где H_{12} — постоянная, а C_y', C_z' — постоянные, связанные с подъемной и боковой силами. Приравнивая (2) и (6), получим связь между C_y', C_y и C_z', C_z

$$C_y' = -\frac{\varepsilon' l^2}{2\pi H_{12}} C_y, \qquad C_y' = -\frac{\varepsilon' l^2}{2\pi H_{12}} C_z \tag{7}$$

Определяя вклад, который дает внешнее течение в подъемную и боковую силы, и используя (7), получим

$$F_y'' = -{}^1/_2\, \rho_* a_*^2 \varepsilon' l^2 C_y, \qquad F_z'' = -{}^1/_2\, \rho_* a_*^2 \varepsilon' l^2 C_z \tag{8}$$

Формулы (4) и (8) показывают, что и для идеального внешнего течения имеет место соотношение такое же, как и для диссипирующего газа во внешнем течении, и по следу определяется ${}^2/_3 F_y$ и ${}^2/_3 F_z$, а по внешнему течению — ${}^1/_3 F_y$ и ${}^1/_3 F_z$.

Полученное совпадение не случайное, так как поток поперечных составляющих импульса, вычисленный по части контрольной поверхности, которая проходит по следу, не зависит от того, на каком расстоянии от тела проходит эта поверхность, поэтому поток импульса, уносимый внешним течением, не зависит от того, в рамках какого газа рассматривается это течение и должен быть одинаков как для идеального, так и для диссипирующего газов.

Автор благодарит О. С. Рыжова за советы и внимание.

Поступила 5 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О возмущениях, которые связаны с созданием подъемной силы, действующей на тело в трансзвуковом потоке диссипирующего газа. ПММ, 1967, т. 31, вып. 6.
2. Диесперов В. Н., Рыжов О. С. О пространственном обтекании тел звуковым потоком идеального газа. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. Tournemine G. Sur un schéme d'écoulement sonique, tridimensionnel, en aval de l'onde de choc, en fluide parfait. C. R. Acad Sci., 1968, t. 267, No. 19.

КРИТЕРИИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В СЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ И ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

М. Ш. Гитерман, В. А. Штейнберг

(Москва)

Получены основные уравнения свободной конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости, причем отличие от несжимаемой жидкости сведено к появлению двух безразмерных параметров, предельные переходы по которым приводят к критериям Рэлея и Шварцшильда. Задача решается методом Бубнова — Галеркина. Из параметров жидкости составлено три характерных параметра размерности длины, и ответ (критический градиент температуры, при котором начинается конвекция) представлен в таком виде, что сравнение высоты слоя жидкости с этими параметрами позволяет указать, какой критерий имеет место в каждом случае.

§ 1. Механическое равновесие находящейся в поле тяжести неравномерно нагретой жидкости устойчиво при подогреве снизу, если градиент температуры во всей массе жидкости постоянен и не превышает некоторого критического значения [1]. Если это условие не выполнено, то в жидкости возникают внутренние движения (свободная конвекция), стремящиеся выравнять температуру по всему объему жидкости.

Движущей силой, вызывающей конвективное движение, является тепловое расширение жидкости, а препятствуют такому движению, стремясь вернуть жидкость в исходное состояние, изменение плотности из-за гидростатического давления и возникающие при движении жидкости диссипативные процессы.

Обычно изучается влияние одного из этих двух факторов на условия возникновения конвекции, что приводит к двум независимым критериям — Рэлея и Шварцшильда.

Если можно пренебречь изотермической сжимаемостью, т. е. изменением плотности, связанным с изменением давления $\Delta p = \rho g l_0$, где l_0 — высота слоя жидкости по сравнению с тепловым расширением

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T \Delta p < -\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \Delta T, \text{ или } \frac{\Delta T}{l_0} > \rho g \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \tag{1.1}$$

то начало конвекции определяется величиной числа Рэлея — безразмерной комбинации параметров жидкости, а именно

$$\frac{\rho_0 c_p g}{\lambda\eta}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p l_0^3 (T_1 - T_2) \begin{cases} < \gamma_0 & \text{нет конвекции} \\ \geqslant \gamma_0 & \text{есть конвекция} \end{cases} \tag{1.2}$$

где все параметры в левой части (1.2) имеют обычное значение, а число γ_0 для плоского слоя жидкости равно 657.5; 1707.8; 1100.65, если соответственно обе границы жидкости — свободные, твердые или нижняя — твердая, а верхняя — свободна [1].

