Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЙЛЕРА ДЛЯ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ПОЛИДИСПЕРСНЫХ СУСПЕНЗИЙ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Сформулированы кинетические уравнения для различных фракций диспергированной фазы полидисперсной суспензии и система динамических уравнений, определяющих движение суспензии, рассматриваемой как совокупность взаимопроникающих взаимодействующих сплошных сред. При этом предположено, что суспензия «бесстолкновительная», т. е. взаимодействие частиц в ней осуществляется преимущественно через посредство случайных полей скорости и давления в дисперсионной среде. Соотношения, характеризующие структуру случайных пульсаций фаз суспензии («псевдотурбулентности»), рассмотрены в пренебрежении производными динамических переменных, описывающих среднее движение, что позволяет определить динамические уравнения в приближении, аналогичном приближению Эйлера в гидромеханике однофазной среды. В этом же приближении записаны уравнения переноса псевдотурбулентной энергии частиц, замыкающие систему динамических уравнений.

Построение гидродинамической модели полидисперсной суспензии, позволяющей описывать ее механическое поведение в континуальном приближении, может быть осуществлено естественным обобщением метода, использованного ранее для монодисперсной суспензии (см., например, [1]). Во избежание излишних повторений многие концепции, подробно обсуждавшиеся ранее на примере монодисперсной суспензии, принимаются здесь без дальнейших оговорок. Для определенности сначала рассмотрен случай, когда диспергированную фазу можно представить как набор конечного числа фракций, далее полученные результаты распространяются на суспензии с непрерывным распределением частиц.

Рассматриваем ниже частицы, принадлежащие к N различным фракциям, взвешенные в жидкости с вязкостью μ_0 и плотностью d_0. Радиус и плотность частицы j-й фракции обозначим через a_j и d_j, а ее объем — через σ_j (индекс j везде отмечает номер фракции; $j = 1, 2,.., N$). Далее рассматриваем также удельный объем частицы в суспензии и ее «ассоциированный» объем, представляющий часть удельного объема, заполненную жидкостью.

Вводим скорость некоторой частицы $\mathbf{w}^{(j)}$, скорость и давление жидкости в ее ассоциированном объеме $\mathbf{v}^{(j)}$ и p_j, а также локальную концентрацию суспензии ρ_j, определяемую как отношение объема σ_j к удельному объему данной частицы. Обозначая любую из перечисленных величин через φ_j, запишем

$$\varphi_j = \langle\varphi_j\rangle + \varphi_j', \qquad \langle\varphi_j'\rangle \equiv 0 \tag{0.1}$$

где первый член представляет усредненное по ансамблю значение φ_j, а второй — псевдотурбулентную пульсацию φ_j. Кроме того, вводим, как и в [1], величины вида φ_j°, представляющие результат усреднения φ_j по условным распределениям, характеризующим вероятность реализации различных значений $\mathbf{v}^{(j)}$, p_j, ρ_j при фиксированной скорости частицы $\mathbf{w}^{(j)}$.

Имеем

$$\varphi_j^\circ = \langle\varphi_j\rangle + \varphi_j'', \qquad \langle\varphi_j\rangle \equiv \langle\varphi_j^\circ\rangle_f, \qquad \langle\varphi_j''\rangle_f \equiv 0 \tag{0.2}$$

где $\langle\ \rangle_j$ обозначает усреднение по функции распределения частиц j-й фракции по скоростям f_j.

Их физических соображений следует принять, что динамические переменные $\langle\varphi_j\rangle$, относящиеся к движению жидкости, не зависят от номера j. Кроме того, допустим, что статистические свойства отношения σ_j к удельному объему одинаковы для всех j. Тогда

$$\langle \mathbf{v}^{(j)}\rangle = \langle \mathbf{v}\rangle, \qquad \langle p_j\rangle = \langle p\rangle, \qquad \rho_j = \rho = \langle\rho\rangle + \rho' \tag{0.3}$$

Второе предположение неверно, вообще говоря, для различных регулярных упаковок частиц. Однако пульсации частиц в суспензии приводят к тому, что реальная упаковка представляет как бы результат усреднения по различным типам регулярных упаковок, так что это допущение выглядит вполне правдоподобным. Во всяком случае, оно представляется неизбежным в рамках статистической теории, развиваемой на основе представлений о хаотичности упаковки частиц в суспензии в любой момент времени.

