Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ДИФФУЗИЯ ВИХРЯ И СОХРАНЕНИЕ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ В ДИНАМИКЕ НЕПОЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Р. И. Нигматулин, В. Н. Николаевский

(Москва)

Показано, что закон сохранения момента количества движения в потоке несжимаемой стоксовой жидкости в частном случае сводится к уравнению диффузии вихря. Анализ проводится в двух вариантах — при эйлеровом и лагранжевом представлениях кинетического момента жидкой частицы. Обсуждаются соответствующие понятия моментов инерции; дано уравнение скорости изменения лагранжевого момента инерции жидкой частицы.

Закон сохранения момента количества движения в случае классических (неполярных) сред приводит только к условию симметрии тензора напряжений [1], а нетривиальных результатов следует ожидать лишь для сред с микроструктурой [2]. Однако, если рассматривать объемы, характерные размеры которых оказываются сопоставимыми с масштабом поля градиента скоростей, то баланс моментов количества движения необходимо включает в себя кинетический момент среднего вихревого движения. Более того, оказывается, что в случае неполярной (например, стоксовой) жидкости первые, неравные тождественно нулю члены разложения кинетического момента частицы в ряд Тейлора определяются вихревым движением. Укажем, что учет кинетического момента элементарного (с точки зрения механики континуума) объема обычной вязкой жидкости потребовалось, в частности, для анализа потоков суспензий с вращающимися взвешенными частицами [3] и особенно анизотропных турбулентных течений [4].

1. Рассмотрим фиксированный в некоторой инерциальной системе координат объем V, ограниченный поверхностью S и имеющий характерный размер δ. Составим уравнение баланса момента количества движения несжимаемой жидкости (плотности ρ), заключенной внутри указанного объема, относительно неподвижной точки O

$$\begin{gathered}\int\limits_V \rho \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{M}+\mathbf{R}\times\mathbf{u})\,dV+\int\limits_S \rho(\mathbf{M}+\mathbf{R}\times\mathbf{u})\,u_n\,dS=\\=\int\limits_V \rho(\mathbf{G}+\mathbf{R}\times\mathbf{F})\,dV+\int\limits_S(\mathbf{c}_n+\mathbf{R}\times\mathbf{T}_n)\,dS\end{gathered}\qquad(1.1)$$

Здесь $\mathbf{R}$ — радиус-вектор из точки O, $\mathbf{T}$ — тензор напряжений, $\mathbf{M}$ — плотность внутреннего момента, $\mathbf{c}$ — тензор моментных напряжений, $\mathbf{G}$ — плотность массовых моментов. Представим

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+\boldsymbol{\xi}\qquad(1.2)$$

где $\mathbf{r}$ $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — радиус-вектор центра масс C жидкости, заключенной внутри V. Переход от поверхностных интегралов к объемным по формуле Гаусса — Остроградского и введение антисимметричного тензора Леви-

Чевита ε_{ijk} позволяет преобразовать (1.1) к следующему:

$$\int\limits_V \rho\left\{\frac{\partial M_i}{\partial t}+\frac{\partial M_i u_p}{\partial \xi_p}\right\}dV+\int\limits_V \rho\varepsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial R_j u_k}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \xi_p}(R_j u_k u_p)\right\}dV=$$
$$=\int\limits_V \varepsilon_{ijk}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi_p}(R_j T_{kp})+\rho R_j F_k\right\}dV+\int\limits_V\left\{\frac{\partial c_{ip}}{\partial \xi_p}+\rho G_i\right\}dV \tag{1.3}$$