Рассмотрение другого предельного случая — учет сжимаемости в пренебрежении вязкостью и теплопроводностью приводит к критерию Шварцшильда возникновения конвекции

$$g\rho_0\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \left(1 - \frac{c_v}{c_p}\right) \begin{cases} > (-\partial T / \partial z) & \text{нет конвекции} \\ < (-\partial T / \partial z) & \text{есть конвекция} \end{cases} \tag{1.3}$$

Совершенно естественно было бы исследовать условия возникновения конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости, которые в предельных случаях приводили бы к соотношениям (1.2)—(1.3).

Качественно общая задача была проанализирована В. С. Сорокиным [2]. В некоторых случаях физические соображения помогают предсказать результат, а в других — необходим количественный расчет. Так, например, если $\Delta T/l_0$ удовлетворяет нижнему из условий (1.3) и условию (1.1), то по Шварцшильду конвекция должна иметь место — сжимаемость не может преодолеть теплового расширения, однако совершенно не ясно, сумеет ли диссипация остановить конвекцию, т. к. в этом случае метод Рэлея неприменим.

Попытка количественного решения задачи, предпринятая Л. Г. Филиппенко [3], не представляется убедительной как из-за специальных модельных предположений, так и в связи с трудностью сравнения результатов этой работы с экспериментом.

Определим критерии возникновения конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости, используя вариационные методы, причем для определенности рассмотрим случай плоского слоя жидкости.

Решение общей задачи о критериях возникновения конвекции, по-видимому, может оказаться полезным для исследования некоторых проблем физики атмосферы, а также поведения жидкости вблизи критической точки, где резко возрастает сжимаемость.

Уравнения гидродинамики сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости при наличии силы тяжести имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{g} + \nu\Delta\mathbf{v} + \left(\frac{\nu}{3} + \xi\right)\nabla\operatorname{div}\mathbf{v}, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\mathbf{v}) = 0$$

$$\rho T\left[\frac{\partial S}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)S\right] = \lambda\Delta T + \sigma_{ik}'\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \tag{1.4}$$

Выделим различные составляющие термодинамических величин, входящих в (1.4)

$$\rho = \langle\rho\rangle + \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad T = \langle T\rangle + T_0 + T', \quad \langle T\rangle = \text{const}, \quad \langle\rho\rangle = \text{const} \tag{1.5}$$

где ρ_0, T_0, p_0 соответствует распределению этих величин по высоте — до начала конвекции — при наличии силы тяжести и градиента температуры

$$\nabla p_0 = (\langle\rho\rangle + \rho_0)\,\mathbf{g}, \quad \nabla T_0 = \mathbf{A}, \quad \frac{\partial\rho_0}{\partial z} = -\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T (\langle\rho\rangle + \rho_0)\,g - \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p A \tag{1.6}$$

Наконец, при наличии конвекции ($\mathbf{v} \neq 0$ в (1.4)) возникают изменения давления p', температуры T' и плотности ρ', связанные уравнением состояния

$$\rho' = -(\langle\rho\rangle + \rho_0)\,\beta T' + \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T p', \qquad \beta = -\frac{1}{\langle\rho\rangle + \rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p \tag{1.7}$$

Так как в дальнейшем рассматривается лишь возникновение конвекции, проведем линеаризацию уравнений (1.4) по малым величинам p', T', ρ'.

Подставляя (1.5)—(1.7) в (1.4), получим уравнения свободной конвекции в сжимаемой, вязкой и теплопроводной жидкости [1]

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{(\nabla - \mathbf{L}_2)}{\langle\rho\rangle + \rho_0}\,p' - \mathbf{g}\beta T' + \nu\Delta\mathbf{v} + (\xi + \nu/3)\,\nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{1.8}$$

$$\left[\frac{\partial T'}{\partial t} - \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_\rho \frac{\partial p'}{\partial t}\right]\beta = \mathrm{div}\,\mathbf{v} + v_z\,(L_1 - L_2), \qquad \frac{\partial T'}{\partial t} - \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S \frac{\partial p'}{\partial t} = \varkappa\Delta T' + A\,(1 - \alpha)\,v_z$$