1. Кинетические уравнения. Кинетическое уравнение для частиц любой j-й фракции легко выводится в точности тем же способом, что и в работе [1]. Имеем

$$\frac{D^{(j)}f_j}{Dt} + \mathbf{w}^{(j)\prime}\frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(j)\prime}}\left(\left[\frac{\mathbf{F}_p^{(j)\circ}}{m_j} - \frac{D^{(j)}\ \langle\mathbf{w}^{(j)}\rangle}{Dt}\right)f_j\right] - \tag{1.1}$$

$$-\left(\frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{w}^{(j)\prime}} * \mathbf{w}^{(j)\prime}\right) : \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} * \langle\mathbf{w}^{(j)\prime}\rangle\right) = \frac{1}{m_j}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(j)\prime}} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(j)\prime}}\right) : (\mathbf{A}^{(j)}f_j) + \left(\frac{\partial f_j}{\partial t}\right)_c$$

$$\frac{D^{(j)}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle\mathbf{w}^{(j)}\rangle\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}*\mathbf{b} = \|a_i b_l\|, \ \mathbf{A}:\mathbf{B} = A_{il}B_{li}, \ m_j = d_j\sigma_j$$

Решение f_j этого уравнения представляет собой некое «среднее» распределение в том смысле, что предполагается выполненным усреднение по условным распределениям [1]. Величина $\mathbf{F}_p^{(j)\circ}$ представляет полную силу, действующую на частицу j-ой фракции со стороны потока жидкости и внешних полей, усредненную согласно (0.2), $\mathrm{A}^{(j)}$ — некоторый неизвестный тензор, описывающий диффузию в пространстве скоростей [1–3]. Последний член в правой части (1.1) описывает изменение f_j за счет прямых столкновений между частицами.

Для простоты полагаем ниже, что роль прямых столкновений в обмене импульсом и энергией между частицами относительно невелика, т. е. взаимодействие частиц осуществляется, главным образом, через посредство жидкости, заполняющей промежутки между частицами. Подробный анализ показывает, что это утверждение можно считать справедливым для весьма широкого класса дисперсных систем, имеющих практическое значение, если только их концентрация не слишком близка к концентрации плотноупакованной системы частиц. Для таких дисперсных систем, которые уместно назвать «бесстолкновительными», столкновителный член в уравнении (1.1) можно приближенно приравнять нулю, что значительно упрощает дальнейшие вычисления.

Выражение для сил $\mathbf{F}_p^{(j)}$ запишем в виде

$$\mathbf{F}_p^{(j)} = m_j\mathbf{g} + \mathbf{F}_i^{(j)}, \quad \langle\mathbf{F}_p^{(j)}\rangle = m_j\mathbf{g} + \langle\mathbf{F}_i^{(j)}\rangle, \quad \mathbf{F}_p^{(j)\prime} = \mathbf{F}_i^{(j)\prime} \tag{1.2}$$

где $\mathbf{g}$ — ускорение внешнего массового поля. «Диссипативная» составляющая силы (1.2) опущена ввиду сделанного пренебрежения прямыми столкновениями [1]. Силу взаимодействия $\mathbf{F}_i^{(j)}$ частиц с окружающей жидкостью представим в форме (используем здесь (0.2))

$$\mathbf{F}_i^{(j)} = -\sigma_j\frac{\partial p_j}{\partial\mathbf{r}} + \varkappa_j m_j\Big[\beta_{1j}K_1(\rho)\,\mathbf{u}^{(j)} + \beta_{2j}K_2(\rho)\,u^{(j)}\mathbf{u}^{(j)} + \xi(\rho)\,\frac{d^{(j)}\mathbf{u}^{(j)}}{dt} +$$

$$+\gamma_j\int\limits_{-\infty}^{t}\eta(\rho)\frac{d^{(j)}\mathbf{u}^{(j)}}{dt}\bigg|_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}\Big], \quad \varkappa_j=\frac{d_0}{d_j}, \quad \mathbf{u}^{(j)}=\mathbf{v}^{(j)}-\mathbf{w}^{(j)} \tag{1.3}$$

Здесь β_{1j}, β_{2j} и γ_j — некоторые коэффициенты, зависящие от физических свойств частиц j-й фракции и жидкости, K_i и ξ, η — функции, позволяющие учитывать стесненность обтекания частиц в системе; дифференцирование по времени в (1.3) производится вдоль траектории частицы. Экспериментальные значения K_i приведены, например, в [4]; конкретная форма этих функций, равно как и вид коэффициентов β_{ij}, γ_j, для целей этой работы несущественны. Отметим, что выражение (1.3) отличается от такового в [1] только наличием члена, квадратичного по относительной скорости $\mathbf{u}^{(j)}$.

