $\alpha = \alpha_0$ отсутствуют касательные напряжения

$$\tau_{\alpha\varphi} = Gr\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{v}{r}\right) = 0, \qquad \text{или} \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{\mathrm{sh}\,\alpha}\right) = 0$$

При этом предполагается, что на поверхности гиперболоида $\beta = \beta_0$ задано либо перемещение v, либо напряжение

$$\tau_{\beta\varphi} = \frac{G\sin\beta}{h}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v}{\sin\beta}\right), \qquad h = c\sqrt{\mathrm{sh}^2\alpha + \sin^2\beta}$$

Здесь G — модуль сдвига, h — коэффициент Ламе.

Указанные выше задачи могут быть также сформулированы при помощи функции напряжений $\Phi = r^2 w$, где

$$\Delta w - 4r^{-2} w = 0 \tag{1.3}$$

В этом варианте на тех участках поверхности, где задано напряжение, можно считать известной саму функцию Φ, а в случае задания перемещений — ее нормальную производную.

В дальнейшем рассматривается более общая задача о решении уравнения [1]

$$\Delta u - m^2 r^{-2} u = 0, \quad 1 < x_0 < x < \infty, \quad 0 \leqslant \beta < \beta_0 \tag{1.4}$$

$$x = \mathrm{ch}\,\alpha, \quad x_0 = \mathrm{ch}\,\alpha_0; \quad m = 0,1,2,\ldots$$

с граничными условиями

$$\left(Au + B\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=x_0} = 0, \quad \left(Ku + L\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)_{\beta=\beta_0} = f(x) \tag{1.5}$$

Разделение переменных в уравнении (1.4) приводит к частным решениям вида [2]

$$u_\nu(\alpha, \beta) = [MP_\nu^m(x) + NQ_\nu^m(x)]\,P_\nu^m(\cos\beta) \tag{1.6}$$

[1] К подобным задачам сводятся также задачи Дирихле или Неймана при отсутствии осевой симметрии, краевые задачи теории теплопроводности для рассматриваемой области и др.

Применяя граничные условия при $\alpha = \alpha_0$ и используя результаты работы [3], находим

$$u_\nu = C(\tau)\, y_\nu(x)\, P_\nu^{\,m}(\cos\beta) \qquad (\nu = -1/2 + i\tau, \quad \tau \geqslant 0)$$

$$y_\nu = [AQ_\nu^{\,m}(x_0) + BQ_\nu^{\,m'}(x_0)]\, P_\nu^{\,m}(x) - [AP_\nu^{\,m}(x_0) + BP_\nu^{\,m'}(x_0)]\, Q_\nu^{\,m}(x) \tag{1.7}$$

Таким образом, решение задачи имеет вид

$$u(\alpha, \beta) = \int_0^\infty C(\tau)\, y_\nu(x)\, P_\nu^{\,m}(\cos\beta)\, d\tau \tag{1.8}$$

Используя теперь граничное условие (1.5) при $\beta = \beta_0$, приходим к разложению вида

$$f(x) = \int_0^\infty D(\tau)\, y_\nu(x)\, d\tau \tag{1.9}$$

из которого следует определить неизвестную величину

$$D(\tau) = C(\tau)\, [KP_\nu^{\,m}(\cos\beta_0) - L\sin\beta_0 P_\nu^{\,m'}(\cos\beta_0)] \tag{1.10}$$

Разложение (1.9) является обобщением преобразования Мелера — Фока на случай неполного промежутка и граничных условий третьего рода [1]. В § 2 данной работы доказана следующая формула обращения (см. (2.1)):

$$D(\tau) = \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m)} \frac{(-1)^m \tau \operatorname{th} \pi\tau}{|AQ_\nu^{\,m}(x_0) + BQ_\nu^{\,m'}(x_0)|^2} \int_{x_0}^\infty f(x)\, y_\nu(x)\, dx \tag{1.11}$$

которая и дает окончательное решение поставленной задачи.

Для задач кручения, решаемых при помощи функции v, следует, очевидно, положить $m = 1$, причем $B = 0$ в случае (а), и $A = \operatorname{ch}\alpha_0 \operatorname{cs} \operatorname{ch}^2\alpha_0$, $B = -1$ в случае (б).