Здесь

$$\varkappa = \frac{\lambda}{(\langle\rho\rangle + \rho_0)\,c_p}, \quad L_1 = A\beta, \quad L_2 = g\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T, \quad \alpha = \frac{L_2}{L_1}(1 - c_v/c_p)$$

Коэффициенты системы уравнений (1.8), вообще говоря, являются функциями координат, так как $\rho_0 = \rho_0(z)$ согласно (1.6) и соответственно $\beta = \beta(z)$, $\nu = \nu(z)$, $\varkappa = \varkappa(z)$. Кроме того, производные $(\partial\rho/\partial T)_p$ и $(\partial\rho/\partial p)_T$ также изменяются с высотой. При сильной неоднородности среды, как, например, в случае критической области жидкости, эти зависимости очень существенны.

Ниже коэффициенты уравнений (1.8) будем предполагать постоянными. Из уравнения (1.6) следует, что (при $L_2 l_0 \lesssim 1$)

$$\rho = \langle\rho\rangle + \rho_0 \approx \langle\rho\rangle\left[1 - L_2 l_0 \frac{z}{l_0} + L_1 l_0 \frac{z}{l_0}\right] \tag{1.9}$$

т. е., пренебрегая зависимостью $\rho(z)$ в (1.8), учитываем лишь первые по $L_1 l_0$ и $L_2 l_0$ поправки к уравнениям свободной конвекции в несжимаемой жидкости.

Система линейных нестационарных уравнений (1.8) имеет решение, зависящее от времени по закону $e^{-i\omega t}$. Если среди допустимых значений ω имеется хотя бы одно с $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, то неподвижный режим неустойчив, т. е. неустойчивость наступает при $\mathrm{Im}\,\omega = 0$. Для несжимаемой жидкости доказано [6], что ω — мнимая величина, т. е. условие $\mathrm{Im}\,\omega = 0$ сводится к $\omega = 0$. В рассматриваемом случае сжимаемой жидкости предположение $\omega = 0$ означает, что при увеличении градиента температуры сначала наступает стационарная конвекция.

Исключая из уравнений (1.8) давление и горизонтальные компоненты скорости, а также рассматривая (из-за неограниченности задачи в горизонтальных направлениях) зависимость от горизонтальных координат в виде $e^{i\mathbf{kr}}$, где $\mathbf{k}$ — двумерный волновой вектор в плоскости xy, получим при $\omega = 0$ уравнения для амплитуд вертикальной скорости $v_z = f(z)$ и температуры $T' \equiv \tau(z)$ (в качестве единицы длины выбрана высота слоя l_0, волнового вектора — l_0^{-1}, скорости — $\varkappa l_0^{-1}$ и температуры — $A l_0$)

$$\left\{D^2 + l_0 L_1 D\frac{d}{dz} + l_0^2 L_2\,(L_1 - L_2)\,D + l_0^2 L_2\,(L_2 - L_1)\left(\frac{\xi}{\nu} + \frac{1}{3}\right)k^2\right\} f = \frac{A\beta g l_0^4}{\nu\varkappa}\,k^2\tau$$

$$D\tau = -(1 - \alpha)\,f, \qquad D \equiv \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \tag{1.10}$$

[1] Шпигель и Веронис [4] записывали эти уравнения для идеального газа, а Джеффрис [5] учитывал сжимаемость лишь в уравнении теплопроводности.

Граничные условия к уравнениям (1.10) зависят от того, ограничен ли слой жидкости твердыми поверхностями или поверхность жидкости свободна. Пусть для определенности обе ограничивающие жидкость поверхности — твердые. Тогда граничные условия к уравнениям (1.10) имеют вид (начало координат выбрано в средней плоскости)

$$f = \frac{df}{dz} = \tau = 0 \qquad \text{при } z = \pm {}^1/_2 \tag{1.11}$$

Уравнения (1.10) содержат оба предельных критерия возникновения конвекции — Шварцшильда (1.3) и Рэлея (1.2). Действительно, если пренебречь вязкостью и теплопроводностью и учесть сжимаемость только в уравнении теплопроводности, то условие $\nabla S = 0$ или по (1.8) (при $\omega = 0$) $\alpha = 1$ — как раз и представляет собой критерий Шварцшильда (1.3).

