УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПЛИТЫ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

Ц. А. Готлиб, В. К. Прокопов

(Ленинград)

Для получения дифференциальных уравнений равновесия плиты переменной толщины и краевых условий в работе используется символический метод А. И. Лурье [1] и принцип минимума потенциальной энергии. Рассматриваются прямоугольные плиты и осесимметричная задача для круглой плиты. Для плиты постоянной толщины уравнения равновесия и краевые условия (в декартовых координатах) были получены в работах [2,3].

1. Вывод уравнений равновесия плиты в декартовых координатах. Пусть u_0 v_0, w_0 — перемещения точек некоторой начальной плоскости $z = 0$, а u_0', v_0', w_0' — значения производных от перемещений по координате z на этой плоскости; тогда [1]

$$\begin{aligned} u &= cu_0 - \frac{mzs\partial_1\vartheta_0}{2(m-2)} + su_0' - \frac{m\lambda\partial_1\vartheta_0'}{4(m-1)} \\ v &= cv_0 - \frac{mzs\partial_2\vartheta_0}{2(m-2)} + sv_0' - \frac{m\lambda\partial_2\vartheta_0'}{4(m-1)} \\ w &= sw_0' + \frac{m\lambda\Delta\vartheta_0}{2(m-2)} + cw_0 - \frac{mzs\vartheta_0'}{4(m-1)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь [2]

$$c = \cos zD = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}\Delta^n}{(2n)!}, \qquad s = \frac{\sin zD}{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}\Delta^n}{(2n+1)!}$$

$$\lambda = \frac{s - zc}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+3}\Delta^n}{(2n+1)!\,(2n+3)}, \qquad \Delta = D^2 = \partial_1^2 + \partial_2^2 \tag{1.2}$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \vartheta_0 = \partial_1 u_0 + \partial_2 v_0 + w_0', \quad \vartheta_0' = \partial_1 u_0' + \partial_2 v_0' - \Delta w_0$$

Вариация удельной потенциальной энергии деформации плиты

$$\delta\pi = \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} \tag{1.3}$$

Выразим вариации деформаций через вариации основных переменных u_0, v_0, w_0, u_0', v_0', w_0', используя связь между перемещениями и деформациями и формулы (1.1.) Имеем, например,

$$\delta\varepsilon_x = c\partial_1\delta u_0 - \frac{mzs\partial_1^2}{2(m-2)}\delta\vartheta_0 + s\partial_1\delta u_0' - \frac{m\lambda\partial_1^2}{4(m-1)}\delta\vartheta_0' \tag{1.4}$$

Выражения для остальных вариаций деформаций здесь не приведены; их можно найти в статье [2] (формулы (1.2) и (2.1)).

Чтобы получить потенциальную энергию деформации плиты, надо удельную потенциальную энергию проинтегрировать по объему плиты, т. е. по толщине и площади основания плиты в плане. Интегрируем сначала по толщине; пусть верхняя и нижняя поверхности плиты заданы уравнениями $z = h_1(x, y)$ и $z = h_2(x, y)$. Тогда получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \int_{h_2}^{h_1} \sigma_x\delta\varepsilon_x dz &= \sum_{n=0}^{\infty} (T_x^{(n)}\partial_1\delta\chi_x^{(n)} + G_x^{(n)}\partial_1\delta\psi_x^{(n)}) \\ \int_{h_2}^{h_1} \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} dz &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{S^{(n)}\delta\,(\partial_1\chi_y^{(n)} + \partial_2\chi_x^{(n)}) + H^{(n)}\delta\,(\partial_1\psi_y^{(n)} + \partial_2\psi_x^{(n)})\right\} \\ \int_{h_2}^{h_1} \sigma_z\delta\varepsilon_z dz &= \sum_{n=0}^{\infty} (Z_j^{(n)}\delta\xi^{(n)} + Z_t^{(n)}\delta\varphi^{(n)}) \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь введены статические ($T_x^{(0)}$, $G_x^{(0)}$,...) и сверхстатические ($T_x^{(1)}$, $T_x^{(2)}$... ..., $G_x^{(1)}$, $G_x^{(2)}$,...) характеристики напряжений в соответствии с формулами (1.3),(1.4), (2.2) и (2.3) статьи [3]; величины $\chi_x^{(n)}$, $\chi_y^{(n)}$, $\xi^{(n)}$, $\psi_x^{(n)}$ $\psi_y^{(n)}$, $\varphi^{(n)}$ введены там же (см. формулы (1.6) и (2.5) статьи [3]). Заметим, что

$$\chi_x^{(0)} = u_0, \quad \chi_y^{(0)} = v_0, \quad \xi^{(0)} = w_0, \quad \psi_x^{(0)} = u_0', \quad \psi_y^{(0)} = v_0', \quad \varphi^{(0)} = w_0' \tag{1.6}$$