Используя соотношения (0.1), (0.3), с точностью до членов второго порядка по псевдотурбулентным переменным, получим (из 1.3) соотношения [1]

$$\langle\mathbf{F}_i^{(j)}\rangle \approx -\sigma_j\frac{\partial\langle p\rangle}{\partial\mathbf{r}} + \varkappa_j m_j\Big\{\beta_{1j}\Big[K_1\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle + \frac{dK_1}{d\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{u}^{(j)\prime}\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d^2K_1}{d\langle\rho\rangle^2}\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\langle\rho'^2\rangle\Big] + \beta_{2j}\Big[K_2(\langle u^{(j)}\rangle\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle + \langle(\mathbf{u}_0^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime})\,\mathbf{u}^{(j)\prime}\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\langle u^{(j)\prime 2} - (\mathbf{u}_0^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime})^2\rangle\,\mathbf{u}_0^{(j)}) + \frac{dK_2}{d\langle\rho\rangle}(\langle u^{(j)}\rangle\langle\rho'\mathbf{u}^{(j)\prime}\rangle +$$

$$+\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\langle\rho'(\mathbf{u}_0^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime})\rangle) + \frac{1}{2}\frac{d^2K_2}{d\langle\rho\rangle^2}\langle u^{(j)}\rangle\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\langle\rho'^2\rangle\Big] +$$

$$+\xi\frac{D^{(j)}\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle}{Dt} + \frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\Big\langle\rho'\Big(\frac{d^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime}}{dt} + \Big(\mathbf{w}^{(j)\prime}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\Big)\Big\rangle + \tag{1.4}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d^2\xi}{d\langle\rho\rangle^2}\frac{D^{(j)}\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle}{Dt}\langle\rho'^2\rangle + \gamma_j\int\limits_{-\infty}^{t}\Big[\eta\frac{D^{(j)}\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle}{Dt} + \frac{d\eta}{d\langle\rho\rangle}\Big\langle\rho'\Big(\frac{d^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime}}{dt} +$$

$$+\Big(\mathbf{w}^{(j)\prime}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\Big)\Big\rangle + \frac{1}{2}\frac{d^2\eta}{d\langle\rho\rangle^2}\frac{D^{(j)}\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle}{Dt}\langle\rho'^2\rangle\Big]_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}\Big\}$$

$$\mathbf{F}_i^{(j)\prime} \approx -\sigma_j\frac{\partial p_j'}{\partial\mathbf{r}} + \varkappa_j m_j\Big\{\beta_{1j}\Big(K_1\mathbf{u}^{(j)\prime} + \frac{dK_1}{d\langle\rho\rangle}\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\rho'\Big) + \tag{1.5}$$

$$+\beta_{2j}\Big[K_2(\langle u^{(j)}\rangle\mathbf{u}^{(j)\prime} + (\mathbf{u}_0^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime})\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle) + \frac{dK_2}{d\langle\rho\rangle}\langle u^{(j)}\rangle\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\rho'\Big] +$$

$$+\xi\Big(\frac{d^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime}}{dt} + \Big(\mathbf{w}^{(j)\prime}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\Big) + \frac{d\xi}{d\langle\rho\rangle}\frac{D^{(j)}\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle}{Dt}\rho' +$$

$$+\gamma_j\int\limits_{-\infty}^{t}\Big[\eta\Big(\frac{d^{(j)}\mathbf{u}^{(j)\prime}}{dt} + \Big(\mathbf{w}^{(j)\prime}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\Big)\langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle\Big)\Big]_{t=t'}\frac{dt'}{\sqrt{t-t'}}$$

$$\mathbf{u}_0^{(j)} = \langle\mathbf{u}^{(j)}\rangle/\langle u^{(j)}\rangle, \quad K_i\equiv K_i(\langle\rho\rangle), \quad \xi\equiv\xi(\langle\rho\rangle), \quad \eta\equiv\eta(\langle\rho\rangle)$$

