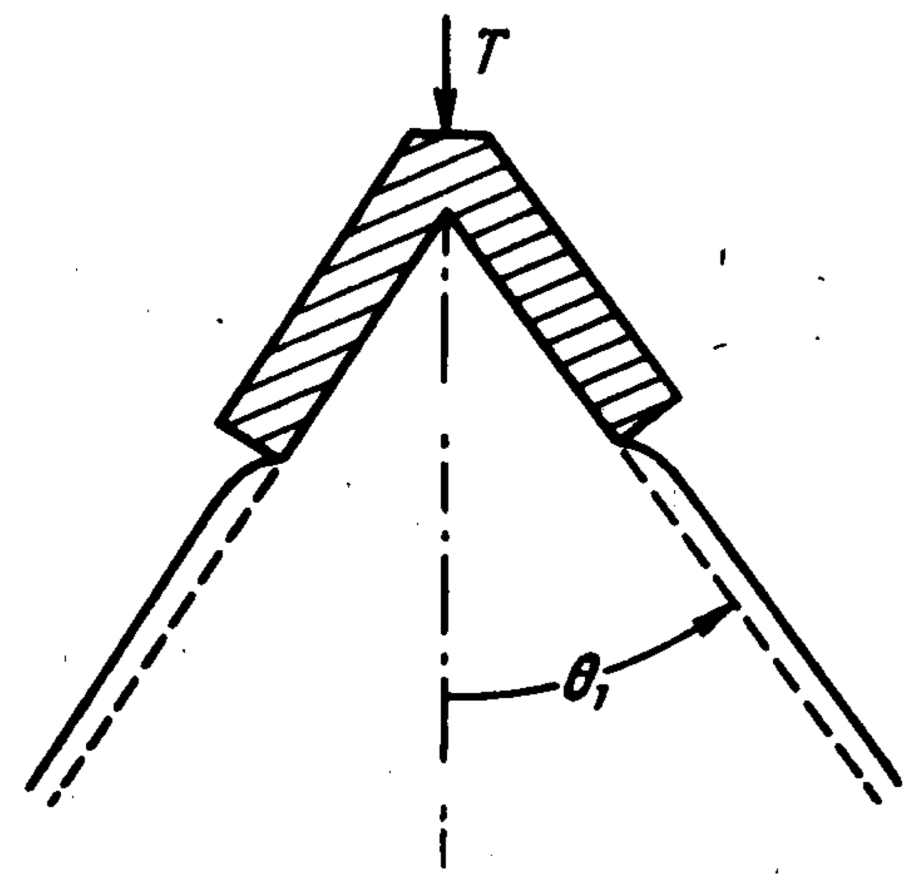
КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО БЕСКОНЕЧНОГО КОНУСА

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

В предлагаемой работе дано точное решение смешанной осесимметричной задачи теории упругости для бесконечного конуса. Предполагается, что касательные напряжения равны нулю на всей его граничной поверхности $\theta = \theta_1$, а однородные условия для нормальных напряжений и нормальных перемещений разделены окружностью $\theta = \theta_1$, $r = 1$ (r, θ, φ —сферические координаты).

Подобные задачи возникают, например, при определении напряженного состояния конуса, обжатого в вершине жесткой обоймой того же угла раствора, что и конус (фиг. 1), а также при внедрении конического штампа в коническую выемку, сделанную в упругом пространстве. Случай $\theta_1 = {}^1/_2\,\pi$ соответствует симметричному вдавливанию плоского кругового штампа в упругое полупространство.



При постановке задачи предполагается, что энергия упругих напряжений у края штампа и напряжения в вершине конуса ограничены. Как показывает решение, эти условия влекут за собой появление на бесконечности поля напряжений, статически эквивалентного некоторой осевой силе T.

§ 1. Компоненты вектора перемещений возьмем в форме С. Г. Гутмана [1]

$$2Gu_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} - 2(1-\sigma)\, r\Delta F, \qquad 2Gu_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \tag{1.1}$$

где G и σ — упругие постоянные, функция F удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Delta F = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

$$\Phi = r\frac{\partial F}{\partial r} + (3-4\sigma)\, F$$

Условия на граничной поверхности конуса $\theta = \theta_1$ имеют вид

$$u_\theta = \frac{1}{2Gr}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant r \leqslant 1 \tag{1.2}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \sigma\frac{\partial(r\Delta F)}{\partial r} - 2(1-\sigma)\,\Delta F = 0 \quad \text{при } 1 < r < \infty \tag{1.3}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\Phi}{r}\right) - (1-\sigma)\,\Delta F\right] = 0 \quad \text{при } 0 \leqslant r < \infty \tag{1.4}$$

Из данной выше постановки задачи, а также из требования ограниченности перемещений вытекает, что

$$\sigma_\theta = O[(1-r)^{\varepsilon_1 - 1}] \quad \text{при } r \to 1-0, \ \theta = \theta_1 \ (\varepsilon_1 > 0) \tag{1.5}$$

$$u_\theta = O[(r-1)^{\varepsilon_2}] \quad \text{при } r \to 1+0, \ \theta = \theta_1 \ (\varepsilon_2 > 0) \tag{1.6}$$

$$F = O(r) \quad \text{при } r \to \infty, \quad F = O(r^2) \quad \text{при } r \to 0 \tag{1.7}$$

Положим $F = r^2 F_1 + F_2$, где F_1 и F_2— гармонические функции, и применим к выражениям (1.2)—(1.4) во всей области $0 < \theta < \theta_1$ преобразование Меллина.