Задачи, в которых используется функция напряжений Φ, соответствуют случаю $m = 2$. Заметим еще, что если граничные условия при $\alpha = \alpha_0$ неоднородны, то формула (1.11) может быть использована для получения решения по методу интегральных преобразований (см., например [6]).

§ 2. **Доказательство формулы обращения.** *Теорема.* Пусть $f(x)$ — заданная функция, определенная в промежутке (x_0, ∞) и удовлетворяющая условиям:

1°. Функция $f(x)$ — кусочно-непрерывна и имеет ограниченную вариацию в открытом промежутке (x_0, ∞);

2°. $|f(x)|\, x^{-1/2} \ln x \in L(x_0, \infty)$

Тогда имеет место разложение

$$1/2[f(x-0) + f(x+0)] = \qquad (x_0 > 1, \quad \nu = -1/2 + i\tau)$$

$$= (-1)^m \int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th} \pi\tau\, y_\nu(x)}{|AQ_\nu^{\,m}(x_0) + BQ_\nu^{\,m'}(x_0)|^2} \frac{\Gamma(1/2 + i\tau - m)}{\Gamma(1/2 + i\tau + m)}\, d\tau \int_{x_0}^\infty f(\xi)\, y_\nu(\xi)\, d\xi \tag{2.1}$$

Здесь A и B — вещественные числа разного знака.

Для доказательства потребуются следующие оценки при $x > x_0$:

$$|P^m_{-1/2+i\tau}(x)| \leqslant \operatorname{ch}\pi\tau \frac{(x^2-1)^{1/2 m}}{(x+1)^m} \frac{\Gamma(m + 1/2)}{\Gamma(1/2)} P_{-1/2}(x) \leqslant$$

$$\leqslant O(1) \operatorname{ch} \pi\tau x^{-1/2} \ln x \tag{2.2}$$

$$|Q^m_{-1/2+i\tau}(x)| \leqslant \operatorname{ch}\pi\tau\, |Q^m_{-1/2}(x)| + 1/2 \operatorname{sh}\pi\tau\, |P^m_{-1/2}(x)| \leqslant O(1) \operatorname{ch}\pi\tau x^{-1/2} \ln x \tag{2.3}$$

$$|y_\nu(x)| \leqslant O(1) \operatorname{ch}^2 \pi\tau x^{-1/2} \ln x \tag{2.4}$$

---

[1] Сходным разложениям в случае краевых условий первого рода были посвящены работы [3–5].

Они получаются из интегральных представлений [7]

$$P^m_{-1/2+i\tau}(x) = \frac{(-1)^m}{\pi}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)(x^2-1)^{m/2}\operatorname{ch}\pi\tau\int_0^\infty \frac{\cos\tau t\, dt}{(x+\operatorname{ch} t)^{m+1/2}}$$

$$Q^m_{-1/2+i\tau}(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)^{1/2 m}\,\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\left\{\int_0^\pi \frac{\operatorname{ch}\tau t\, dt}{(x-\cos t)^{m+1/2}} - i\operatorname{sh}\pi\tau\int_0^\infty \frac{e^{-i\tau t}\, dt}{(x+\operatorname{ch} t)^{m+1/2}}\right\}$$

соотношений

$$P^{m\prime}_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}P^{m+1}_\nu(x) + \frac{mx}{x^2-1}P_\nu^m(x)$$

$$Q^{m\prime}_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}Q^{m+1}_\nu(x) + \frac{mx}{x^2-1}Q_\nu^m(x)$$

и оценок

$$|AQ_\nu^m(x_0) + BQ^{m\prime}_\nu(x_0)| \leqslant \operatorname{ch}\pi\tau O(1), \quad |AP_\nu^m(x_0) + BP^{m\prime}_\nu(x_0)| \leqslant \operatorname{ch}\pi\tau O(1)$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$J(T, x) = (-1)^m\int_0^T \frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau y_\nu(x) M(\tau)}{|AQ_\nu^m(x_0) + BQ^{m\prime}_\nu(x_0)|^2}\frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)}d\tau \tag{2.5}$$