Выражение для силы $\mathbf{F}_p^{(j)\circ}$, входящей в (1.1), может быть получено так же, как и в [1]. А именно представляем величину φ_j'' из (0.2) в виде: $\varphi_j'' = \mathbf{s}^{(j)}[\varphi]\,\mathbf{w}^{(j)\prime}$, где $\mathbf{s}^{(j)}[\varphi]$ — некоторая неизвестная тензорная величина. В частности, для псевдотурбулентных пульсаций, встречающихся в правой части соотношения (1.5), имеем выражения

$$\rho'' = \mathbf{s}^{(j)}[\rho]\,\mathbf{w}^{(j)\prime}, \qquad \mathbf{u}^{(j)''} = \mathbf{s}^{(j)}[\mathbf{u}]\,\mathbf{w}^{(j)\prime}$$

$$-\nabla p^{(j)''} = \mathbf{s}^{(j)}[-\nabla p]\,\mathbf{w}^{(j)\prime}, \qquad \frac{d_j\mathbf{u}^{(j)''}}{dt} = \mathbf{s}^{(j)}\left[\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right]\mathbf{w}^{(j)\prime} \tag{1.6}$$

Силу $\mathbf{F}_p^{(j)\circ}$ можно поэтому представить в виде суммы $\langle\mathbf{F}_p^{(j)}\rangle$ из (1.2), (1.4) и величины $\mathbf{F}_p^{(j)\prime}$ из (1.5), в которой, однако, все псевдотурбулентные переменные заменены линейными функциями от $\mathbf{w}^{(j)\prime}$ согласно формулам (1.6).

2. **Уравнения сохранения массы и импульса.** Динамические уравнения для j-й фракции частиц, рассматриваемой в приближении континуума, легко получаются из (1.1) при помощи стандартных приемов. В результате получим аналогично [1] уравнения

$$\frac{D^{(j)}\langle\rho\rangle_j}{Dt} + \langle\rho\rangle_j\frac{\partial\langle\mathbf{w}^{(j)}\rangle}{\partial\mathbf{r}} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{N}\langle\rho\rangle_j \equiv \langle\rho\rangle$$

$$d_j\langle\rho\rangle_j\frac{D^{(j)}\langle\mathbf{w}^{(j)}\rangle}{Dt} = -\frac{\partial\mathbf{P}^{(p)(j)}}{\partial\mathbf{r}} + \frac{\langle\rho\rangle_j}{\sigma_j}\langle\mathbf{F}_p^{(j)}\rangle \tag{2.1}$$

$$\mathbf{P}^{(p)(j)} = d_j\langle\rho\rangle_j\langle\mathbf{w}^{(j)\prime}*\mathbf{w}^{(j)\prime}\rangle$$

Величина $\langle\rho\rangle_j$ представляет среднюю объемную концентрацию частиц j-й фракции в системе (не путать с ρ_j в (0.3), характеризующей концентрацию суспензии вблизи частицы).

Динамические уравнения для жидкой фазы также получаются прежним методом [1] из уравнений Навье — Стокса для движения жидкости в промежутках между частицами. Используя соотношения (0.3), получим уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \langle\mathbf{v}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\langle\rho\rangle - (1-\langle\rho\rangle)\frac{\partial\langle\mathbf{v}\rangle}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{r}} = 0, \quad \mathbf{q} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\rho\rangle_j}{\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{v}^{(j)\prime}\rangle$$

$$d_0\left[\frac{\partial}{\partial t}((1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}\rangle) + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}((1-\langle\rho\rangle)\langle\mathbf{v}\rangle*\langle\mathbf{v}\rangle) + \frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t}\right] = \tag{2.2}$$