Используя (1.2) и учитывая, что x_i-const при интегрировании по ξ_i, а также условие несжимаемости $\partial u_p/\partial \xi_p = 0$, получим

$$\rho\int\limits_V\left(\frac{\partial M_i}{\partial t}+u_p\frac{\partial M_i}{\partial \xi_p}\right)dV+\rho\varepsilon_{ijk}\left\{x_j\int\limits_V\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}+u_p\frac{\partial u_k}{\partial \xi_p}\right)dV+\right.$$
$$\left.+\int\limits_V \xi_j\left(\frac{\partial u_k}{\partial t}+u_p\frac{\partial u_k}{\partial \xi_p}\right)dV\right\}=\int\limits_V\left(\frac{\partial c_{ip}}{\partial \xi_p}+\rho G_i\right)dV+\varepsilon_{ijk}\left\{x_j\int\limits_V\left(\frac{\partial T_{kp}}{\partial \xi_p}+\rho F_k\right)dV+\right.$$
$$\left.+\int\limits_V \xi_j\left(\frac{\partial T_{kp}}{\partial \xi_p}+\rho F_k\right)dV+\int\limits_V T_{kj}dV\right\} \tag{1.4}$$

Представим подынтегральные функции в (1.4) в виде рядов Тейлора относительно центра масс C, двигающегося со скоростью v_k. Значения производных в точке C (в отличие от производных в текущих точках внутри V) будем записывать в виде $\partial v_k/\partial t$, $\partial v_k/\partial x_l$. При этом будем иметь

$$u_i(x_l+\xi_l)=v_i(x_l)+\frac{\partial v_i(x_l)}{\partial x_m}\xi_m+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_i(x_l)}{\partial x_m\partial x_n}\xi_m\xi_n+o(\delta^2)$$
$$\frac{\partial u_i(x_l+\xi_l)}{\partial \xi_m}=\frac{\partial v_i(x_l)}{\partial x_m}+\frac{\partial^2 v_i(x_l)}{\partial x_m\partial x_n}\xi_n+o(\delta) \tag{1.5}$$

В дальнейшем учтем, что

$$\int\limits_V \xi_j dV=0 \tag{1.6}$$

В результате соотношение (1.4) принимает вид

$$\rho V\left(\frac{\partial M_i}{\partial t}+v_p\frac{\partial M_i}{\partial x_p}\right)+\frac{1}{2}\rho I_{ml}\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_l}\left(\frac{\partial M_i}{\partial t}+v_p\frac{\partial M_i}{\partial x_p}\right)+$$
$$+\rho\varepsilon_{ijk}\left\{x_j\left[V\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}+v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\right)+\frac{1}{2}I_{ml}\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_l}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}+v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+I_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t}+v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\right)\right\}+o(\delta^5)=\varepsilon_{ijk}\left\{x_j\left[V\left(\frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p}+\rho F_k\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}I_{ml}\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_l}\left(\frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p}+\rho F_k\right)\right]+VT_{kj}+\frac{1}{2}I_{ml}\frac{\partial^2 T_{kj}}{\partial x_m\partial x_l}+$$
$$\left.+I_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p}+\rho F_k\right)\right\}+V\left(\frac{\partial c_{ip}}{\partial x_p}+\rho G_i\right)+$$
$$+\frac{1}{2}I_{ml}\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_l}\left(\frac{\partial c_{ip}}{\partial x_p}+\rho G_i\right)+o(\delta^5) \tag{1.7}$$

Здесь ρI_{ml} — тензор (плотности) момента инерции вещества, заключенного в объеме V

$$I_{ml}=\int\limits_V \xi_l\xi_m dV\sim O(\delta^5) \tag{1.8}$$

Для дальнейшего удобней ввести тензор I_{ml}^*

$$I^*_{ml} = \frac{1}{V\delta^2} I_{ml} \sim O(\delta^\circ) \tag{1.9}$$

и рассматривать различные объемы $V(\delta)$, подобные друг другу, относительно точки C (центра тяжести), для которых I_{lm}^* не зависит от δ и определяется только формой и ориентацией V.