Для получения второго предельного случая — критерия Рэлея следует пренебречь сжимаемостью в уравнениях (1.8), т. е. считать $l_0L_2 \ll 1$, а также пренебречь слагаемыми с L_1 в первых двух уравнениях (1.8), т. к. обычно тепловое расширение учитывают лишь в «движущей силе конвекции» — $g\beta T'$ в (1.8). Тогда для стационарного движения уравнения (1.10) примут обычный (для несжимаемой жидкости) вид:

$$D^2 f = \frac{A\beta g l_0^4}{\nu\varkappa} k^2\tau, \qquad D\tau = -f \tag{1.12}$$

с прежними граничными условиями (1.11).

Из уравнений (1.12) легко получить одно уравнение шестого порядка с собственным значением — числом Рэлея γ и параметром k. Граничные условия определяют функцию $\gamma = \gamma(k)$, причем минимальное значение этой функции представляет собой критерий возникновения неустойчивости, а минимизирующее значение k_0 — периодичность в горизонтальной плоскости. Таким путем мы приходим к критерию Рэлея (1.2) для несжимаемой жидкости.

§ 2. В случае сжимаемой жидкости система уравнений (1.10) очень громоздка, зависит от нескольких параметров, что делает невозможным аналитическое решение задачи, а численное решение также связано с большими трудностями.

Поэтому, следуя Е. М. Жуховицкому [7], применим вариационный метод Бубнова — Галеркина для приближенного решения задачи об устойчивости неравномерно нагретой жидкости.

В уравнения (1.10) входят два дополнительных, по сравнению с (1.12), параметра L_1l_0 и L_2l_0, характеризующие тепловое расширение и сжимаемость жидкости. Поэтому собственное значение задачи — критический градиент температуры будет теперь функцией трех безразмерных параметров — k, L_1l_0 и L_2l_0, а также отношения теплоемкостей c_v/c_p и сдвиговой и объемной вязкостей ξ/ν. Все эти параметры войдут, разумеется, в интересующую нас функцию $\gamma(k)$.

Аппроксимируем амплитуду вертикальной скорости $f(z)$ в соответствии с граничными условиями (1.11) следующей системой четных ортогональных функций [1]:

$$f\binom{1}{(z)} = \alpha_1 f_1{}^{(1)} + \alpha_2 f_2{}^{(1)} + \ldots = \alpha_1(1 + \operatorname{Cos} 2\pi z) + \alpha_2\ (1 + \operatorname{Cos} 6\ \pi z) + \ldots \tag{2.1}$$

[1] Из точного решения задачи для несжимаемой жидкости известно, что с ростом градиента температуры сначала реализуются четные возмущения, т. е. именно они определяют срыв устойчивости. Полагаем, что и при учете сжимаемости, срыв устойчивости определяется четными по z возмущениями (2.1), (2.2), несмотря на то, что уравнение (1.10) содержит нечетное по z слагаемое $l_0L_1Dd(\ldots)/dz$. Однако структура этого слагаемого такова:

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \varphi_1 l_0 L_1 D \frac{d}{dz} \varphi_2 dz = -\int\limits_{-1/2}^{1/2} \varphi_2 l_0 L_1 D \frac{d}{dz} \varphi_1 dz$$

Здесь φ_1 — нечетная функция, φ_2 — четная.

Таким образом, это слагаемое при использовании вариационного метода выпадает как для четных, так и для нечетных пробных функций.

где $\alpha_1, \alpha_2...$ — постоянные коэффициенты, которые определяются из системы алгебраических уравнений метода Бубнова — Галеркина.

Были проведены расчеты также для аппроксимирующей функции вида

$$f_z^{(2)} = \alpha_1 f_1^{(2)} + \alpha_2 f_2^{(2)} + \ldots = \alpha_1(1-4z^2)^2 + \alpha_2(1-4z^2)^2 z^2 + \ldots \qquad (2.2)$$

Подставляя (2.1) или (2.2) во второе из уравнений (1.10), получим распределение температуры $\tau(z)$, определяемое коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ и видом функции $f(z)$.