Интегрируя по частям и учитывая условия (1.7), получим

$$u(\nu, \theta) = \int_0^\infty u_\theta r^{\nu+1} dr = -(2G)^{-1} t \left[P_\nu'(x) A(\nu) + P_{\nu+2}'(x) B(\nu)\right] \tag{1.8}$$

$$\sigma(\nu, \theta) = \int_0^\infty \sigma_\theta r^{\nu+2} dr = t\left[(\nu+1)^2 P_\nu(x) + \operatorname{ctg}\theta\, P_\nu'(x)\right] A(\nu) + \\ + \left[(\nu+2) t_1 P_{\nu+2}(x) + t \operatorname{ctg}\theta P_{\nu+2}'(x)\right] B(\nu) \tag{1.9}$$

$$\tau(\nu, \theta) = \int_0^\infty \tau_{r\theta} r^{\nu+2} dr = (\nu+2)\, t P_\nu'(x) A(\nu) + t_2 P_{\nu+2}'(x) B(\nu) \tag{1.10}$$

Здесь $x = \cos\theta$, $P_\nu(x)$ — функция Лежандра первого рода, штрих означает производную по θ, ν — комплексный параметр, находящийся в силу условий существования интегралов (1.8)—(1.10) в полосе

$$-3 < \operatorname{Re}\nu < -2, \quad t = (\nu - 2 + 4\sigma), \quad t_1 = [(\nu+1)^2 - 2(1-\sigma)]$$
$$t_2 = [(\nu+2)^2 - 2(1-\sigma)]$$

При $\theta = \theta_1$ введем функции [2]

$$\sigma^+(\nu) = \int_0^1 \sigma_\theta r^{\nu+2} dr, \qquad u^-(\nu) = \int_1^\infty u_\theta r^{\nu+1} dr \tag{1.11}$$

регулярные соответственно в правой $\operatorname{Re}\nu > -3$ и левой $\operatorname{Re}\nu < -2$ полуплоскостях. Для определения этих функций, а также функций $A(\nu)$ и $B(\nu)$ из условий на границе (1.2)—(1.4) составим систему трех уравнений ($x_1 = \cos\theta_1$)

$$(2G)^{-1} t P_\nu'(x_1) A(\nu) + (2G)^{-1} t P_{\nu+2}'(x_1) B(\nu) = u^-(\nu)$$

$$t\left[(\nu+1)^2 P_\nu(x_1) + \operatorname{ctg}\theta_1 P_\nu'(x_1)\right] A(\nu) + \left[(\nu+2) t_1 P_{\nu+2}(x_1) + t \operatorname{ctg}\theta_1 P_{\nu+2}'(x_1)\right] \times \\ \times B(\nu) = \sigma^+(\nu) \tag{1.12}$$

$$(\nu+2) t P_\nu'(x_1) A(\nu) + t_2 P_{\nu+2}'(x_1) B(\nu) = 0$$

Подставив в первое уравнение найденные из двух других функции

$$A(\nu) = \frac{t_2 P_{\nu+2}'(x_1)\, \sigma^+(\nu)}{D_2(\nu)}, \qquad B(\nu) = -\frac{(\nu+2)\, t P_\nu'(x_1)\, \sigma^+(\nu)}{D_2(\nu)} \tag{1.13}$$

придем к уравнению Винера — Хопфа

$$\sigma^+(\nu) = K(\nu) u^-(\nu) \tag{1.14}$$

$$K(\nu) = D_2(\nu)[D_1(\nu)]^{-1} \tag{1.15}$$

$$D_1(\nu) = -G^{-1}(1-\sigma) t (2\nu+3) \quad P_\nu'(x_1) P_{\nu+2}'(x_1)$$

$$D_2(\nu) = t\left[(\nu+1)^2 t_2 P_\nu(x_1) P_{\nu+2}'(x_1) - (\nu+2)^2 t_1 P_\nu'(x_1) P_{\nu+2}(x_1) + \right. \\ \left. + 2(1-\sigma)(2\nu+3) \operatorname{ctg}\theta_1 P_\nu'(x_1) P_{\nu+2}'(x_1)\right] \tag{1.16}$$

Функция $D_1(\nu)$ имеет шесть простых нулей, не зависящих от θ_1: $\nu = 2 - 4\sigma$, 0, -1, $-{}^3/_2$, -2, -3, функция $D_2(\nu)$ имеет два простых $\nu = 2 - 4\sigma$, $-{}^3/_2$ и два двукратных $\nu = -1$, -2 нуля, не зависящих от θ_1. Эти нули играют существенную роль, порождая перемещения и напряжения в вершине конуса и на бесконечности. Функция $K(\nu)$ мероморфна, удовлетворяет условию четности $K(\nu - {}^3/_2) = K(-\nu - {}^3/_2)$ и, следовательно, может быть факторизована методом бесконечных произведений в форме

$$K(\nu)=K(-{}^3/_2)K^-(\nu)[K^+(\nu)]^{-1},\quad K^-(\nu)=-(\nu+1)(\nu+2)\,[K^+(-\nu-3)]^{-1} \tag{1.17}$$

$$K^+(\nu)=(\nu+2)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\mu_{k1}}\right)\exp\left(\frac{-\mu}{\delta_{k1}}\right)\left[\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{\mu_{k2}}\right)\exp\left(\frac{-\mu}{\delta_{k2}}\right)\right]^{-1} \tag{1.18}$$

$$\mu=\nu+{}^3/_2,\qquad \mu_{k1}=\nu_{k1}+{}^3/_2,\qquad \mu_{k2}=\nu_{k2}+{}^3/_2$$

Здесь ν_{k1} и ν_{k2} — нули функций $D_1(\nu)$ и $D_2(\nu)$, расположенные в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\nu\geqslant-{}^3/_2$ и перенумерованные с учетом их кратности; δ_{k1} и δ_{k2} — произвольные последовательности чисел, обеспечивающие сходимость бесконечных произведений. Структура этих произведений такова, что функция $K^+(\nu)$ регулярна, не имеет нулей и положительна на вещественной оси в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\nu>-2-\varkappa$ ($\varkappa>0$, при $\theta_1\to\pi$ $\varkappa\to0$), функция $K^-(\nu)$ регулярна, не имеет нулей и отрицательна на вещественной оси в левой полуплоскости $\mathrm{Re}\,\nu<-2$. Вычислим функцию $K(-{}^3/_2)$ и определим ее знак.