Перепишем уравнение (1.7), сгруппировав все члены одного порядка относительно δ

$$\begin{aligned}&\Bigl\{\rho\left(\frac{\partial M_i}{\partial t} + v_p\frac{\partial M_i}{\partial x_p} - G_i\right) - \varepsilon_{ijk}T_{kj} - \frac{\partial c_{ip}}{\partial x_p} + \varepsilon_{ijk}x_j\Bigl[\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p} - F_k\right) - \\ &- \frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p}\Bigr]\Bigr\} V + \frac{1}{2} I_{ml}\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l}\left\{\rho\left(\frac{\partial M_i}{\partial t} + v_p\frac{\partial M_i}{\partial x_p} - G_i\right) - \varepsilon_{ijk}T_{kj} - \frac{\partial c_{ip}}{\partial x_p}\right\} + \\ &+ \varepsilon_{ijk}x_j I_{ml}\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_l}\left[\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p} - F_k\right) - \frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p}\right] + \varepsilon_{ijk}I_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\times \\ &\times\left\{\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p} - F_k\right) - \frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p}\right\} + o(\delta^5) = 0\end{aligned} \tag{1.10}$$

В этом уравнении последняя группа слагаемых связана с движением жидкости в объеме V относительно его центра тяжести. Вклад этого движения в выражение момента является величиной $\sim O(\delta^5)$ и его роль становится заметной при достаточно больших размерах V, т. е. при δ достаточно близких к L, где L — характерный линейный масштаб поля градиента $\partial/\partial x_p$.

Разделив обе части (1.10) на V, беря предел при $\delta \to 0$, т. е. рассматривая (1.10) при $\delta \ll L$, и учитывая уравнение импульсов

$$\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p} - F_k\right) - \frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p} = 0 \tag{1.11}$$

получим известное [1,5] уравнение сохранения внутреннего момента

$$\rho\left(\frac{\partial M_i}{\partial t} + v_p\frac{\partial M_i}{\partial x_p} - G_i\right) - \varepsilon_{ijk}T_{kj} - \frac{\partial c_{ip}}{\partial x_p} = 0 \tag{1.12}$$

Ниже будут рассматриваться только неполярные жидкости, в которых

$$M_i \equiv 0, \qquad G_i \equiv 0, \qquad c_{ip} \equiv 0 \tag{1.13}$$

и в результате из (1.12) следует симметричность тензора напряжений

$$\varepsilon_{ijk}T_{kj} = 0 \tag{1.14}$$

Учитывая (1.11) и (1.9), разделив обе части (1.8) на $\Delta V\delta^2$ и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$\rho\varepsilon_{ijk}I_{jl}^*\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\right) = \varepsilon_{ijk}\left(I_{jl}^*\frac{\partial^2 T_{kp}}{\partial x_l \partial x_p} + \rho I_{jl}^*\frac{\partial F_k}{\partial x_l}\right) \tag{1.15}$$

Это уравнение также будет следствием уравнения импульса (1.11).

Если $I^*_{jl} = I^*\delta_{jl}$, а это верно, например, для куска пространства сферической или кубической формы, то (1.15) принимает вид

$$\rho\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\right) = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial T_{kp}}{\partial x_p} + \rho F_k\right) \qquad (1.16)$$

и по существу будет результатом применения операции rot к (1.9), что для несжимаемой стоксовой жидкости

$$T_{kp} = -p\delta_{kp} + \mu(\partial v_k / \partial x_p + \partial v_p / \partial x_k) \qquad (1.17)$$

дает классическое уравнение диффузии вихря

$$\rho\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial t} + v_p\frac{\partial\omega_i}{\partial x_p}\right) = \rho\omega_p\frac{\partial v_i}{\partial x_p} + \mu\frac{\partial^2\omega_i}{\partial x_p\partial x_p} + \frac{1}{2}\rho\varepsilon_{ijk}\frac{\partial F_k}{\partial x_j} \qquad (1.18)$$

$$\omega_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

2. Запишем момент инерции жидкости элемента $V(t)$, находящегося в некоторый момент времени в объеме пространства V, относительно его центра масс