Для определения коэффициентов α_i и собственных чисел задачи, согласно методу Бубнова — Галеркина, следует подставить $\tau(z)$ в первое из уравнений (1.10), умножить его на $f_i(z)$ и проинтегрировать по z.

В результате получаем линейную однородную систему уравнений для определения коэффициентов α_i

$$\sum_{k=1}^{2} \alpha_i \int_{-1/2}^{1/2} f_i (\mathrm{L} f_k - \gamma \tau_k)\, dz = 0, \qquad \gamma = \frac{\beta g l_0^4 A}{\nu \varkappa} \qquad (i = 1, 2) \qquad (2.3)$$

Здесь $\mathrm{L}f$ — левая часть первого из уравнений (1.10).

Условием разрешимости системы уравнений (2.3) будет обращение в нуль детерминанта, что представляет собой уравнение для определения собственных значений $\gamma_{1,2}$ задачи [1].

Следуя указанному общему методу, приходим к уравнению

$$\frac{A\beta g l_0^4}{\nu\varkappa}(1-\alpha) - \gamma_0(k) - \gamma_1(k) L_2 (L_2 - L_1) l_0^2 = 0 \qquad (2.4)$$

Здесь для функции $f_1^{(1)}$ из (2.1)

$$\gamma_0(k) = N^{-1}(8\pi^4 + 4\pi^2 k^2 + {}^3/_2 k^4), \quad \gamma_1(k) = {}^1/_2 N^{-1}[4\pi^2 + 3(\xi/\nu + {}^4/_3)k^2]$$

$$N = 1 - \left(\frac{4\pi^2}{k^2 + 4\pi^2}\right)^2 \frac{\operatorname{th} {}^1/_2 k}{{}^1/_2 k} + \frac{1}{2}\frac{k^2}{k^2 + 4\pi^2}$$

а для функции $f_1^{(2)}$ из (2.2)

$$\gamma_0(k) = E^{-1}k^9(k^4 + 24k^2 + 504), \quad \gamma_1(k) = E^{-1}k^9[12 + (\xi/\nu + {}^4/_3)k^2]$$

$$E = k^5(k^4 - 12k^2 + 504) + 5040\ (12 + k^2)[6k - (12 + k^2)\ \operatorname{th} {}^1/_2 k]$$

Для определения критического градиента температуры, который является собственным числом нашей задачи, следовало бы проминимизировать выражение (2.4) по k при фиксированных значениях остальных параметров, рассматривая (2.4) как неявную функцию величин A и k

$$F(A, k) = 0, \qquad \frac{\partial A}{\partial k} = -\frac{\partial F/\partial k}{\partial F/\partial A}$$

Но такая процедура привела бы после нахождения $k_0(A)$ и подстановки его в функцию $F(A, k)$ к очень громоздкому выражению для A_*.

---

[1] Для проверки пригодности метода Бубнова — Галеркина к задаче Рэлея были проведены расчеты по определению критического значения числа Рэлея для несжимаемой жидкости, а результаты сравнены с известным точным решением задачи. Оказалось, что для функции $f_1^{(1)}$ из (2.1) $\gamma_0 = 1802$ (при минимизирующем значении $k_0 = 3.1$); для суммы $\alpha_1 f_1^{(1)} + \alpha_2 f_2^{(1)} - \gamma_0 = 1712$ ($k_0 = 3.05$), а для функции $f_1^{(2)}$ из (2.2) и суммы $\alpha_1 f_1^{(2)} + \alpha_2 f_2^{(2)}$ $\gamma_0 = 1707.8$ ($k_0 = 3.1$). Все эти результаты очень близки к точному решению задачи $\gamma_0 = 1707.8$. В то же время неудачный выбор аппроксимирующей функции, например $f_2^{(2)}$ из (2.2), приводит к $\gamma_0 \approx 3 \cdot 10^5$ ($k_0 = 6$), что сильно отличается от точного решения, т. е. такой профиль скорости не опасен для срыва устойчивости.