где

$$M(\tau) = \int_{x_0}^\infty f(\xi)\, y_\nu(\xi)\, d\xi \tag{2.6}$$

Интеграл $M(\tau)$ является непрерывной функцией, так как подинтегральная функция кусочно-непрерывна по ξ, непрерывна по τ и имеет место мажорантная оценка

$$\int_{x_0}^\infty |f(\xi)\, y_\nu(\xi)|\, d\xi \leqslant \int_{x_0}^\infty |f(\xi)|\, O(1)\, \xi^{-1/2}\ln\xi\, d\xi < \infty \tag{2.7}$$

Используя метод, развитый в работе [5], можно показать, что

$$AQ_\nu^m(x_0) + BQ_\nu^{m\prime}(x_0) \neq 0 \quad \text{при } \operatorname{Re}\nu \geqslant 1/2$$

Таким образом, в повторном интеграле (2.5) можно изменить порядок интегрирования и представить $J(T, x)$ в виде

$$J(T, x) = (-1)^m\int_{x_0}^\infty f(\xi)\, G(x, \xi, T)\, d\xi \tag{2.8}$$

$$G(x, \xi, T) = \int_0^T \frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau y_\nu(x)\, y_\nu(\xi)}{|AQ_\nu^m(x_0) + BQ^{m\prime}_\nu(x_0)|^2}\frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)}d\tau \tag{2.9}$$

Учитывая четность по τ подынтегральной функции в (2.9), делая замену переменных $i\tau = p$ и принимая во внимание соотношения [2]

$$\pi\operatorname{tg}\pi p\, P^m_{p-1/2}(z) = Q^m_{-p-1/2}(z) - Q^m_{p-1/2}(z), \quad \pi\operatorname{tg}\pi p P^{m\prime}_{p-1/2}(z) = Q^{m\prime}_{-p-1/2}(z) - Q^{m\prime}_{p-1/2}(z)$$

получим

$$G(x, \xi, T) = \frac{1}{\pi i}\int_{-iT}^{iT} \frac{pQ^m_{p-1/2}(x)\, y(\xi)}{AQ^m_{p-1/2}(x_0) + BQ^{m\prime}_{p-1/2}(x_0)}\frac{\Gamma(1/2+p-m)}{\Gamma(1/2+p+m)}dp \quad (x \geqslant \xi) \tag{2.10}$$

$$G(x, \xi, T) = \frac{1}{\pi i}\int_{-iT}^{iT} \frac{pQ^m_{p-1/2}(\xi)\, y_{p-1/2}(x)}{AQ^m_{p-1/2}(x_0) + BQ^{m\prime}_{p-1/2}(x_0)}\frac{\Gamma(1/2+p-m)}{\Gamma(1/2+p+m)}dp \quad (\xi \geqslant x)$$

Так как особенности функции $\Gamma(1/2 + p - m)$ в точках $p = m - 1/2,\ m - 3/2, \ldots, 1/2$ погашаются нулями функции $y_{p-1/2}$, то подынтегральная функция в $G(x, \xi, T)$ регулярна по p в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geqslant 0$. Поэтому интегрирование по отрезку мнимой оси может быть заменено интегрированием [1] по полуокружности Γ_T, где $p = Te^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqslant 1/2\pi$.

Используя приведенные в работе [9] асимптотические представления для сферических функций при $|p| \to \infty$, $|\arg p| \leqslant 1/2\,\pi$

$$Q_{p-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = \left(\frac{\pi}{2p\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2} e^{-p\alpha}\left[1 + O(|p|^{-1})\right] \tag{2.11}$$

$$P_{p-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = \left(\frac{1}{2\pi p\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2} \{e^{p\alpha}[1 + \sqrt{\operatorname{ch}\alpha}\,O(|p|^{-1})] \pm ie^{-p\alpha}[1 + O(|p|^{-1})]\}$$