$$= -\frac{\partial\mathbf{P}^{(f)}}{\partial\mathbf{r}} - \frac{\partial\langle p\rangle}{\partial r} + \mu_0\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\left(S\langle\mathbf{e}\rangle + \frac{dS}{d\langle\rho\rangle}\sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\rho\rangle_j}{\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{e}^{(j)\prime}\rangle + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{d^2S}{d\langle\rho\rangle^2}\langle\mathbf{e}\rangle\langle\rho'^2\rangle\right) + d_0(1-\langle\rho\rangle)\mathbf{g} - \sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\rho\rangle_j}{\sigma_j}\langle\mathbf{F}_i^{(j)}\rangle, \qquad S \equiv S(\langle\rho\rangle)$$

$$\mathbf{P}^{(f)} = d_0\left[(1-\langle\rho\rangle)\sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\rho\rangle_j}{\langle\rho\rangle}\langle\mathbf{v}^{(j)\prime}*\mathbf{v}^{(j)\prime}\rangle + \mathbf{q}*\langle\mathbf{v}\rangle + \langle\mathbf{v}\rangle*\mathbf{q}\right]$$

Здесь $\mu = \mu_0 S(\rho)$ — эффективная вязкость жидкости, фильтрующейся через решетку частиц.

Ясно, что, как и в теории монодисперсных суспензий, необходимо выразить все характеристики псевдотурбулентности, входящие в уравнения (2.1) и (2.2), через динамические переменные, определяющие среднее движение суспензии, и физические параметры обеих фаз.

3. Псевдотурбулентная структура суспензии. Случайные псевдотурбулентные переменные удовлетворяют стохастическим уравнениям, которые получаются из уравнений движения частиц и уравнений Навье — Стокса для жидкости аналогично соответствующим уравнениям в [1]. Пренебрегая отношениями масштабов псевдотурбулентности к масштабам среднего движения, запишем эти уравнения в форме

$$m_j \frac{d^{(j)}\mathbf{w}^{(j)\prime}}{dt} = \mathbf{F}_i^{(j)\prime}, \qquad \left(\frac{d^{(j)}}{dt} + \langle \mathbf{u}^{(j)} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\rho' - (1 - \langle\rho\rangle)\frac{\partial \mathbf{v}^{(j)\prime}}{\partial \mathbf{r}} = 0$$

$$d_0 (1 - \langle\rho\rangle)\left(\frac{d^{(j)}}{dt} + \langle \mathbf{u}^{(j)} \rangle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right)\mathbf{v}^{(j)\prime} = -\frac{\partial p_j'}{\partial \mathbf{r}} + \mu_0 S \frac{\partial \mathbf{e}^{(j)\prime}}{\partial \mathbf{r}} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\langle\rho\rangle_j}{\sigma_j}\mathbf{F}_i^{(j)\prime} \quad (3.1)$$

Как и в [1], здесь использована координатная система, связанная с выделенной частицей.

Удобно перейти к представлениям всех случайных псевдотурбулентных функций в виде интегралов Фурье — Стильтьеса. При этом система 3.1) переходит в систему линейных алгебраических уравнений для спектральных мер этих случайных функций, позволяющую выразить все спектральные меры через единственную спектральную меру $dZ_\rho^{(j)}$ случайного процесса ρ'. Далее легко определить все спектральные плотности, характеризующие волновую структуру псевдотурбулентности, в виде

$$\Psi_{\varphi,\psi}^{(j)}(\omega, \mathbf{k}) = L_{\varphi,\psi}^{(j)}(\omega, \mathbf{k})\, \Psi_{\rho,\rho}^{(j)}(\omega, \mathbf{k}) \quad (3.2)$$

$$\Psi_{\varphi,\psi}^{(j)}(\omega, \mathbf{k})\, d\omega d\mathbf{k} \equiv \langle dZ_\varphi^{(j)*} dZ_\psi^{(j)} \rangle$$

где $\varphi^{(j)\prime}$, $\psi^{(j)\prime}$ — любые псевдотурбулентные переменные, $dZ_\varphi^{(j)}$ и $dZ_\psi^{(j)}$ — их спектральные меры, а $L_{\varphi,\psi}^{(j)}$ — некоторые известные функции от частоты и волнового вектора псевдотурбулентных пульсаций ω и $\mathbf{k}$, а также от различных динамических производных и физических параметров. Выражения для $L_{\varphi,\psi}^{(j)}$, получаемые из упомянутой системы алгебраических уравнений элементарным путем, здесь не выписываются.