Поэтому проведем минимизацию (2.4) по k приближенно, минимизируя по отдельности функции $\gamma_0(k)$ и $\gamma_1(k)$. Это не приводит к существенной ошибке в определении A_*, так как значения k_{01} и k_{02}, минимизирующие $\gamma_0(k)$ и $\gamma_1(k)$, близки, а сами функции $\gamma_0(k)$, $\gamma_1(k)$ при $k = k_{01}$ и $k = k_{02}$ практически совпадают [1].

Примем для дальнейшего: $k_* = 3.1$ и $\gamma_0(k_*) \approx 1700$, $\gamma_1(k_*) \approx 70$. (Для простоты мы положили $\xi/\nu = 1$.)

Решение уравнения (2.4) для безразмерного градиента температуры γ_* удобно записать в следующем виде:

$$\gamma_* = \gamma_0 (1 + l_{01}^4 + l_{01}^2 l_{21}^2)(1 + l_{31}^4 l_{20}^2)^{-1}, \qquad \gamma_* = \frac{\beta g l_0^4 A_*}{\nu\varkappa} \tag{2.5}$$

$$l_{01} = l_0/l_1, \quad l_{21} = l_2/l_1, \quad l_{31} = l_3/l_1 \text{ и т. п.}$$

где, кроме чисел $\gamma_0 = 1700$ и $\gamma_1 = 70$, введены составленные из параметров задачи три величины размерности длины

$$l_1 = \left[\frac{\gamma_0\nu\varkappa}{g^2(\partial\rho/\partial p)_T(1 - c_v/c_p)}\right]^{1/4}, \quad l_2 = \left[\frac{\gamma_1\nu\varkappa}{1 - c_v/c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\right]^{1/2}, \quad l_3 = \left[\frac{\gamma_0\nu\varkappa}{g^2(\partial\rho/\partial p)_T}\right]^{1/4} \tag{2.6}$$

Очевидно, что $l_1 \geqslant l_3$, причем знак равенства имеет место при $c_v/c_p \ll 1$.

При разных значениях параметров жидкости могут осуществляться три основных случая: 1) $l_2 < l_3 \leqslant l_1$; 2) $l_3 \leqslant l_1 < l_2$; и, наконец, 3) $l_3 < l_2 < l_1$ (при $(1 - c_v/c_p) \ll \ll 1$).

Критерий возникновения конвекции при данном расстоянии между плоскостями l_0 будет различным, во-первых, в зависимости от параметров жидкости (случаи 1—3), а также при разных соотношениях между длиной l_0 и параметрами l_1, l_2, l_3.

Перейдем к численным оценкам. Рассмотрим случай «типичной» жидкости вдали от критической точки. Тогда, полагая

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T = 10^{-10}\,\frac{сек^2}{см^2}, \quad \nu = \varkappa = 10^{-3}\,\frac{см^2}{сек}, \quad 1 - \frac{c_v}{c_p} = 10^{-3}, \quad g = 10^3\,\frac{см}{сек^2} \tag{2.7}$$

получим

$$l_2 = 2{,}5\cdot 10^{-6}\ см, \quad l_3 = 2\ см, \quad l_1 = 10\ см$$

Рассмотрим соответствующий (2.7) случай $l_2 < l_3 < l_1$ и поскольку исследование вытекающих из (2.6) разных возможностей проводится весьма просто, приведем лишь окончательные результаты.

Следует различать шесть возможных областей для расстояний между плоскостями l_0. Критерии возникновения конвекции имеют следующий вид:

$$l_0 < l_2 l_{31}^2 \tag{2.8.1}$$

$$\gamma_* = \gamma_0 l_{13}^4 l_{02}^2 = \frac{\gamma_0 l_0^2}{\gamma_1\nu\varkappa(\partial\rho/\partial p)_T}$$

$$l_2 l_{31}^2 < l_0 < l_2 \tag{2.8.2}$$

$$\gamma_* = \gamma_0(1 - l_{31}^4 l_{20}^2) = \gamma_0\left[1 - \gamma_1\nu\varkappa l_0^{-2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T\right]$$

$$l_2 < l_0 < l_3 \tag{2.8.3}$$

$$\gamma_* = \gamma_0(1 + l_{01}^4 - l_{31}^4 l_{20}^2) = \gamma_0 + \gamma_0 l_{01}^4 - \gamma_0\gamma_1\nu\varkappa l_0^{-2}(d\rho/dp)_T$$