Сложим все интегралы типа (1.5), и проинтегрируем полученное выражение по площади основания плиты в плане Ω. При этом некоторые двойные интегралы по области Ω преобразуются в интегралы по контуру L, окружающему область Ω; таким образом

$$\begin{aligned}\delta\Pi = \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg\{\oint_{(L)}[(n_xT_x^{(n)} + n_yS^{(n)})\,\delta\chi_x^{(n)} + (n_yS^{(n)} + n_yT_y^{(n)})\,\delta\chi_y^{(n)} + (n_xN_x^{(n)} + n_yN_y^{(n)})\,\delta\xi^{(n)} +\\
+ (n_xG_x^{(n)} + n_yH^{(n)})\,\delta\psi_x^{(n)} + (n_xH^{(n)} + n_yG_y^{(n)})\,\delta\psi_y^{(n)} + (n_x\Gamma_x^{(n)} + n_y\Gamma_y^{(n)})\,\delta\varphi^{(n)}]\,ds -\\
- \iint_{(\Omega)}[(\partial_1T_x^{(n)} + \partial_2S^{(n)} + \Gamma_x^{(n-1)})\,\delta\chi_x^{(n)} + (\partial_1S^{(n)} + \partial_2T_y^{(n)} + \Gamma_y^{(n-1)})\,\delta\chi_y^{(n)} +\\
+ (\partial_1N_x^{(n)} + \partial_2N_y^{(n)} - Z_j^{(n-1)})\,\delta\xi^{(n)} + (\partial_1G_x^{(n)} + \partial_2H^{(n)} - N_x^{(n)})\,\delta\psi_x^{(n)} +\\
+ (\partial_1H^{(n)} + \partial_2G_y^{(n)} - N_y^{(n)})\,\delta\psi_y^{(n)} + (\partial_1\Gamma_x^{(n)} + \partial_2\Gamma_y^{(n)} - Z_i^{(n)})\,\delta\varphi^{(n)}]\,dxdy\Bigg\}\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$(\Gamma_x^{(-1)} = \Gamma_y^{(-1)} = Z_j^{(-1)} = 0)$$

Вычислим элементарную работу δA_1 внешних сил, приложенных к торцевым поверхностям плиты; обозначим через $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ векторы внешних сил, приходящихся на единицу площади верхней и нижней поверхностей плиты. Имеем

$$\delta A_1 = \iint_{(\Omega_1)}\mathbf{p}_1\cdot\delta\mathbf{u}_1 d\Omega_1 + \iint_{(\Omega_2)}\mathbf{p}_2\cdot\delta\mathbf{u}_2 d\Omega_2 \tag{1.8}$$

Здесь Ω_1 и Ω_2 — площади поверхностей верхнего и нижнего оснований плиты, а $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$ — векторы перемещений точек этих поверхностей. Далее

$$d\Omega_1 = \frac{dx\,dy}{\cos(z,\ \mathbf{n}_1)}, \qquad d\Omega_2 = \frac{dx\,dy}{|\cos(z,\ \mathbf{n}_2)|} \tag{1.9}$$

где $(z, \mathbf{n}_i)$— угол между осью z и внешней нормалью к поверхности $z = h_i(x,y)$ $(i = 1,2)$. Так как

$$|\cos(z,\ \mathbf{n}_i)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_1h_i)^2 + (\partial_2h_i)^2}} = \frac{1}{D_i\,(x,\ y)} \qquad (i=1,\ 2) \tag{1.10}$$

то, учитывая соотношения (1.9), (1.10), перепишем интегралы (1.8) в таком виде

$$\begin{aligned}\delta A_1 = \iint_{(\Omega)}[(p_{1x}\delta u_1 + p_{1y}\delta v_1 + p_{1z}\delta w_1)\,D_1\,(x,\ y) +\\
+ (p_{2x}\delta u_2 + p_{2y}\delta v_2 + p_{2z}\delta w_2)\,D_2\,(x,\ y)]\,dx\,dy\end{aligned} \tag{1.11}$$