При исследовании суспензии монодисперсных частиц выражение для $\Psi_{\rho\rho}^{(j)}$ легко получить при помощи обобщенного уравнения диффузии, сформулированного в работе [5]. В полидисперсной суспензии это уравнение заменяется на N таких уравнений для каждой из фракций. Легко показать, что среднеквадратичная флуктуация концентрации такой суспензии $\langle\rho'^2\rangle$ аддитивно слагается из величин $\langle\rho'^2\rangle_j$, характеризующих флуктуации концентраций разных фракций, причем динамическое поведение каждой такой величины определяется соответствующим обобщенным уравнением диффузии.

Учитывая, что скорости $\langle \mathbf{w}^{(j)} \rangle$ при разных j, вообще говоря, различны, и опуская промежуточные выкладки, получим аналогично [1,5] выражение для спектральной плотности процесса ρ'

$$\Psi'^{(j)}_{\rho,\rho}(\omega, \mathbf{k}) \approx \sum_{l=1}^{N} \left[\frac{\Phi^{(l)}_{\rho,\rho}(\mathbf{k})}{M^{(j)}_{l}(\omega,\mathbf{k})} \left(\int \frac{d\omega}{M^{(j)}_{l}(\omega,\mathbf{k})} \right)^{-1} \right]$$

$$M^{(j)}_{l}(\omega, \mathbf{k}) \approx [\omega - (\langle \mathbf{w}^{(l)} \rangle - \langle \mathbf{w}^{(j)} \rangle)\, \mathbf{k}]^2 + [\mathbf{D}^{(l)} \mathbf{kk} - \omega^2 \theta^{(l)-1} \operatorname{tr} \mathbf{D}^{(l)}]^2 \quad (3.3)$$

$$\Phi^{(j)}_{\rho,\rho}(\mathbf{k}) = \frac{\langle \rho \rangle_j}{\langle \rho \rangle} \Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k}, k_{0j}), \quad \theta^{(j)} = \langle w^{(j)\prime 2} \rangle, \quad \operatorname{tr} \mathbf{D}^{(j)} = D^{(j)}_{ii}$$

Здесь $\mathbf{D}^{(j)}_{ii}$ — тензор эффективной псевдотурбулентной диффузии частиц j-й фракции, а величины $\Phi_{\rho,\rho}$, k_{0j} определены в [1,5]. Уравнения (3.3) замыкают систему соотношений (3.2). Отметим, что уравнения (3.1) и (3.3) записаны в пренебрежении производными динамических переменных по сравнению с соответствующими производными от псевдотурбулентных переменных, что соответствует нулевому приближению по отношениям масштабов псевдотурбулентности и среднего движения. Именно с такой же точностью можно надеяться, следовательно, определить и динамические уравнения (2.1), (2.2).

Характеристики псевдотурбулентности второго порядка по псевдотурбулентным переменным, равно как и различные корреляционные функции, легко найти из (3.2) и 3.3), проводя обычное интегрирование по частотам ω и волновому пространству $\mathbf{k}$. Именно такие характеристики были использованы в динамических уравнениях работы [1].

Заметим, однако, что псевдотурбулентные величины, вычисляемые из (3.2) при использовании (3.3) и формулы для $\Phi_{\rho,\rho}$ из [1,5], относятся, строго говоря, лишь к состояниям, в которых производные всех динамических переменных (средних скоростей разных фракций частиц и жидкости, средней концентрации суспензии и градиента среднего давления) в точности равны нулю (такие состояния называем по аналогии с кинетической теорией «равновесными»).

Это связано с тем, что формулы для $\Phi^{(j)}_{\rho,\rho}$ из (3.3) и для $\Phi_{\rho,\rho}$ из [1,5] строго справедливы лишь для таких состояний. Характеристики равновесной псевдотурбулентности, подсчитываемые на основании результатов, приведенных выше, отмечаем далее, во избежание возможных недоразумений, нулем снизу. Отметим, что если проинтегрировать соотношения (3.2) по ω и $\mathbf{k}$, а затем выразить все псевдотурбулентные величины, входящие в определения (1.3), по правилам, обсужденным ранее в [1,5], то любую равновесную псевдотурбулентную характеристику $\langle \varphi^{(j)\prime} \psi^{(j)\prime} \rangle_0$ можно выразить в виде некоторой известной функции от динамических переменных и физических параметров.