[1] Так, для функции $f_1^{(1)}$ из (2.1); $k_{01} = 3.1$ и минимальное значение функции γ_0 равно: $\gamma_0(k_{01}) = 1802$ (при этом $\gamma_1(k_{01}) = 74.1$); $k_{02} = 2.8$ и $\gamma_1(k_{02}) = 73.4$ (при этом $\gamma_0(k_{02}) = 1837$). Соответствующие величины для функции $f_1^{(2)}$ из (2.2):

$$k_{01} = 3.1, \quad \gamma_0(k_{01}) = 1707.8, \quad \gamma_1(k_{01}) = 70.5$$

$$k_{02} = 2.8, \quad \gamma_0(k_{02}) = 1736, \quad \gamma_1(k_{02}) = 69.2$$

$$l_3 < l_0 < l_1 \tag{2.8.4}$$

$$\gamma_* = \gamma_0(1 + l_{01}^4 + l_{01}^2 l_{21}^2) = \gamma_0 + \gamma_0 l_{01}^4 + \gamma_1 l_0^2 g^2 (d\rho/dp)_T^2$$

$$l_1 < l_0 < l_1 l_{12} \tag{2.8.5}$$

$$\gamma_* = \gamma_0 l_{01}^4 + \gamma_0$$

$$l_0 > l_1 l_{12} \tag{2.8.6}$$

$$\gamma_* = \gamma_0 l_{01}^4 + \gamma_0 l_{01}^2 l_{21}^2 = \gamma_0 l_{01}^4 + \gamma_1 l_0^2 g^2 (d\rho/dp)_T^2$$

Из численных оценок (2.7) видно, что для рассмотренной «типичной» жидкости практический интерес представляют области $l_2 < l_0 < l_1$ и $l_1 < l_0$. В этих случаях (2.8.3—2.8.5) критический градиент равен сумме критических градиентов температуры Рэлея γ_0 и Шварцшильда, $\gamma_0 \ l_{01}^4$, причем видно, что эти случаи являются предельными по параметру $l_{01}^4 \lesseqgtr 1$. (В формулах (2.8.3—2.8.4) приведены также первые поправочные члены.) Одновременно отметим, что В. С. Сорокин [2], на основе качественных рассуждений пришел к критерию $l_{03}^4 \lesseqgtr 1$, который совпадает с полученным выше лишь при $(1 - c_v/c_p) \approx 1$.

Заметим, что оценки параметров задачи (2.7) были «типичными». В то же время, для сильновязкой и теплопроводной жидкости параметр l_2 может возрасти настолько, что будет иметь смысл рассматривать область (2), где поправки к критерию Рэлея пропорциональны l_0^{-2}, а также, вообще говоря, и область (1), где появился новый критерий возникновения конвекции — здесь критический градиент температуры пропорционален не l_0^{-4}, как в задаче Рэлея для несжимаемой жидкости, а l_0^{-2}. Своеобразны поправки к критерию Шварцшильда для области (6).

Вполне аналогично могут быть исследованы и более «экзотические» случаи $l_3 \leqslant l_1 < l_2$ и $l_3 < l_2 < l_1$ в соотношении (2.5).

Приложение полученных формул к изучению особенностей конвекции вблизи критической точки будет дано в отдельной работе.

Авторы благодарят Г. З. Гершуни и Е. М. Жуховицкого за обсуждение ряда вопросов теории свободной конвекции.

Поступила 20 VIII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1953.
2. Сорокин В. С. Об устойчивости неравномерно нагретого газа в поле тяжести. ПММ, 1953, т. 17, вып. 2.
3. Филиппенко Л. Г. Условие отсутствия конвекции в реальной неограниченной жидкости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 4, стр. 125.
4. Spiegel E. A., Veronis G. On the Boussinesq approximation for a compressible fluid. Astrophys. J., 1960, vol. 131, No 2, p. 442.
5. Jeffreys H. The instability of a compressible fluid heated below. Proc. Gambridgo Philos. Soc., 1930, vol. 26, pp. 170—172.
6. Сорокин В. С. Вариационный метод в теории конвекции. ПММ, 1953, т. 17, вып. 1.
7. Жуховицкий Е. М. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости неравномерно нагретой жидкости. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.