можно после некоторых выкладок получить более общие формулы

$$Q^m_{p-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = (-1)^m p^{m-1/2}\left(\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2} e^{-p\alpha}\left[1 + O(|p|^{-1})\right] \tag{2.12}$$

$$P^m_{p-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{p^{m-1/2}}{\sqrt{2\pi\operatorname{sh}\alpha}}\{e^{p\alpha}[1 + \sqrt{\operatorname{ch}\alpha}\,O(|p|^{-1})] \pm i(-1)^m e^{-p\alpha}[1 + O(|p|^{-1})]\} \tag{2.13}$$

$$Q^{m\prime}_{p-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{1}{\operatorname{sh}\alpha}(-1)^{m+1}p^{m+1/2}\left(\frac{\pi}{2\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2} e^{-p\alpha}\left[1 + O(|p|^{-1})\right] \tag{2.14}$$

$$P^{m\prime}_{p-1/2}(\operatorname{ch}\alpha) = \frac{p^{m+1/2}}{\operatorname{sh}\alpha\sqrt{2\pi\operatorname{sh}\alpha}}\{e^{p\alpha}[1 + \sqrt{\operatorname{ch}\alpha}\,O(|p|)^{-1})] \pm i(-1)^{m+1} e^{-p\alpha}[1 + O(|p|^{-1})]\} \tag{2.15}$$

Тогда при $x \geqslant \xi$

$$\begin{aligned} G(x, \xi, T) &= \frac{1}{2\pi i}\frac{(-1)^m}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\gamma}}\int\limits_{\Gamma_T}\{e^{-p(\alpha-\gamma)} - (-1)^k e^{-p(\alpha+\gamma-\alpha_0)} + \\ &+ e^{-p(\alpha-\gamma)}\sqrt{\operatorname{ch}\gamma}\,O(|p|^{-1}) + e^{-p(\alpha+\gamma-2\alpha_0)}O(|p|^{-1}) + e^{-p(\alpha+\gamma)}O(|p|^{-1})\}\,dp = \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{(-1)^m}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\gamma}}\left\{\frac{\sin T(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma} - (-1)^k\frac{\sin T(\alpha+\gamma-2\alpha_0)}{\alpha+\gamma-2\alpha_0} + \right. \\ &\left. + \sqrt{\operatorname{ch}\gamma}\,O(1)\,J_1 + O(1)\,J_2 + O(1)\,J_3\right\} \end{aligned} \tag{2.16}$$

где

$$x = \operatorname{ch}\alpha, \quad \xi = \operatorname{ch}\gamma, \quad x_0 = \operatorname{ch}\alpha_0, \quad k = \begin{cases} 0 & \text{при } B = 0 \\ 1 & \text{при } B \neq 0 \end{cases}$$

$$|J_i| \leqslant \int\limits_0^{\pi/2} e^{-T\lambda_i\cos\varphi}\,d\varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\,\frac{1 - e^{-\lambda_i T}}{\lambda_i T} \tag{2.17}$$

$$\lambda_1 = \alpha - \gamma, \ \lambda_2 = \alpha + \gamma - 2\alpha_0, \ \lambda_3 = \alpha + \gamma$$

Для случая $\xi \geqslant x$, т. е. $\gamma \geqslant \alpha$, в (2.16) α и γ следует поменять местами Поэтому (2.8) представляется в виде

$$\begin{aligned} J(T, x) &= (-1)^m\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha} f(\operatorname{ch}\gamma)\operatorname{sh}\gamma\,G(x, \xi, T)\,d\gamma + \\ &+ (-1)^m\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(\operatorname{ch}\gamma)\operatorname{sh}\gamma\,G(x, \xi, T)\,d\gamma = I_1 + I_2 \end{aligned} \tag{2.18}$$

[1] Здесь в основном используется методика, развитая в работе [8].