$$\rho m_i = \rho m^*_i V\delta^2 = \rho\varepsilon_{ijk}\int\limits_{V(t)}\xi_j u_k dV = \rho\varepsilon_{ijk}i_{jl}\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + o(\delta^5)$$

$$i_{jl} = \int\limits_{V(t)}\xi_j\xi_l dV \qquad (2.1)$$

Возьмем субстациональную производную от m_i, т. е. найдем скорость изменения момента инерции выделенного вещества (учитывая, что δ — характерный размер объема V в начальный момент $t = 0$)

$$\rho\frac{dm_i}{dt} = \rho\delta^2 V\frac{dm_i^*}{dt} = \rho\varepsilon_{ijk}\int\limits_{V(t)}\xi_j\frac{du_k}{dt}d\tau, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_p\frac{\partial}{\partial\xi_p} \qquad (2.2)$$

а в случае малых объемов

$$\rho\frac{dm_i}{dt} = \delta^2 V\rho\varepsilon_{ijk}i^*{}_{jl}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p\frac{\partial v_k}{\partial x_p}\right) + o(\delta^5) \qquad (2.3)$$

$$i^*_{jl}(t) = \frac{1}{V(t)\delta^2}i_{jl}(t), \quad i^*_{jl}(t = 0) = I^*_{jl}, \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_p\frac{\partial}{\partial x_p}$$

Таким образом, левая часть (1.15) соответствует изменению момента количества движения относительно фиксированного центра масс. Аналогично нетрудно показать, что первое слагаемое в правой части (1.15) соответствует моменту поверхностных сил, а второе слагаемое — моменту массовых сил относительно того же фиксированного центра масс частицы. Таким образом, по аналогии с (1.12) можно ввести c_{ip}^* и g_i^*

$$c_{ip}^* = \varepsilon_{ijk}I_{jl}^*\frac{\partial T_{kp}}{\partial x_l}, \qquad g_i^* = \varepsilon_{ijk}I_{jl}^*\frac{\partial F_k}{\partial x_l} \qquad (2.4)$$

и уравнение (1.15) можно записать аналогично (1.12)

$$\rho\left(\frac{dm_i^*}{dt} - g_i^*\right) - \frac{\partial c_{ip}^*}{\partial x_p} = 0 \qquad (2.5)$$

Отметим, что для симметричного объема ($i_{ij}{}^* = i\delta_{ij}$)

$$m_i{}^* = \varepsilon_{ijk} i_{jl}{}^* \frac{\partial v_k}{\partial x_l} = i^* \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = 2i^* \omega_i \tag{2.6}$$

момент количества движения определяется только вращением (что соответствует теореме о кинетическом моменте жидкой сферы [6]).

3. Определим скорость изменения момента инерции частицы $i_{ij}{}^*$ относительно ее движущегося центра тяжести

$$\frac{di^*{}_{mj}}{dt} = \int\limits_{V(t)} \frac{d}{dt}(\xi_m \xi_j)\, dV$$

Учтем далее (см. [2]) следующее:

$$\frac{d\xi_m}{dt} = u_m - v_m + o(\delta) \tag{3.1}$$

Тогда имеем

$$\frac{di^*{}_{mj}(t)}{dt} = \frac{1}{\delta^2 V}\left\{ \int\limits_{V(t)} (u_m - v_m)\xi_j\, dV + \int\limits_{V(t)} (u_j - v_j)\xi_m\, dV + o(\delta^5)\right\}$$

Как и при выводе (1.5), разлагая подынтегральные выражения в ряды и переходя к пределу при $\delta \to 0$, получим

$$\frac{di^*{}_{mj}}{dt} = i_{lj}{}^* \frac{dv_m}{\partial x_l} + i_{lm}{}^* \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \tag{3.2}$$

Если частица в данный момент имеет симметричную конфигурацию, то

$$\frac{di^*_{mj}}{dt} = I^* \left(\frac{\partial v_m}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_m}\right) = 2I^* e_{mj} \tag{3.3}$$

т. е. соответствующее мгновенное изменение момента инерции происходит только за счет деформации (которая может в последующем нарушить ее симметрию); e_{mj} — компонента скорости деформации.