Дифференцируя по ν тождество

$$(\nu+1)\,[P_{\nu+1}(x)-xP_\nu(x)]=\sin\theta P_\nu'(x)$$

получим рекуррентную формулу

$$\left[\frac{\partial P_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu=q}=\left\{\frac{\sin\theta}{q}\left[\frac{\partial P_\nu'(x)}{\partial\nu}-\frac{P_\nu'(x)}{q}\right]+x\frac{\partial P_\nu(x)}{\partial\nu}\right\}_{\nu=q-1} \tag{1.19}$$

из которой, учитывая, что $[dP_\nu(x)/d\nu]_{\nu=-{}^1/_2}=0$, имеем при $q={}^1/_2$

$$\left[\frac{\partial P_\nu(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu={}^1/_2}=-4\sin\theta P_{-{}^1/_2}'(x),\qquad \left[\frac{\partial P_\nu'(x)}{\partial\nu}\right]_{\nu={}^1/_2}=-\sin\theta P_{-{}^1/_2}(x)$$

Используя эти равенства и тождество $P_{-\nu-1}(x)=P_\nu(x)$, получим

$$K(-{}^3/_2)=\frac{GD_2^*(-{}^3/_2)}{2(1-\sigma)\,[P_{{}^1/_2}'(x)]^2} \tag{1.20}$$

$$D_2^*(-{}^3/_2)=\frac{\partial D_2(\nu)}{\partial\nu}\bigg|_{\nu=-{}^3/_2}=4(\sigma-1)P_{{}^1/_2}(x_1)P_{{}^1/_2}'(x_1)+$$

$$+(\sigma-{}^7/_8)\sin\theta_1\,[P_{{}^1/_2}(x_1)P_{-{}^1/_2}(x_1)-4P_{-{}^1/_2}(x_1)P_{{}^1/_2}'(x_1)]+4(\sigma-1)\operatorname{ctg}\theta_1\,[P_{{}^1/_2}'(x_1)]^2$$

Покажем, что функция $K(-{}^3/_2)$ строго положительна в интервале $0<\theta_1<\pi$. Очевидно, функции в ее числителе и знаменателе непрерывны и последняя в силу соотношения

$$P_{{}^1/_2}'(x)=-{}^3/_8\sin\theta F({}^1/_2,{}^5/_2;\ 2;\ \sin^2\theta/2)<0,\quad 0<\theta<\pi$$

отлична от нуля. Допустим в точке $\theta_1=\theta^\circ_1 D_2^*(-{}^3/_2)=0$. Тогда в этой точке разложение

$$D_2(\nu)\equiv i\mu D_2^*(-{}^3/_2)\prod_{k=1}^{\infty}(1-\mu^2/\mu_{k2}{}^2)\equiv0$$

противоречит, например, тождеству

$$D_2(0)=6(1-\sigma)(1-2\sigma)\ \sin\ 2\theta_1^\circ$$

Таким образом, функция $K(-{}^3/_2)$ непрерывна и не обращается в нуль на $(0, \pi)$. Поскольку она положительна в точке $\theta_1 = {}^1/_2\pi$, где

$$K(-{}^3/_2) = G[4\pi(1-\sigma)]^{-1} \quad [P_{1/_2}{}'(0)]^{-2}$$

она положительна всюду на $(0, \pi)$.

Чтобы выбрать последовательности δ_{k1} и δ_{k2} и оценить рост функции $K^+(\nu)$ на бесконечности, изучим распределение больших нулей ν_{k1} и ν_{k2}.

Нули функции $D_1(\nu)$ являются собственными значениями задачи Штурма — Лиувилля для уравнений $(m = 1,2)$

$$(\sin \theta y')' + \lambda_m \sin\theta y = 0, \quad \lambda_1 = \nu(\nu+1), \quad \lambda_2 = (\nu+2)(\nu+3)$$

с граничным условием $y' = 0$ при $\theta = \theta_1$. Они вещественны, асимптотика положительных нулей имеет вид

$$\mu_{k1}^{(1)} = 1 + (k + {}^1/_4)\pi\theta_1^{-1} + O(k^{-1}), \quad \mu_{k1}^{(2)} = \mu_{k1}^{(1)} - 2 \qquad (\mu_{k1}^{(m)} = \nu_{k1}^{(m)} + {}^3/_2) \tag{1.21}$$

Большие нули функции $D_2(\nu)$ в правой полуплоскости лежат вблизи нулей ее основной части $D_3(\nu)$. Функцию $D_3(\nu)$ выделим при помощи асимптотического разложения

$$P_\nu{}^m(x) = \Gamma(\nu + m + 1)\,[\Gamma(\nu + {}^3/_2)]^{-1}\,({}^1/_2 \;\pi\; \sin\;\theta)^{-1/_2}\{\cos[(\nu + {}^1/_2)\theta$$

$$- {}^1/_4\pi + {}^1/_2 m\pi] + O(\nu^{-1})\} \tag{1.22}$$

Подставив (1.22) в (1.16), получим

$$D_2(\nu) = N(\nu)[D_3(\nu) + D_4(\nu)]$$

где $N(\nu)$ — отношение гамма-функций, не имеющее нулей при $\mathrm{Re}\nu > -{}^3/_2$,

$$D_3(\nu) = \mu \sin 2\theta_1 - \cos\;(2\theta_1\mu) \tag{1.23}$$

$$D_4(\nu) = D_3(\nu)\,O(\nu^{-1}) + 2(\sigma - 1)\left\{\frac{2\mu(\nu+3)\operatorname{ctg}\theta_1}{(\nu+1)(\nu+2)^3}[\cos 2\theta_1 - \sin(2\theta_1\mu) + \frac{1}{2}\sin 2\theta_1 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\nu+3}[\cos(2\theta_1\mu) + \sin 2\theta_1] - \frac{(\nu+3)}{(\nu+2)^2}[\cos(2\theta_1\mu) - \sin 2\theta_1]\right\}[1 + O(\nu^{-1})] \tag{1.24}$$

Пусть $(n_k - {}^3/_2)$ — нуль функции $D_3(\nu)$, т. е.

$$n_k \sin\; 2\theta_1 - \cos\;(2\theta_1 n_k) = 0 \tag{1.25}$$

Опишем окружность γ_k радиуса $h_k = |\,n_k\,|^{-1} \ln |\,n_k\,|$ и с центром в n_k.