В интеграле I_1 разбиваем интервал интегрирования на промежутки $(\alpha_0, \alpha - \delta)$, $(\alpha - \delta, \alpha)$ и выбираем сначала достаточно малое δ, а затем достаточно большое T. Тогда по теореме Дирихле с учетом условий 1°, 2° имеем при $T \to \infty$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha-\delta} f(\operatorname{ch}\gamma)\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin T(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}\,d\gamma = o(1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\alpha-\delta}^{\alpha} f(\operatorname{ch}\gamma)\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin T(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}\,d\gamma = {}^1/_2 f(\operatorname{ch}\alpha - 0) + o(1)$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} f(\operatorname{ch}\gamma)\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2}\frac{\sin T(\alpha+\gamma-2\alpha_0)}{\alpha+\gamma-2\alpha_0}\,d\gamma = o(1)$$

$$\int_{\alpha-\delta}^{\alpha} |f(\operatorname{ch}\gamma)|\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-T(\alpha-\gamma)}}{T(\alpha-\delta)}\,d\gamma = o(1)$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha-\delta} |f(\operatorname{ch}\gamma)|\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-T(\alpha-\gamma)}}{T(\alpha-\gamma)}\,d\gamma = O(T^{-1})$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} |f(\operatorname{ch}\gamma)|\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-T(\alpha+\gamma-2\alpha_0)}}{T(\alpha+\gamma-2\alpha_0)}\,d\gamma = O(T^{-1})$$

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} |f(\operatorname{ch}\gamma)|\left(\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\operatorname{sh}\alpha}\right)^{1/2}\frac{1-e^{-T(\alpha+\gamma)}}{T(\alpha+\gamma)}\,d\gamma = O(T^{-1})$$

Таким образом, при $T \to \infty$ $I_1 \to {}^1/_2 f(x-0)$. Аналогичным способом показывается, что $\lim I_2 = {}^1/_2 f(x+0)$ при $T \to \infty$; это и доказывает разложение (2.1).

§ 3. **Пример.** В качестве примера рассмотрим усеченный гиперболоид, сцепленный в области $\alpha = \alpha_0$ с жестким неподвижным штампом и скручиваемый касательными усилиями $\tau_{\beta\varphi} = F(\alpha)$, приложенными к поверхности $\beta = \beta_0$. При этом граничные условия для перемещения $v(\alpha, \beta)$ имеют вид

$$v\Big|_{\alpha=\alpha_0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{v}{\sin\beta}\Big|_{\beta=\beta_0} = f(\alpha) = \frac{c\sqrt{\operatorname{sh}^2\alpha + \sin^2\beta_0}}{G\sin\beta_0}F(\alpha) \qquad (3.1)$$

Решение такой задачи дается формулой

$$v = \int_0^\infty C(\tau)\,P_\nu^1(\cos\beta)\,y_\nu(x)\,d\tau \qquad (3.2)$$

где на основании (1.7), (1.10) и (1.11)

$$y_\nu(x) = Q_\nu^1(x_0)\,P_\nu^1(x) - P_\nu^1(x_0)\,Q_\nu^1(x), \quad \nu = {}^1/_2 + i\pi \qquad (3.3)$$

$$C(\tau) = \frac{\tau\sin\beta_0\operatorname{th}\pi\tau}{(\tau^2+{}^1/_4)\left[\sin^2\beta_0 P_\nu^{1\,\prime}(\cos\beta_0) + \cos\beta_0 P_\nu^1(\cos\beta_0)\right]}\int_{\alpha_0}^{\infty} f(\alpha)\,y_\nu(x)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha \qquad (3.4)$$

В частности, если линейная нагрузка интенсивности q приложена по окружности $\alpha = \alpha^*$, то интеграл в последней формуле вычисляется и имеет значение

$$\frac{q\operatorname{sh}\alpha^*}{G\sin\beta_0}y_\nu(\operatorname{ch}\alpha^*)$$

Окончательное решение дается однократной квадратурой (3.2).