Используя формулы (1.1), выразим вариации перемещений точек торцевых поверхностей плиты через вариации основных переменных $u_0, v_0, \ldots, w_0'$ и их производных и далее, вспоминая формулы, определяющие величины $\chi_x^{(n)}, \ldots, \varphi_x^{(n)}$, преобразуем элементарную работу торцевых сил (1.11) к следующему виду:

$$\begin{aligned}\delta A_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\iint_{(\Omega)}\Bigg\{\frac{(-1)^n}{(2n)!}[(h_1^{2n}D_1p_{1x} + h_2^{2n}D_2p_{2x})\,\delta\chi_x^{(n)} + (h_1^{2n}D_1p_{1y} + h_2^{2n}D_2p_{2y})\,\delta\chi_y^{(n)} +\\
+ (h_1^{2n}p_{1z}D_1 + h_2^{2n}D_2p_{2z})\,\delta\xi^{(n)}] + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}[(h_1^{2n+1}D_1p_{1x} + h_2^{2n+1}D_2p_{2x})\,\delta\psi_x^{(n)} +\\
+ (h_1^{2n+1}D_1p_{1y} + h_2^{2n+1}p_{2y}D_2)\,\delta\psi_y^{(n)} + (h_1^{2n+1}D_1p_{1z} + h_2^{2n+1}D_2p_{2z})\,\delta\varphi^{(n)}]\Bigg\}\,dx\,dy\end{aligned} \tag{1.12}$$

Переходим к вычислению элементарной работы внешних сил, приложенных к цилиндрической боковой поверхности. Обозначим силу, приходящуюся на единицу площади боковой поверхности, через $\mathbf{q}_n$; тогда элементарная работа этих сил на всей боковой поверхности выражается интегралом

$$\delta A_2 = \int_{h_2}^{h_1} dz \oint_{(L)} \mathbf{q}_n \cdot \delta \mathbf{u} ds = \int_{h_2}^{h_1} dz \oint_{(L)} (q_{nx}\delta u + q_{ny}\delta v + q_{nz}\delta w)\, ds \qquad (1.13)$$

Вводя статические и сверхстатические представления (1.1) при вычислении вариации перемещений, получим вместо выражения (1.13) следующий результат:

$$\delta A_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_{(L)} (R_x^{(n)}\delta\chi_x^{(n)} + R_y^{(n)}\delta\chi_y^{(n)} + Q^{(n)}\delta\xi^{(n)} - M_x^{(n)}\delta\psi_y^{(n)} +$$

$$+ M_y^{(n)}\delta\psi_x^{(n)} + W^{(n)}\delta\varphi^{(n)})\, ds \qquad (1.14)$$

Здесь $R_x^{(0)}, \ldots, M_y^{(0)}$ — статические, а $R_x^{(n)}, \ldots, W^{(n)}$ — сверхстатические характеристики распределения по толщине плиты боковой нагрузки, выражаемые формулами

$$R_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{h_2}^{h_1} q_{nx} z^{2n} dz, \qquad W^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{h_2}^{h_1} q_{nz} z^{2n+1} dz$$

$$-M_x^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_{h_2}^{h_1} q_{ny} z^{2n+1} dz, \qquad Q^{(n)} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_{h_2}^{h_1} q_{nz} z^{2n} dz \qquad (1.15)$$

Для $R_y^{(n)}$ и $M_y^{(n)}$ формулы аналогичны.

Принцип минимума потенциальной энергии $\delta\Pi - \delta A_1 - \delta A_2 = 0$ с учетом выражений (1.7), (1.12) и (1.14) примет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \oint_{(L)} \{(n_x T_x^{(n)} + n_y S^{(n)} - R_x^{(n)})\,\delta\chi_x^{(n)} + (n_x S^{(n)} + n_y T_y^{(n)} - R_y^{(n)})\,\delta\chi_y^{(n)} +$$

$$+ (n_x N_x^{(n)} + n_y N_y^{(n)} - Q^{(n)})\,\delta\xi^{(n)} + (n_x G_x^{(n)} + n_y H^{(n)} - M_y^{(n)})\,\delta\psi_x^{(n)} +$$

$$+ (n_x H^{(n)} + n_y G_y^{(n)} + M_x^{(n)})\,\delta\psi_y^{(n)} + (n_x \Gamma_x^{(n)} + n_y \Gamma_y^{(n)} - W^{(n)})\,\delta\varphi^{(n)}\}\, ds -$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{(\Omega)} \Big\{\Big[\partial_1 T_x^{(n)} + \partial_2 S^{(n)} + \Gamma_x^{(n-1)} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} (h_1^{2n} p_{1x} D_1 + h_2^{2n} p_{2x} D_2)\Big]\,\delta\chi_x^{(n)} +$$

$$+ \Big[\partial_1 S^{(n)} + \partial_2 T_y^{(n-1)} + \Gamma_y^{(n)} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} (h_1^{2n} p_{1y} D_1 + h_2^{2n} p_{2y} D_2)\Big]\,\delta\chi_y^{(n)} +$$