В силу (1.25) на этой окружности имеем

$$D_3(n_k - {}^3/_2 + h_k e^{i\psi}) = e^{i\psi}[4\theta_1^2 h_k^2 e^{i\psi} n_k \sin 2\theta_1 + 2\theta_1 h_k n_k \sin 2\theta_1 +$$

$$+ h_k \sin 2\theta_1] + n_k O(h_k^3)$$

Отсюда за счет второго слагаемого в скобках $\min |D_3(\gamma_k)| = O(\ln |\,n_k|)$, за счет содержимого фигурных скобок в выражении (1.24) $\max |D_4(\gamma_k)| = O(1)$.

Так как $|D_3(\gamma_k)| > |D_4(\gamma_k)|$, по теореме Руше внутри окружностей γ_k число нулей у функций $D_3(\nu)$ и $D_2(\nu)$ одинаково, и, следовательно

$$\mu_{k2} = n_k + O(|\,n_k\,|^{-1} \ln |\,n_k\,|), \quad \mathrm{Re}\,\mu_{k2} > 0 \tag{1.26}$$

При $\theta_1 \neq {}^1/_2\,\pi$ число первых вещественных нулей функции $D_2(\nu)$ конечно, поэтому большими всегда можно считать комплексные нули. Следуя [3], положим $n_k = \alpha_k + i\beta_k$ и запишем уравнение (1.25) в виде системы

$$\alpha_k \sin 2\theta_1 = \cos(2\theta_1\alpha_k)\operatorname{ch}(2\theta_1\beta_k) \tag{1.27}$$

$$\beta_k \sin 2\theta_1 = \sin(2\theta_1\alpha_k)\operatorname{sh}(2\theta_1\beta_k) \tag{1.28}$$

При $0 < \theta_1 < {}^1/_2\pi$, $\alpha_k > 0$ и $\beta_k > 0$ из (1.27) и (1.28) получим $\cos(2\theta_1\alpha_k) > 0$, $\sin(2\theta_1\alpha_k) > 0$, значит, $2\pi_k > 2\theta_1\alpha_k < (2k+{}^1/_2)\pi$. Из (1.27) при $\alpha_k \to \infty$ имеем $\beta_k \to \infty$, следовательно, из (1.28) $\sin(2\theta_1\alpha_k) \to 0$ при $\alpha_k \to \infty$ и $\alpha_k = k\pi\theta_1^{-1} + \varepsilon_k$ ($\varepsilon_k > 0$). Из уравнения (1.27) находим

$$\beta_k = (2\theta_1)^{-1} \ln[2k\pi\theta_1^{-1} \sin 2\theta_1] + \varepsilon_k^*$$

Величины ε_k и ε_k^* имеют порядки $O(k^{-1}\ln k)$, учитывая асимптотику (1.26), получим

$$\mu_{k2}^{(1)} = k\pi\theta_1^{-1} + i(2\theta_1)^{-1} \ln(2k\pi\theta_1^{-1} \sin 2\theta_1) + O(k^{-1}\ln k) \tag{1.29}$$

В случае конической выемки, т. е. при ${}^1/_2\,\pi < \theta_1 < \pi$ аналогичные рассуждения дают

$$\mu_{k2}^{(1)} = \frac{(2k+1)\pi}{2\theta_1} + \frac{i}{2\theta_1}\ln\left[-\frac{(2k+1)\pi}{\theta_1}\sin 2\theta_1\right] + O(k^{-1}\ln k) \tag{1.30}$$

Сопряженные нули в правой полуплоскости обозначим через $\nu_{k2}^{(2)}$, как и раньше $\mu_{2k}^{(1)} = \nu_{k2}^{(1)} + {}^3/_2$, $\mu_{k2}^{(2)} = \nu_{k2}^{(2)} + {}^3/_2$. При $\theta_1 \to {}^1/_2\,\pi$ сопряженные нули переходят в вещественные кратные, а затем расходятся в простые. Для определенности можно считать тогда $\mu_{k2}^{(1)} > \mu_{k2}^{(2)}$.

Покажем, что у функции $D_2(\nu)$ нет других нулей. Оценим рост функций $D_3(\nu)$ и $D_4(\nu)$ вдоль замкнутого контура, составленного из четырех отрезков

$$|\,\mathrm{Im}\nu\,| \leqslant (2\theta_1)^{-1}\ln|\,4k\pi\theta_1^{-1}\sin 2\theta_1\,|, \qquad \mathrm{Re}\,\mu = \pm(k+{}^1/_4)\,\pi\theta_1^{-1} \tag{1.31}$$

$$|\,\mathrm{Re}\mu\,| \leqslant (k+{}^1/_4)\pi\theta_1^{-1}, \quad \mathrm{Im}\,\nu = \pm(2\theta_1)^{-1}\ln|\,4\;k\pi\theta_1^{-1}\;\sin 2\theta_1| \tag{1.32}$$

На вертикальных отрезках (1.31)

$$|\,D_3(\nu)\,| \geqslant |\,\mathrm{Re}D_3(\nu)\,| = (k+{}^1/_4)\;\pi\theta_1^{-1}\;\sin\;2\theta_1$$

В точках $\mathrm{Re}\;\mu = \alpha$ горизонтальных отрезков (1.32), учитывая условие $|\,\theta_1\alpha\,| < (k+1)\pi$, получим

$$|\,D_3(\nu)\,|^2 = \theta_1^{-2}\sin 2\theta_1[\theta_1^2\alpha^2 + 4\;k^2\pi^2 - 4\alpha k\pi\;\cos(2\theta_1\alpha)] - O(k\;\ln k) \geqslant \theta_1^{-2}\;\sin\;2\theta_1$$
$$(|\,\theta_1\alpha\,| - 2k\pi)^2 - O(k\ln k) = O(k^2)$$

Из (1.24) видно, что модуль функции $D_4(\nu)$ на вертикальных отрезках имеет порядок $O(1)$, а на горизонтальных отрезках растет как $O(k/\ln k)$. Таким образом, на всем выбранном контуре $|\,D_3(\nu)\,| > |\,D_4(\nu)\,|$, и, следовательно, по теореме Руше внутри достаточно больших прямоугольников содержится одинаковое число нулей функций $D_3(\nu)$ $N(\nu)$ и $D_2(\nu)$. В полуплоскости $\mathrm{Re}\nu > -{}^3/_2$ между модулями двух последовательных нулей функции $D_3(\nu - {}^3/_2)$ находится модуль нуля функции $D_3(-\nu - {}^3/_2)$, а нули функции $D_2(\nu)$ расположены симметрично относительно $\nu = -{}^3/_2$. Отсюда и из предыдущего заключения следует, что при больших ν в правой половине прямоугольника, где справедлива асимптотическая формула (1.26), функции $D_2(\nu)$ и $D_3(\nu)N(\nu)$ имеют равное с точностью до одного число нулей, и что формулы (1.29), (1.30) являются исчерпывающими.