В реальных течениях состояние суспенсии может существенно отличаться от соответствующего равновесного. Способ определения величин $\langle \varphi^{(j)\prime} \psi^{(j)\prime} \rangle$ по известным $\langle \varphi^{(j)\prime} \psi^{(j)\prime} \rangle_0$ обсуждался ранее в [5] на основе предположения о приложимости равновесной формулы для $\Phi_{\rho,\rho}$ также и в неравновесных условиях. В этом случае уравнения для различных псевдотурбулентных характеристик получаются в принципе тем же путем, что и уравнения для корреляционных функций в теории турбулентности. В силу очевидных причин эту модель нельзя считать особенно удачной. Здесь рассматриваем другую, значительно более простую модель.

А именно введем далее скаляры $R^{(j)}$ $[\varphi, \psi]$, векторы $\mathbf{R}^{(j)}$ $[\varphi, \boldsymbol{\psi}]$ и тензоры $\mathbf{R}^{(j)}$ $[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]$ такие, что в равновесном состоянии выполняются соотношения

$$\langle\varphi^{(j)'}\psi^{(j)'}\rangle_0 = R^{(j)}[\varphi, \psi]\,\mathrm{tr}\,\langle\mathbf{w}^{(j)'}*\mathbf{w}^{(j)'}\rangle_0 = R^{(j)}[\varphi, \psi]\,\theta_0{}^{(j)}$$

$$\langle\varphi^{(j)}\boldsymbol{\psi}^{(j)'}\rangle_0 = \mathbf{R}^{(j)}[\varphi, \boldsymbol{\psi}]\,\langle\mathbf{w}^{(j)'}*\mathbf{w}^{(j)'}\rangle_0 \tag{3.4}$$

$$\langle\boldsymbol{\varphi}^{(j)'}*\boldsymbol{\psi}^{(j)'}\rangle_0 = \mathbf{R}^{(j)}[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}]\,\langle\mathbf{w}^{(j)'}*\mathbf{w}^{(j)'}\rangle_0$$

где штрихованные величины в левых частях представляют произвольные скалярные или векторные псевдотурбулентные переменные. Ясно, что введенные величины можно рассматривать как некоторые известные функции динамических переменных и физических параметров.

В неравновесном состоянии можно в принципе решить кинетическое уравнение (1.1) для каждой из фракций и получить далее псевдотурбулентные средние

$$\langle\mathbf{w}^{(j)'}*\mathbf{w}^{(j)'}\rangle = \frac{1}{n_j}\int(\mathbf{w}'*\mathbf{w}')\,f_j\,d\mathbf{w}' \tag{3.5}$$

Предположим, что все другие средние в неравновесном состоянии выражены через $\langle\mathbf{w}^{(j)'}*\mathbf{w}^{(j)'}\rangle$ при помощи соотношений, аналогичных (3.4). Можно тогда утверждать, что величины $R^{(j)}$, входящие в такие соотношения, будут совпадать с $R^{(j)}$ из (3.4). Действительно, для справедливости (3.4) необходимо только, чтобы состояние системы было локально-равновесным, т. е. равновесным на уровне некоторой выделенной частицы и ее ближайших соседей. Однако все уравнения, рассматриваемые в этой работе, фактически получаются после усреднения по промежутку времени Δt, удовлетворяющему неравенствам $\tau \ll \Delta t \ll T$, где τ и T — внутренний и внешний масштабы псевдотурбулентности [1,5]. Время τ представляет по существу характерное время установления локального равновесия в системе. Поэтому все исследуемые здесь неравновесные состояния обладают свойством локальной равновесности. Отметим, что смысл понятия о локальном равновесии в этой работе таков же, как и в неравновесной статистической механике вообще. Например, в кинетической теории газов состоянию локального равновесия отвечает просто состояние молекулярного хаоса.