$$+ \Big[\partial_1 N_x^{(n)} + \partial_2 N_y^{(n)} - Z_j^{(n-1)} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} (h_1^{2n} p_{1z} D_1 + h_2^{2n} p_{2z} D_2)\Big]\,\delta\xi^{(n)} +$$

$$+ \Big[\partial_1 G_x^{(n)} + \partial_2 H^{(n)} - N_x^{(n)} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (h_1^{2n+1} p_{1x} D_1 + h_2^{2n+1} p_{2x} D_2)\Big]\,\delta\psi_x^{(n)} +$$

$$+ \Big[\partial_1 H^{(n)} + \partial_2 G_y^{(n)} - N_y^{(n)} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (h_1^{2n+1} p_{1y} D_1 + h_2^{2n+1} p_{2y} D_2)\Big]\,\delta\psi_y^{(n)} +$$

$$+ \Big[\partial_1 \Gamma_x^{(n)} + \partial_2 \Gamma_y^{(n)} - Z_t^{(n)} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (h_1^{2n+1} p_{1z} D_1 + h_2^{2n+1} p_{2z} D_2)\Big]\,\delta\varphi^{(n)}\Big\}\, dx\, dy = 0 \qquad (1.16)$$

$$(\Gamma_x^{(-1)} = \Gamma_y^{(-1)} = Z_j^{(-1)} \equiv 0)$$

Коэффициенты при вариациях $\delta\chi_x^{(n)}, \ldots, \delta\varphi^{(n)}$ в двойном интеграле (1.16) обращаются в нуль в силу уравнений равновесия в напряжениях. Покажем это на примере скобки, стоящей при вариации $\delta\chi_x^{(n)}$; используя формулы (1.4) работы [3], получаем

$$\partial_1 T_x^{(n)} + \partial_2 S^{(n)} + \Gamma_x^{(n-1)} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(h_1^{2n} p_{1x} D_1 + h_2^{2n} p_{2x} D_2\right) = \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{h_2}^{h_1} \sigma_x z^{2n} dz + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\int_{h_2}^{h_1} \tau_{xy} z^{2n} dz\right) + \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}\int_{h_2}^{h_1} \tau_{zx} z^{2n-1} dz + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(h_1^{2n} p_{1x} D_1 + h_2^{2n} p_{2x} D_2\right) \quad (1.17)$$

С другой стороны, так как h_1 и h_2 — функции переменных x и y, то

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_{h_2}^{h_1} \sigma_x z^{2n} dz\right) = \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} z^{2n} dz + (\sigma_x)_{z=h_1} h_1^{2n} \frac{\partial h_1}{\partial x} - (\sigma_x)_{z=h_2} h_2^{2n} \frac{\partial h_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int_{h_2}^{h_1} \tau_{xy} z^{2n} dz\right) = \int_{h_2}^{h_1} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} z^{2n} dz + (\tau_{xy})_{z=h_1} h_1^{2n} \frac{\partial h_1}{\partial y} - (\tau_{xy})_{z=h_2} h_2^{2n} \frac{\partial h_2}{\partial y}$$

$$\int_{h_2}^{h_1} \frac{d\tau_{zx}}{dz} z^{2n} dz = (\tau_{zx})_{z=h_1} h_1^{2n} - (\tau_{zx})_{z=h_2} h_2^{2n} - 2n\int_{h_2}^{h_1} \tau_{zx} z^{2n-1} dz \quad (1.18)$$

Подстановка этих соотношений в исследуемую скобку (1.17) дает

$$\partial_1 T_x^{(n)} + \partial_2 S^{(n)} + \Gamma_x^{(n-1)} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(h_1^{2n} p_{1x} D_1 + h_2^{2n} p_{2x} D_2\right) = \quad (1.19)$$

$$= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left\{\int_{h_2}^{h_1}\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right) z^{2n} dz + \left[(\sigma_x)_{z=h_1}\frac{\partial h_1}{\partial x} + (\tau_{xy})_{z=h_1}\frac{\partial h_1}{\partial y} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - (\tau_{zx})_{z=h_1} + p_{1x} D_1\right] h_1^{2n} - \left[(\sigma_x)_{z=h_2}\frac{\partial h_2}{\partial x} + (\tau_{xy})_{z=h_2}\frac{\partial h_2}{\partial y} - (\tau_{zx})_{z=h_2} + p_{2x} D_2\right] h_2^{2n}\right\} = 0$$