В каждое бесконечное произведение (1.18) введем согласно (1.21), (1.29) две группы нулей и две последовательности $\delta_{k1}^{(1)} = \delta_{k1}^{(2)} = \delta_{k2}^{(1)} = \delta_{k2}^{(2)} = k\pi\theta_1^{-1}$. При этом общий член ряда, сходящегося вместе со вторым произведением, приобретает вид

$$u_k = \frac{\mu}{\mu_{k2}^{(1)}} - \frac{\mu\theta_1}{k\pi} = \frac{\mu\,[O(\ln k) + O(k^{-1}\ln k)]}{[k\pi\theta_1^{-1} + iO(\ln k)]\,k\pi} = \mu O(k^{-2}\ln k)$$

для первого произведения $u_k = \mu O(k^{-2})$. Итак, оба произведения абсолютно сходятся, формула (1.18) принимает вид

$$K^+(\nu) = Q(\nu)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\mu}{\mu_{k1}^{(1)}}\right)\left(1 + \frac{\mu}{\mu_{k1}^{(2)}}\right)\left(1 + \frac{\mu}{\mu_{k2}^{(1)}}\right)^{-1}\left(1 + \frac{\mu}{\mu_{k2}^{(2)}}\right)^{-1} \tag{1.33}$$

Здесь функция $Q(\nu)$ учитывает возможный сдвиг номеров нулей в асимптотических формулах (1.21), (1.29) и (1.30) относительно их истинных номеров.

Для исследования роста функции $K^+(\nu)$ воспользуемся приемом И. Г. Альперина [3,4]. Введем три абсолютно сходящихся произведения

$$M_s = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{\mu}{a_1k+b_s}\right)\exp\left(\frac{-\mu}{a_1k}\right)=\frac{\Gamma(b_sa_1^{-1}+1)\exp(-\gamma\mu a_1^{-1})}{\Gamma(\mu a_1^{-1}+b_sa_1^{-1}+1)} \quad (s=1,\ 2,\ 3) \qquad (1.34)$$

в которых положим

$$b_1 = 0 \text{ при } \theta_1 < {}^1/_2\pi, \quad b_1 = \pi(2\theta_1)^{-1} \text{ при } \theta_1 > {}^1/_2\,\pi \qquad (1.35)$$

$$b_2 = -1 + \pi(4\theta_1)^{-1}, \quad b_3 = 1 + \pi(4\theta_1)^{-1}, \quad a_1 = \pi\theta_1^{-1} \text{ при } 0 < \theta_1 < \pi$$

Обозначим $c_{ks} = a_1k + b_s$ и представим (1.33) в виде

$$K^+(\nu) = Q(\gamma)\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\mu_{k2}^{(1)}\mu_{k2}^{(2)}}{c_{k1}^2}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{c_{k2}c_{k3}}{\mu_{k1}^{(1)}\mu_{k1}^{(2)}}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(c_{k1}+\mu)^2}{(\mu_{k2}^{(1)}+\mu)(\mu_{k2}^{(2)}+\mu)}\prod_{k=1}^{\infty}\frac{(\mu_{k1}^{(1)}+\mu)(\mu_{k1}^{(2)}+\mu)}{(c_{k2}+\mu)(c_{k3}+\mu)}\times$$
$$\times\frac{M_2M_3}{M_1^2} \qquad (1.36)$$

Первое и второе бесконечные произведения абсолютно сходятся, поскольку k-е члены соответствующих рядов имеют порядки $O(k^{-2}\ln^2 k)$ и $O(k^{-2})$. Третье произведение сходится абсолютно и равномерно в правой полуплоскости $\operatorname{Re}\nu > -2-\varkappa$, так как в силу неравенств

$$|k\pi\theta_1^{-1}+\mu| > k\pi\theta_1^{-1}-2, \quad |k\pi\theta_1^{-1}+\mu| > |\mu+2|-2$$

для него имеем

$$|u_k| = \frac{|kO(k^{-1}\ln k)+\mu O(k^{-1}\ln k)}{|k\pi\theta_1^{-1}+\mu|^2} < \frac{O(\ln k)}{(k\pi\theta_1^{-1}-2)^2}+\frac{O(k^{-1}\ln k)}{k\pi\theta_1^{-1}-2}+O(k^{-3}\ln k)=$$
$$=O(k^{-2}\ln k)$$

Аналогичным путем оценивается четвертое произведение, для которого $|u_k| = O(k^{-2})$. Нетрудно показать, что в силу равномерной сходимости последних двух произведений во всей правой полуплоскости их предел при $\nu\to\infty$ равен единице. В результате рассмотренную первую часть выражения (1.36) можно отнести к функции $Q(\nu)$.