Непосредственно дифференцируя соотношения (2.1), получим

$$\frac{dm_i{}^*}{dt} = \rho\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{di_{jl}{}^*}{dt} + \rho\varepsilon_{ijk} i_{jl}{}^* \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + v_p \frac{\partial v_k}{\partial x_p}\right) - \rho\varepsilon_{ijk} i_{jl}{}^* \frac{\partial v_p}{\partial x_l} \frac{\partial v_k}{\partial x_p} \tag{3.4}$$

Сравним это выражение с формулой (2.3), получим соотношение

$$\rho\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{di_{jl}{}^*}{dt} = \rho\varepsilon_{ijk} i_{jl}{}^* \frac{\partial v_p}{\partial v_l} \frac{\partial v_k}{\partial x_p} \tag{3.5}$$

которое, как нетрудно показать, есть следствие уравнения (3.2) и для симметричной (в данный момент) частицы переходит в более простое соотношение

$$\rho\varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \frac{di_{jl}{}^*}{dt} = \rho I^* \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_p}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_p} = \frac{1}{2} \rho I^* \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_p} - \frac{\partial v_p}{\partial x_k}\right) \frac{\partial v_p}{\partial x_j} =$$

$$= \rho I^* \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_p}{\partial x_j} \varepsilon_{lpk} \omega_l$$

Используя тождество

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lpk} = \delta_{il}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jl} \tag{3.6}$$

окончательно получаем уравнение (использованное в работе [4])

$$\rho\varepsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_l}\frac{di_{jl}^*}{dt} = -\rho I^*\,\omega_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \tag{3.7}$$

Таким образом, первое слагаемое в правой части (1.18) действительно связано с изменением момента инерции симметричной частицы, что было ранее отмечено Бетчелором [7].

В том случае, когда рассматриваются частицы жидкости, объем которых совпадает с ячейками, определяемыми разбиением пространства координатными плоскостями, уравнения (1.15) и (2.5) принимают вид уравнений баланса момента количества движения (соответственно в эйлеровом и лагранжевом представлениях) для дифференциального объема. В частном случае декартовой системы координат эйлеров относительный момент инерции несжимаемой жидкости кубической ячейки $V = dx_1dx_2dx_3$ имеет вид $I_{ij}^* = {}^1/_{12}\,\delta_{ij}$ и не зависит ни от времени, ни от координат.

При лагранжевом представлении относительный момент инерции i_{jk}^* связан с материальной частицей, заполнявшей объем $V = dx_1dx_2dx_3$ в момент времени t; i_{ik}^* меняется из-за смещения частицы в пространстве за счет ее вращения и деформации. Поэтому использование лагранжева тензора i_{ij}^* связано с теми же трудностями, что и использование лагранжевого тензора напряжений.

Поступила 3 XII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Eringen A. C. Mechanics of Continua. N. Y., Wiley, 1967.
2. Eringen A. C. Simple microfluids. Internat. J. Engng. Sci., 1964, vol. 2, No. 2, pp. 205—217.
3. Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н. К построению асимметричной гидродинамики суспензий с вращающимися твердыми частицами. Сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошных сред. К 60-летию Л. И. Седова» М., «Наука», 1969, стр. 17—24.
4. Николаевский В. Н. Асимметричная механика континуумов и осредненное описание турбулентных течений. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 6, стр. 1304—1307.
5. Dahler J. S., Scriven L. E. Theory of structured continua. I. General consideration of angular momentum and polarization. Proc. Roy. Soc. London, A275, 1963, No. 1363, pp. 504—527.
6. Де ла Валле-Пуссен Ш. Ж. Лекции по теоретической механике, ч. 2, М., Изд-во иностр. лит., 1949, стр. 305.
7. Batchelor G. K. An introduction of fluid dynamics. Cambridge, Univer. Press, 1967.