так как под интегралом стоит левая часть дифференциального уравнения равновесия в напряжениях (объемные силы предполагаются равными нулю), а квадратные скобки при h_1^{2n} и h_2^{2n} обращаются в нуль в силу условий на торцах плиты (см. работу [1]). Таким образом, из принципа минимума потенциальной энергии, записанного в форме интегралов (1.16), вытекает следующее соотношение:

$$\oint_{(L)} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(n_x T_x^{(n)} + n_y S^{(n)} - R_x^{(n)}\right)\delta\chi_x^{(n)} + \left(n_x S^{(n)} + n_y T_y^{(n)} - R_y^{(n)}\right)\delta\chi_y^{(n)} + \right.$$

$$+ \left(n_x N_x^{(n)} + n_y N_y^{(n)} - Q^{(n)}\right)\delta\xi^{(n)} + \left(n_x G_x^{(n)} + n_y H^{(n)} - M_y^{(n)}\right)\delta\psi_x^{(n)} +$$

$$\left. + \left(n_x H^{(n)} + n_y G_y^{(n)} + M_x^{(n)}\right)\delta\psi_y^{(n)} + \left(n_x \Gamma_x^{(n)} + n_y \Gamma_y^{(n)} - W^{(n)}\right)\delta\varphi^{(n)}\right] ds = 0 \quad (1.20)$$

доставляющее, как геометрические

$$\delta\chi_x^{(n)} = 0, \quad \delta\chi_y^{(n)} = 0, \quad \delta\xi^{(n)} = 0, \quad \delta\psi_x^{(n)} = 0, \quad \delta\psi_y^{(n)} = 0, \quad \delta\varphi^{(n)} = 0 \quad (1.21)$$

так и силовые граничные условия на контуре плиты

$$n_x T_x^{(n)} + n_y S^{(n)} = R_x^{(n)}, \quad n_x G_x^{(n)} + n_y H^{(n)} = M_y^{(n)}, \quad n_x N_x^{(n)} + n_y N_y^{(n)} = Q^{(n)}$$

$$n_x S^{(n)} + n_y T_y^{(n)} = R_y^{(n)}, \quad n_x H^{(n)} + n_y G_y^{(n)} = -M_x^{(n)}, \quad n_x \Gamma_x^{(n)} + n_y \Gamma_y^{(n)} = W^{(n)}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (1.22)$$

Условия (1.22) получаются из интеграла (1.20) приравниванием нулю коэффициентов при независимых вариациях $\delta\chi_x^{(n)}$, $\delta\chi_y^{(n)}$, $\delta\xi^{(n)}$, $\delta\psi_x^{(n)}$, $\delta\psi_y^{(n)}$, $\delta\varphi^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Условия (1.21) и (1.22) для плиты постоянной толщины были получены в работе [3] (формулы (1.17), (2.21), (1.18) и (2.12)). Здесь было показано, что для плиты переменной толщины граничные условия сохраняют свою форму.

Для получения дифференциальных уравнений равновесия плиты используем условия равновесия на торцах плиты [1]— формулы Коши; при этом следует иметь в виду, что направляющие косинусы нормали к торцевым поверхностям $z = h_i(x, y)$ следующие:

$$n_{1x} = -\frac{\partial_1 h_1}{D_1}, \quad n_{1y} = -\frac{\partial_2 h_1}{D_1}, \quad n_{1z} = \frac{1}{D_1}$$

$$n_{2x} = \frac{\partial_1 h_2}{D_2}, \quad n_{2y} = \frac{\partial_2 h_2}{D_2}, \quad n_{2z} = -\frac{1}{D_2} \tag{1.23}$$

Подставляя выражения (1.23) в формулы Коши, выражая напряжения через перемещения, применяя символическую запись и полагая $z = h_1$, получим первую группу уравнений равновесия плиты переменной толщины

$$\left[2C(h_1)\left(\partial_1 u_0 + \frac{\vartheta_0}{m-2}\right) - \frac{mh_1 S(h_1)}{m-2}\partial_1^2\vartheta_0 + S(h_1)\left(2\partial_1 u_0' + \frac{\vartheta_0'}{m-1}\right) -\right.$$
$$\left. - \frac{m\Lambda(h_1)}{2(m-1)}\partial_1^2\vartheta_0'\right]\partial_1 h_1 + \left[C(h_1)(\partial_1 v_0 + \partial_2 u_0) - \frac{mh_1 S(h_1)}{m-2}\partial_1\partial_2\vartheta_0 + S(h_1)(\partial_1 v_0' +\right.$$
$$\left. + \partial_2 u_0') - \frac{m\Lambda(h_1)}{2(m-1)}\partial_1\partial_2\vartheta_0'\right]\partial_2 h_1 - \left[S(h_1)(\partial_1 w_0' - \Delta u_0) - \frac{mh_1 C(h_1)}{m-2}\partial_1\vartheta_0 +\right.$$
$$\left. + C(h_1)(u_0' + \partial_1 w_0) - \frac{mh_1 S(h_1)}{2(m-1)}\partial_1\vartheta_0'\right] + \frac{D_1 p_{1x}}{\mu} = 0$$