Оценим вторую часть. Используя асимптотическую формулу

$$\frac{\Gamma(\mu+a)}{\Gamma(\mu+b)}=\mu^{a-b}\left[1+\frac{1}{2\mu}(a-b)(a+b-1)+O(\mu^{-2})\right]$$

согласно (1.34) и (1.35) при $\theta_1 < {}^1/_2\,\pi$ получим

$$\frac{M_2M_3}{M_1^2}=\frac{\Gamma({}^5/_4-\theta_1\pi^{-1})\,\Gamma({}^5/_4+\theta_1\pi^{-1})\,\Gamma^2(1+\mu\theta_1\pi^{-1})}{\Gamma({}^1/_4-\theta_1\pi^{-1}+\mu\theta_1\pi^{-1})\,\Gamma(\mu\theta_1\pi^{-1}+\theta_1\pi^{-1}+{}^5/_4)\,\Gamma^2(1)}=$$
$$=\mu^{-1/2}[O(1)+O(\mu^{-1})]$$

при $\theta_1 > {}^1/_2\pi$ это отношение имеет порядок $O(\mu^{1/2})$. Остается определить величину $Q(\nu)$. Подставим в (1.16) $\nu = -{}^3/_2 + i\beta$ и заменим функции Лежандра асимптотикой (1.22). После некоторых преобразований получим для больших значений β

$$K(-{}^3/_2+i\beta)=\frac{3G\beta}{2(1-\sigma)}+O(1) \qquad (1.37)$$

С другой стороны, при $\theta_1 < {}^1/_2\,\pi$ из (1.17) и (1.36)

$$[K(-{}^3/_2)(\beta^2+{}^1/_4)]^{-1}K(-{}^3/_2+i\beta)=[K^+(-{}^3/_2+i\beta)K^+(-{}^3/_2-i\beta)]^{-1}=$$
$$=|\sqrt{\beta^2+{}^9/_4}\,|\,Q^{-2}\,|+O(1) \qquad (1.38)$$

Сравнивая (1.37) и (1.38) находим $Q(\nu)$ и получаем из (1.36)

$$K^+(\nu)=\frac{\sqrt{2(1-\sigma)K(-{}^3/_2)\nu}}{\sqrt{3G}}+O(1) \tag{1.39}$$

При $\theta_1>{}^1/_2\,\pi$ тем же путем снова приходим к формуле (1.39).

Вернемся к уравнению Винера — Хопфа (1.14)

$$\sigma^+(\nu)K^+(\nu)=K(-{}^3/_2)u^-(\nu)K^-(\nu) \tag{1.40}$$

Так как его левая и правая части регулярны в полуплоскостях, имеющих общую полосу $-2-\varkappa<\operatorname{Re}\nu<-2$, функция $J(\nu)$, введенная равенством

$$J(\nu)=\sigma^+(\nu)K^+(\nu)=u^-(\nu)K^-(\nu)K(-{}^3/_2) \tag{1.41}$$

регулярна в плоскости ν. Исследуем ее поведение на бесконечности. Воспользуемся соотношениями, связывающими асимптотики функции и ее преобразования Меллина

$$\begin{aligned}&\text{если } \sigma_\theta\sim A(1-r)^\eta \quad \text{при } r\to1-0, \text{ то}\\
&\sigma^+(\nu)\sim A\Gamma(\eta+1)\nu^{-\eta-1} \quad \text{при } \nu\to\infty,\ \operatorname{Re}\nu>-2-\varkappa\\
&\text{если } u_\theta\sim A(r-1)^\eta \quad \text{при } r\to1+0, \text{ то}\\
&u^-(\nu)\sim A\Gamma(\eta+1)\nu^{-\eta-1} \quad \text{при } \nu\to\infty,\ \operatorname{Re}\nu<-2\end{aligned} \tag{1.42}$$

Подставив в (1.41) оценку (1.39) и оценки (1.42) при условиях (1.5), (1.6), получим

$$J(\nu)=O(\nu^{1/2-\varepsilon_1}) \quad \text{при } \nu\to\infty,\ \operatorname{Re}\nu>-2-\varkappa$$

$$J(\nu)=O(\nu^{1/2-\varepsilon_2}) \quad \text{при } \nu\to\infty,\ \operatorname{Re}\nu<-2$$

Считая $\varepsilon_1\leqslant{}^1/_2$, $\varepsilon_2\leqslant{}^1/_2$ (в противном случае решение будет нулевым) в силу обобщенной теоремы Лиувилля получим $J(\nu)=C$ и, следовательно, из (1.41).

$$\sigma^+(\nu)=C[K^+(\nu)]^{-1} \tag{1.43}$$

По формулам (1.8)—(1.10), (1.13) и по теореме обращения Меллина перемещения и напряжения выражаются в виде

$$u_r=\frac{1}{4\pi Gi}\int_L E(\nu)\,[(\nu+1)\,t_2P'_{\nu+2}(x_1)\,P_\nu(x)- \tag{1.44}$$

$$-(\nu+2)^2(\nu+5-4\sigma)\,P'_\nu(x_1)\,P_{\nu+2}(x)]\,r^{-\nu-2}\,d\nu$$

$$u_\theta=-\frac{1}{4\pi Gi}\int_L E(\nu)\,[t_2P'_{\nu+2}(x_1)\,P'_\nu(x)-(\nu+2)\,tP'_\nu(x_1)\,P'_{\nu+2}(x)]\,r^{-\nu-2}\,d\nu$$

$$\sigma_\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_L E(\nu)\,\{t_2P'_{\nu+2}(x_1)\,[(\nu+1)^2P_\nu(x)+\operatorname{ctg}\theta P'_\nu(x)]-$$

$$-(\nu+2)\,P'_\nu(x_1)\,[(\nu+2)\,t_1P_{\nu+2}(x)+t\operatorname{ctg}\theta P'_{\nu+2}(x)]\}\,r^{-\nu-3}\,d\nu$$

$$\tau_{r\theta}=\frac{1}{2\pi i}\int_L E(\nu)\,(\nu+2)\,t_2\,[P'_{\nu+2}(x_1)\,P'_\nu(x)-P'_\nu(x_1)\,P'_{\nu+2}(x)]\,r^{-\nu-3}\,d\nu$$

$$\sigma_r=-\frac{1}{2\pi i}\int_L E(\nu)\,(\nu+2)\,\{(\nu+1)\,t_2\,P'_{\nu+2}(x_1)\,P_\nu(x)-$$

$$-(\nu+2)\,[(\nu+3)(\nu+4)-2(1+\sigma)]\,P'_\nu(x_1)\,P_{\nu+2}(x)\}\,r^{-\nu-3}\,d\nu$$

$$\sigma_\varphi+\sigma_\theta=\frac{1}{2\pi i}\int_L E(\nu)\,(\nu+2)\,\{(\nu+1)\,t_2P'_{\nu+2}(x_1)\,P_\nu(x)-$$

$$-(\nu+2)\,[\nu(\nu+3)+4-4\sigma(\nu+2)]\,P'_\nu(x_1)\,P_{\nu+2}(x)\}\,r^{-\nu-3}\,d\nu$$

$$E(\nu)=Ct[K^+(\nu)D_2(\nu)]^{-1}$$

При интегрировании L проходит в положительном направлении вдоль прямой $\operatorname{Re}\nu = \varkappa_0 (-\varkappa - 2 < \varkappa_0 < -2)$.