Поступила 28 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

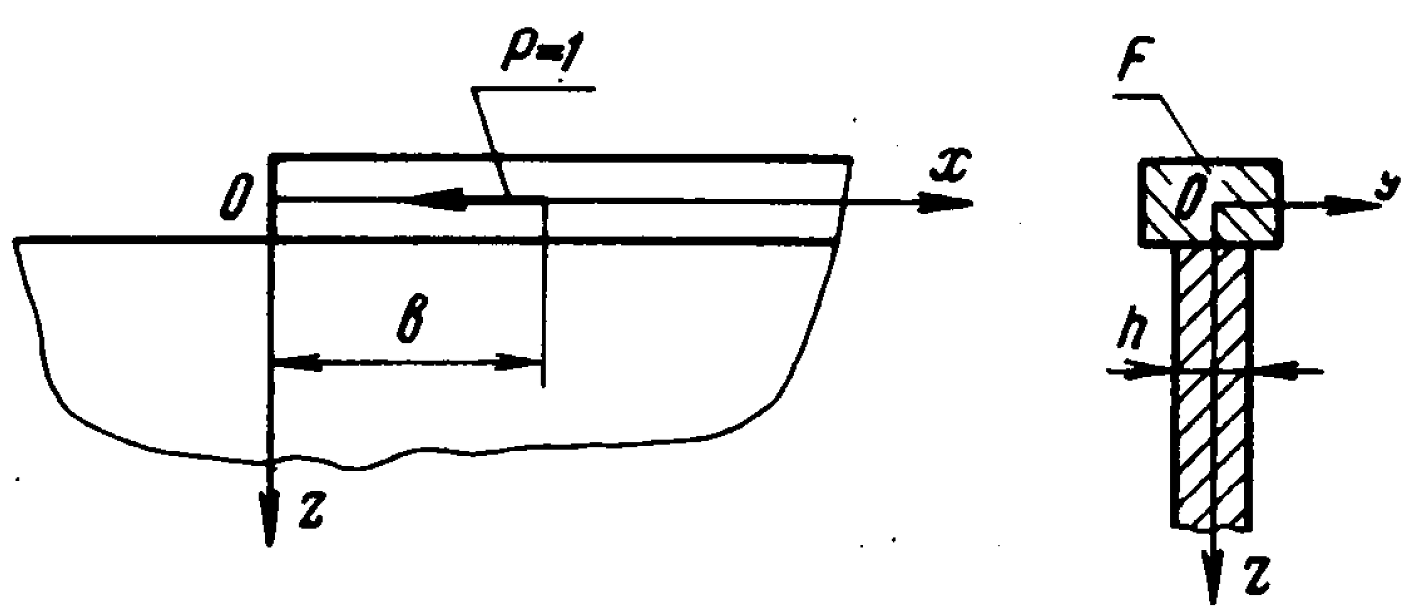
1. Арутюнян Н. Х. Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел. М., Физматгиз, 1963.
2. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1963.
3. Белова Н. А., Уфлянд Я. С. Задача Дирихле для тороидального сегмента. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
4. Улитко А. Ф. Об одном обобщении интегрального преобразования Мелера — Фока. Прикл. механ., 1967, т. 3, № 5.
5. Белова Н. А., Уфлянд Я. С. О разложении по собственным функциям одной сингулярной краевой задачи для уравнения Лежандра. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 8.
6. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, М., «Наука», 1965, т. 1.
8. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
9. Белова Н. А. Об одном разложении в интеграл по сферическим функциям первого и второго рода. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 11.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ И СЦЕПЛЕННОГО С НЕЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ

В. Л. Воробьев, Г. Я. Попов

(Одесса)

Рассматривается такая задача. К границе упругой полубесконечной пластинки толщиной h (фигура) приклеен (приварен) упругий полубесконечный стержень с постоянным поперечным сечением F. На произвольном расстоянии b от торца стержня приложена единичная сила, направленная по оси стержня. Требуется найти касательное контактное напряжение $\tau_0(x)$ и нормальное напряжение в произвольном поперечном сечении стержня $\sigma_0(x)$ в предположении, что стержень не воспринимает изгибающих моментов (нормальное контактное напряжение не учитывается). Как известно, аналогичная задача для бесконечного стержня решена в работе [1]. Случай полубесконечного стержня рассмотрен в работах [2,3]; в первой из них дано приближенное решение, во второй получено точное решение [1]. Однако в этих работах дано решение для того простого случая, когда сила приложена к торцу.



Здесь предлагается на основе совершенно иного подхода точное решение для случая, когда сила приложена на произвольном расстоянии. Использован способ, предложенный одним из авторов [4], для решения такой же задачи, когда сила действует перпендикулярно оси стержня и не учитывается касательное контактное напряжение. Дана численная реализация полученного точного решения.

[1] Точное решение приведено также в работе А. И. Каландия [11], появившейся после отсылки настоящей работы в редакцию.