$$\left[S(h_1)(\partial_1 w_0' - \Delta u_0) - \frac{mh_1 C(h_1)}{m-2}\partial_1\vartheta_0 + C(h_1)(u_0' + \partial_1 w_0) -\right.$$
$$\left. - \frac{mh_1 S(h_1)}{2(m-1)}\partial_1\vartheta_0'\right]\partial_1 h_1 + \left[S(h_1)(\partial_2 w_0' - \Delta v_0) - \frac{mh_1 C(h_1)}{m-2}\partial_2\vartheta_0 + C(h_1)(v_0' + \partial_2 w_0) -\right.$$
$$\left. - \frac{mh_1 S(h_1)}{2(m-1)}\partial_2\vartheta_0'\right]\partial_2 h_1 - \left[2C(h_1)\left(w_0' + \frac{\vartheta_0}{m-2}\right) + \frac{mh_1 S(h_1)}{m-2}\Delta\vartheta_0 - S(h_1)\left\{2\Delta w_0 +\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{(m-2)\vartheta_0'}{2(m-1)}\right\} - \frac{mh_1 C(h_1)}{2(m-1)}\vartheta_0'\right] + \frac{D_1 p_{1z}}{\mu} = 0 \tag{1.24}$$

Здесь приведены первое и третье уравнения; второе уравнение может быть получено из первого заменой ∂_1 на ∂_2 (а ∂_2 на ∂_1), u_0 на v_0, u_0' на v_0' и p_{1x} на p_{2x}. Четвертое, пятое и шестое уравнения получаются из первых трех заменой h_1, D_1, p_{1x}, p_{1y}, p_{1z} на h_2, D_2 $-p_{2x}$, $-p_{2y}$, $-p_{2z}$, соответственно. Операторы $C(h_i)$, $S(h_i)$, $\Lambda(h_i)$, содержащиеся в формулах (1.24), имеют следующий вид:

$$C(h_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h_i^{2n}\Delta^n}{(2n)!}, \qquad S(h_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h_i^{2n+1}\Delta^n}{(2n+1)!}$$

$$\Lambda(h_i) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n h_i^{2n+3}\Delta^n}{(2n+1)!(2n+3)} \qquad (i = 1, 2) \tag{1.25}$$

иначе говоря, получаются из операторов c, s, λ (1.2) подстановкой вместо координаты z параметра h_1 или h_2.

Рассмотрим теперь частный случай плиты, симметричной относительно начальной плоскости — случай, когда $h_1 = -h_2 = h$ и $D_1 = D_2 = D$. Составляя линейные комбинации из первого и четвертого, второго и пятого, третьего и шестого уравнений (1.24), складывая и вычитая эти пары уравнений, придем в этом случае к отдельным уравнениям задачи растяжения — сжатия плиты (в переменных u_0, v_0, w_0') и задачи изгиба плиты (в переменных u_0, v_0, w_0). Приведем, например, уравнения задачи изгиба

$$\left[S\left(2\partial_1 u_0' + \frac{\vartheta_0'}{m-1}\right) - \frac{m\Lambda\partial_1^2}{2(m-1)}\vartheta_0'\right]\partial_1 h + \left[S(\partial_1 v_0' + \partial_2 u_0') -\right.$$
$$\left. - \frac{m\Lambda\partial_1\partial_2}{2(m-1)}\vartheta_0'\right]\partial_2 h - C(u_0' + \partial_1 w_0) + \frac{mhS\partial_1}{2(m-1)}\vartheta_0' + \frac{D}{2\mu}(p_{1x} - p_{2x}) = 0 \tag{1.26}$$

$$\left[C\,(u_0'+\partial_1 w_0)-\frac{mhS\partial_1}{2\,(m-1)}\,\vartheta_0'\right]\partial_1 h+\left[C\,(v_0'+\partial_2 w_0)-\frac{mhS\partial_2}{2\,(m-1)}\,\vartheta_0'\right]\partial_2 h-$$
$$-S\left[2\Delta w_0+\frac{(m-2)\,\vartheta_0'}{2\,(m-1)}\right]+\frac{mhC}{2\,(m-1)}\vartheta_0'+\frac{D}{2\mu}\,(p_{1z}+p_{2z})=0$$

Здесь приведены первое и третье уравнения изгиба толстой плиты переменной толщины; второе уравнение получается из первого соответствующей заменой букв и индексов.