Постоянную C определим из условия равновесия. Рассмотрим главный вектор напряжений на сферической поверхности $r = \rho > 1$. В выражениях (1.44) замкнем контур L системой полуокружностей γ_k, проходящих между нулями функции $D_2(\nu)$ в правой полуплоскости. По лемме Жордана интегралы на γ_k с увеличением k стремятся к нулю. Следовательно, по теореме Коши напряжения при $r > 1$ выражаются в виде суммы вычетов с обратным знаком в нулях ν_{k2}. Так как величина главного вектора не зависит от ρ, проникающие на бесконечность напряжения будут убывать как $O(r^{-2})$, и каждый вычет, кроме может быть вычета в точке $\nu = -1$, даст самоуравновешенные однородные напряжения. Учитывая, что число $\nu = -1$ является простым нулем всех числителей подынтегральных функций (1.44) и двукратным нулем функции $D_2(\nu)$ в их знаменателях и используя для раскрытия соответствующих неопределенностей рекуррентную формулу (1.19) и тождества

$$\frac{\partial}{\partial \nu} P_\nu'(x)\,\Big|_{\nu=-1} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial \nu} P_\nu(x)\,\Big|_{\nu=0} = 2\ln\cos\frac{\theta}{2}$$

получим перемещения и напряжения на бесконечности

$$2Gu_r = B\left[\frac{4(1-\sigma)}{1-2\sigma}\cos\theta - 1 - \cos\theta_1\right] r$$

$$2Gu_\theta = B\sin\theta\left[\frac{1+\cos\theta_1}{1+\cos\theta} - \frac{3-4\sigma}{1-2\sigma}\right] r$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{B\sin\theta(\cos\theta - \cos\theta_1)}{1+\cos\theta}, \qquad \sigma_r = B\left[1+\cos\theta_1 - \frac{4-2\sigma}{1-2\sigma}\cos\theta\right]$$

и т. д., где

$$B = \frac{C(1-2\sigma)\sin\theta_1}{K^+(-1)\,D_2^{**}(-1)\,(1+\cos\theta_1)\,r^2} \tag{1.45}$$

$$D_2^{**}(-1) = 2\sin\theta_1\left[(1-2\sigma) - \frac{2(1-\sigma)}{1+\cos^2\theta_1}\right] \tag{1.46}$$

Выписанные формулы с точностью до множителя B совпадают с решением Митчела [5] для упругого конуса, сжимаемого в вершине осевой силой T. Сравнивая постоянную Митчела,

$$B = \frac{T(1-2\sigma)}{2\pi r^2\left[1-\cos^3\theta_1 - (1-2\sigma)\cos\theta_1(1-\cos\theta_1)\right]}$$

с выражением (1.45), находим

$$C = \frac{T(1+\cos\theta_1)\,K^+(-1)\,D_2^{**}(-1)}{4\pi\sin\theta_1\left[1-\cos^3\theta_1 - (1-2\sigma)\cos\theta_1(1-\cos\theta_1)\right]} \tag{1.47}$$

В точке $\nu = -2$ подынтегральные функции в выражениях (1.44) для напряжений имеют устранимые особенности. Подынтегральные функции для перемещений в этой точке имеют простой полюс, порождаемый простым нулем числителей и двукратным нулем знаменателей. Вычисляя вычеты теми же средствами, что и в точке $\nu = -1$, получим постоянные перемещения на бесконечности

$$-\frac{u_\theta}{\sin\theta} = \frac{u_r}{\cos\theta} = \frac{2(1-\sigma)\,C\sin\theta_1}{G(1+\cos\theta_1)\,K^+(-2)\,D_2^{**}(-2)}, \qquad D_2^{**}(-2) = -D_2^{**}(-1) \tag{1.48}$$

В решении (1.44) перемещения угловой точки конуса равны нулю. Поэтому формула (1.48) дает величину осевого перемещения штампа (обоймы) под действием силы T

$$u_0 = -\frac{2C(1-\sigma)\sin\theta_1}{G(1+\cos\theta_1)\,K^+(-2)\,D_2^{**}(-2)} \tag{1.49}$$

при условии равенства нулю перемещений на бесконечности.

Исследуем некоторые зоны контакта. Найдем распределение нормальных напряжений под краем штампа (обоймы). Согласно граничному условию (1.3) и выражениям (1.11), (1.9), (1.43), (1.39) имеем

$$\sigma^+(\nu) = \sigma(\nu, \theta_1) = C[K^+(\nu)]^{-1} \sim \frac{C\sqrt{3G}}{\sqrt{2(1-\sigma)K(-{}^3/_2)\nu}} \quad \text{при} \quad \nu \to \infty$$

Отсюда и из утверждения обратного (1.42) следует

$$\sigma_\theta \sim \frac{C\sqrt{3G}}{\sqrt{2\pi(1-\sigma)K(-{}^3/_2)(1-r)}} \quad \text{при } \theta = \theta_1,\ r \to 1-0 \tag{1.50}$$

Определим форму свободной поверхности упругого тела у края штампа (обоймы). Из (1.42) при $\theta = \theta_1$ получим

$$u_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Cd\nu}{K^-(\nu)K(-{}^3/_2)r^{\nu+2}} \tag{1.51}$$