В случае плиты постоянной толщины $\partial_1 h=\partial_2 h=0$, $D=1$ и уравнения (1.26) упрощаются; эти уравнения приведены в работах [2-4]. Другой частный случай рассмотрен в следующем пункте.

2. **Плита с плоским нижним основанием.** Пусть нижняя поверхность плиты совпадает с плоскостью $z=0$; при этом $h_2=0$, $h_1=h$, $D_2=1$, $D_1=D$. Четвертое, пятое и шестое уравнения равновесия плиты (уравнения типа (1.24)) можно теперь записать в следующем виде:

$$u_0'+\partial_1 w_0+\frac{p_{0x}}{\mu}=0,\qquad v_0'+\partial_2 w_0+\frac{p_{0y}}{\mu}=0$$
$$2w_0'+\frac{2\vartheta_0}{m-2}+\frac{p_{0z}}{\mu}=0 \tag{2.1}$$

При помощи соотношений (2.1) можно исключить переменные u_0', v_0', w_0' из первых трех уравнений (1.24) и получить три уравнения для перемещений начальной плоскости

$$[m(2C-hS\partial_1^2)\partial_1 u_0+(2C-mhS\partial_1^2)\partial_2 v_0-\{m(S+hC)\partial_1^2+2S\partial_2^2\}\,w_0]\partial_1 h+[\{(m-1)\,C-$$
$$-mhS\partial_1^2\}\,\partial_2 u_0+\{(m-1)C-mhS\partial_2^2\}\,\partial_1 v_0-\{(m-2)S+mhC\}\,\partial_1\partial_2 w_0]\,\partial_2 h+$$
$$+[(S+mhC)\partial_1(\partial_1 u_0+\partial_2 v_0)-(m-1)S\Delta u_0-mhS\Delta\partial_1 w_0]+{}^1/_2K_x\,/\,\mu=0$$

$$[(S+mhC)\partial_1(\partial_1 u_0+\partial_2 v_0)-(m-1)S\Delta u_0-mhS\Delta\partial_1 w_0]\partial_1 h+[(S+mhC)\partial_2(\partial_1 u_0+$$
$$+\partial_2 v_0)-(m-1)\,S\Delta v_0-mhS\Delta\partial_2 w_0]\,\partial_2 h-$$
$$-m[hS\Delta(\partial_1 u_0+\partial_2 v_0]-\Lambda\Delta^2 w_0]+{}^1/_2K_z/\mu=0 \tag{2.2}$$

Здесь выписаны первое и третье уравнения; второе уравнение получается из первого соответствующей заменой букв и индексов. Зависящие от внешней нагрузки слагаемые K_x и K_z определяются следующими выражениями:

$$K_x=[\{m\Lambda\partial_1^2-2(2m-1)S\}\,\partial_1 p_{0x}+(m\Lambda\partial_1^2-2S)\partial_2 p_{0y}+\{mhS\partial_1^2-$$
$$-2\,(m-2)C\}\,p_{0z}]\partial_1 h+[\{m\,\Lambda\partial_1^2-2(m-1)\,S\}\,\partial_2 p_{0x}+\{m\,\Lambda\partial_2^2-2(m-1)S\}$$
$$\partial_1 p_{0y}+mhS\partial_1\partial_2 p_{0z}]\partial_2 h+[\{2(m-1)C-mhS\partial_1^2\}p_{0x}-mhS\partial_1\partial_2 p_{0y}+(m\Lambda\Delta-$$
$$-2S)\partial_1 p_{0z}]+2(m-1)Dp_{1x}$$

$$K_z=[\{2(m-1)C-mhS\partial_1^2\}\,p_{0x}-mhS\partial_1\partial_2 p_{0y}+(m\Lambda\Delta-$$
$$-2S)\partial_1 p_{0z}]\partial_1 h+[-mhS\partial_1\partial_2 p_{0x}+\{2(m-1)C-$$
$$-mhS\partial_2^2\}p_{0y}+(m\Lambda\Delta-2S)\,\partial_2 p_{0z}]\partial_2 h-[\{(m-2)S+mhC\}(\partial_1 p_{0x}+\partial_2 p_{0y})-$$
$$-\{2(m-1)\,C+mhS\Delta\}p_{0z}]-2(m-1)Dp_{1z} \tag{2.3}$$

3. **Осесимметричная задача о равновесии круглой плиты переменной толщины.** В случае круглой в плане толстой плиты удобнее перейти к цилиндрическим координатам r, φ, z; соответствующие перемещения обозначим через u_r, v_φ и w. Для осесимметричной деформации $v_\varphi=0$ и решение не должно зависеть от полярного угла φ.

Рассмотрим, например, случай плиты с плоским круглым основанием, перемещения которого обозначим через u_{r0} и w_0,— эти функции считаем зависящими только от радиуса r; тогда

$$u_0 = u_{r0} \cos \varphi, \qquad v_0 = u_{r0} \sin \varphi \tag{3.1}$$

Составляющие нагрузки $p_{0r}, p_{0z}, p_{1r}, p_{1z}$ также зависят только от r, так что

$$p_{ix} = p_{ir} \cos \varphi, \qquad p_{iy} = p_{ir} \sin \varphi \qquad (i = 0, 2) \tag{3.2}$$

Связь между производными дается формулами

$$\partial_1 = \cos \varphi \, \partial_r - \frac{\sin \varphi}{r} \partial_\varphi, \qquad \partial_2 = \sin \varphi \, \partial_r + \frac{\cos \varphi}{r} \partial_\varphi \tag{3.3}$$

Здесь $\partial_r = \partial / \partial r$ и $\partial_\varphi = \partial / \partial \varphi$; таким образом, из формул (3.3) вытекает, что в случае, когда $h_1 = h = h(r)$

$$\partial_1 h = \cos \varphi \frac{dh}{dr}, \qquad \partial_2 h = \sin \varphi \frac{dh}{dr} \tag{3.4}$$

Легко видеть, что

$$\Delta [f(r) \cos k\varphi] = \cos k\varphi \Delta_k [f(r)], \quad \Delta [f(r) \sin k\varphi] = \sin k\varphi \Delta_k [f(r)] \tag{3.5}$$

$$\Delta_k = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} \tag{3.6}$$

Используя формулы (3.2)—(3.6), преобразуем уравнения (2.2) к полярной системе координат; для случая осевой симметрии имеем

$$\left\{ [2(m+1) C - mhS\Delta] \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) + [2(m-1) C_2 - mhS_2\Delta_2] \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) \right\} u_{r0} \frac{dh}{dr} -$$

$$- \left\{ [(m+2) S + mhC] \Delta + [(m-2) S_2 + mhC_2] \left(\partial_r^2 - \frac{\partial_r}{r} \right) \right\} w_0 \frac{dh}{dr} -$$

$$- 2 [(m-2) S_1 + mhC_1] \Delta_1 u_{r0} - 2mhS_1\Delta_1 \partial_r w_0 + \frac{K_r}{\mu} = 0$$

$$\{ [mhC_1 - (m-2) S_1] \Delta_1 u_{r0}' - mhS_1\Delta_1 \partial_r w_0 \} \frac{dh}{dr} -$$

$$- m \left[hS\Delta \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) u_{r0} - \Lambda \Delta^2 w_0 \right] + \frac{K_z}{2\mu} = 0 \tag{3.7}$$

Здесь введены операторы S_k, C_k и Λ_k, которые получаются из операторов S, C и Λ заменой в них лапласианов операторами Δ_k (3.6); аргумент h, как и в формулах (2.2) и (2.3), опущен. Нагрузочные слагаемые K_r и K_z, входящие в формулы (3.7), после применения к выражениям (2.3) преобразований (3.2)—(3.6) получают следующий вид:

$$K_r = \left\{ \left[\frac{m}{2} \Lambda_2\Delta_2 - 2(m-1) S_2 \right] \left(\partial_r - \frac{1}{r} \right) p_{0r} + \left[\frac{mh}{2} S_2 \left(\partial_r^2 - \frac{\partial_r}{r} \right) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2(m-2) C_2 \right] p_{0z} \right\} \frac{dh}{dr} + [2(m-1) C_1 - mhS_1\Delta_1] p_{0r} +$$

$$+ (m\Lambda_1\Delta_1 - 2S_1) \partial_r p_{0z} + 2(m-1) Dp_{1r}$$

$$K_z = \{ [2(m-1) C_1 - mhS_1\Delta_1] p_{0r} + (m\Lambda_1\Delta_1 - 2S_1) \partial_r p_{0z} \} \frac{dh}{dr} -$$

$$- [(m-2) S + mhC] \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) p_{0r} + [2(m-1) C + mhS\Delta] p_{0z} - 2(m-1) Dp_{1z} \tag{3.8}$$

Поступила 24 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К задаче о равновесии пластины переменной толщины. Тр. Ленингр. индустр. ин-та, 1936, № 6, стр. 57.
2. Прокопов В. К. Применение символического метода к выводу уравнений теории плит. ПММ, 1965, т. 29, вып. 5.
3. Груздев Ю. А., Прокопов В. К. Полимоментная теория равновесия толстых плит. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. Лурье А. И. К теории толстых плит. ПММ, 1942, т. 6, вып. 2—3.