Контур L проходит здесь слева от полюсов подынтегральной функции. Поэтому можно сделать замену $v = (\nu + 2)\ln r$, не распространяя ее на L, а взяв за путь интегрирования L_1 в плоскости v независимо от величины r прямую $Re\, v = -1$. На L_1 при достаточно малом $(r-1) > 0$ модуль ν будет сколь угодно большим, и функцию $K^-(\nu)$ можно заменить ее асимптотикой (1.17), (1.39). В результате из (1.51) получим

$$u_\theta \sim \frac{C\sqrt{2(1-\sigma)(r-1)}}{2\pi\sqrt{3GK(-{}^3/_2)}}\int\limits_L \frac{e^{-v}dv}{v\sqrt{v}} \tag{1.52}$$

Контур L_1 по теореме Коши и лемме Жордана заменим контуром L_2, состоящим из двубережного разреза по положительной полуоси и окружности $|v| = {}^1/_2$. Воспользовавшись теперь ханкелевским представлением гамма-функции

$$(e^{2\pi i\psi} - 1)\Gamma(\psi) = \int\limits_{L_2} e^{-v}v^{\psi-1}dv \qquad (\psi \neq 0, -1, \ldots)$$

получим значение интеграла в (1.52), равное $4\sqrt{\pi}$ и формулу для нормального перемещения

$$u_\theta \sim -C\sqrt{\frac{8(1-\sigma)(r-1)}{3\pi G K(-{}^3/_2)}} \qquad \text{при } \theta = \theta_1,\ r \to 1+0 \tag{1.53}$$

Определим напряжения в вершине конуса. Решение (1.44) представим в рядах по вычетам, взятым в нулях функции $D_1(\nu)$, лежащих в полуплоскости $\mathrm{Re}\,\nu < -2$. Согласно (1.15) и равенствам

$$P_\nu'(x_1) \sim -{}^1/_2\nu(\nu+1)\sin\theta_1 \text{ при } x_1 \to 1,\ P_{-2}'(x_1) = -\sin\theta_1,$$

$$P_{-3}'(x_1) = -{}^3/_2\sin 2\theta_1$$

при $\theta_1 > {}^1/_2\pi$ первый нуль ν_1 находится в интервале $(-3, -2)$, при $\theta_1 < {}^1/_2\pi$ $\nu_1 = -3$. В первом случае напряжения около вершины штампа бесконечны, во втором — конечны

$$\sigma_\theta = Cr^{-\nu-3}\partial K^+(\nu)/\partial\nu\,|_{\nu=\nu_1} \quad \text{при } \theta_1 > {}^1/_2\pi,\ r \to 0$$

$$\sigma_\theta = \sigma_r = \frac{2CG(1+\sigma)\sin\theta_1}{3(\sigma-1)K(-{}^3/_2)K^-(-3)(1-\cos\theta_1)} \quad \text{при } \theta_1 < {}^1/_2\pi,\ r \to 0 \tag{1.54}$$

Так как $K^+(-2) > 0$, при $\nu = \nu_1$ $dK^+(\nu)/d\nu > 0$. Из неравенств $K_*^+(-1) > 0$ и $D_2^{**}(-1) < 0$ следует, что $C < 0$ при $T > 0$. Учитывая эти знаки, а также знаки функций $K(-{}^3/_2) > 0$ и $K^-(-3) < 0$ из формул (1.50) и (1.54) получаем $\sigma_\theta < 0$, т. е. под краем штампа и в вершине конуса возникают сжимающие напряжения. Вопрос о характере нормальных напряжений в остальной части контактной поверхности остается открытым, хотя интуитивно представляется, что упругий конус везде плотно прилегает к обойме, и решение фактически реализуется.

§ 2. В случае полупространства ($\theta_1 = {}^1/_2\pi$) функция $K(\nu)$ принимает вид

$$K(\nu) = -\frac{G(1+\nu)(2+\nu)\,\Gamma(-{}^1/_2\nu)\,\Gamma({}^3/_2+{}^1/_2\nu)}{2(1-\sigma)\,\Gamma(2+{}^1/_2\nu)\,\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2\nu)}$$

и вместо (1.17) целесообразно сделать другую, более простую факторизацию

$$K(\nu) = \frac{K^-(\nu)}{K_*^+(\nu)}, \qquad K^+(\nu) = \frac{\Gamma(2+{}^1/_2\nu)}{\Gamma({}^3/_2+{}^1/_2\nu)}, \qquad K^-(\nu) = -\frac{G(1+\nu)(2+\nu)\,\Gamma(-{}^1/_2\nu)}{2(1-\sigma)\,\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2\nu)} \tag{2.1}$$

При этом формулы предыдущего параграфа остаются верными, нужно лишь полагать в них $K(-{}^3/_2) = 1$. Вычислив, например, по (1.46), (2.1) (1.47) функции

$$D_2^{**}(-2) = 2, \quad K^+(-2) = \pi^{-1/2}, \qquad C = -T[4\sqrt{\pi}]^{-1}$$

и подставив их в (1.49), получим известную формулу заглубления плоского кругового штампа в упругое полупространство

$$u_0 = T(1-\sigma)\,[4\pi G]^{-1}$$

Из выражений (1.44) нетрудно найти также распределение нормальных напряжений под штампом

$$\sigma_\theta = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{Tr^{-\nu-3}\,d\nu}{4\sqrt{\pi}K^+(\nu)} = \frac{T}{8i\sqrt{\pi}}\int\limits_L \frac{r^{-\nu-3}\,d\nu}{\cos({}^1/_2\pi\nu)\,\Gamma(2+{}^1/_2\nu)\,\Gamma({}^1/_2-{}^1/_2\nu)} =$$

$$= -\frac{T}{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(ir)^k P_k(0) = -\frac{T}{2\pi\sqrt{1-r^2}}$$

В заключение автор выражает благодарность Я. С. Уфлянду за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 15 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутман С. Г. Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах. Докл. АН СССР, 1947, т. 58, № 6.
2. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Альперин И. Г. Напряжения в бесконечной полосе, равномерно сжатой по половине длины. Уч. зап. Харьковск. ун-та им. М. Горького, 1950, т. 20.
4. Коган Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму. Прикл. матем. и механ. 1956, т. 20, № 2.
5. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.