4. Уравнения переноса псевдотурбулентной энергии частиц. Уравнения для величин $\theta_i^{(j)} = \langle w_j^{(j)}\rangle^{1/2}$ и их сумм по i для частиц разных фракций получаются тем же способом, что и динамические уравнения (2.1). Однако в отличие от динамических эти уравнения будут содержать члены, зависящие от неизвестных величин $\mathbf{F}_p^{(j)\circ}$ и $\mathbf{A}^{(j)}$, входящих в кинетические уравнения (1.1). Последние величины определяем ниже из сравнения результатов, полученных в п. 3, с некоторыми результатами, следующими из уравнений (1.1) в равновесном состоянии.

Из соотношений вида (3.4), записанных в неравновесном состоянии, нетрудно получить систему линейных алгебраических уравнений

$$\langle\boldsymbol{\varphi}^{(j)'}*\mathbf{w}^{(j)'}\rangle = \mathbf{s}^{(j)}[\boldsymbol{\varphi}]\,\langle\mathbf{w}^{(j)'}*\mathbf{w}^{(j)'}\rangle, \quad \mathbf{s}^{(j)}[\boldsymbol{\varphi}] \equiv \mathbf{R}^{(j)}[\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{w}] \tag{4.1}$$

Поэтому величины $\mathbf{s}^{(j)}[\varphi]$ также можно считать известными, что позволяет выразить силу $\mathbf{F}_p^{(j)°}$ только через динамические переменные и физические параметры по методу, указанному в конце п. 1.

Для определения компонент тензора $\mathbf{A}^{(j)}$ используем метод, предложенный в [1]. А именно рассмотрим кинетическое уравнение (1.1), записанное в равновесном состоянии, когда производные динамических переменных (а следовательно, и производные от f_j, зависящей от t и $\mathbf{r}$ неявно) тождественно равны нулю

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(j)'}}[(\mathbf{F}_p^{(j)°})f_j] = \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(j)'}} * \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}^{(j)'}}\right) : (\mathbf{A}^{(j)} f_j) \tag{4.2}$$

Тензор $\mathbf{A}^{(j)}$ по определению симметричен, поэтому без ограничения общности можно решать уравнение (4.2) в главных осях тензора $\mathbf{A}^{(j)}$. Обозначая соответствующие собственные значения тензора $\mathbf{A}^{(j)}$ через $A_i^{(j)}$, ищем решение (4.2) в «квазимаксвелловской» форме

$$f_j = n_j \left(\frac{B_1^{(j)} B_2^{(j)} B_3^{(j)}}{\pi^3}\right)^{1/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} B_i^{(j)} w_i^{(j)'2}\right) \tag{4.3}$$

где n_j — счетная концентрация частиц j-й фракции. Далее, общее представление для силы $\mathbf{F}_p^{(j)°}$ имеет вид

$$F_{p,i}^{(j)°} = G_i^{(j)} - c_i^{(j)} w_i^{(j)'} \tag{4.4}$$

(суммирование по i не производится), где $\mathbf{G}^{(j)}$ не зависит от $\mathbf{w}^{(j)'}$, а $c_i^{(j)}$ — известные функции. Подставляя (4.3) и (4.4) в уравнение (4.2), получим после разделения членов при разных степенях $\mathbf{w}^{(j)'}$ следующие уравнения:

$$\mathbf{G}^{(j)} = 0, \qquad B_i^{(j)} = \frac{c_i^{(j)}}{2A_i^{(j)}} \tag{4.5}$$

Первое из этих уравнений совпадает, как легко видеть, с уравнением сохранения импульса j-й фракции, записанным для равновесного состояния, а второе позволяет выразить компоненты тензора $A_i^{(j)}$ через компоненты тензора $B_i^{(j)}$ в выражении (4.3). Функция f_j из (4.3) позволяет независимо вычислить средние квадраты псевдотурбулентных скоростей частиц в различных направлениях. Используя второе уравнение (4.5), получим тогда следующие уравнения для неизвестных $A_i^{(j)}$:

$$A_i^{(j)} = c_i^{(j)} \langle w_i^{(j)'2} \rangle_0, \qquad \operatorname{tr} \mathbf{A}^{(j)} = c^{(j)} \theta_0^{(j)} \tag{4.6}$$

Справа в этих уравнениях стоят функции динамических переменных и физических параметров, вычисляемые согласно результатам п. 3.

В неравновесном состоянии в нулевом приближении по производным динамических переменных также ищем функции распределения в «квазимаксвелловском» виде

$$f_j = n_j \left(\frac{1}{8\pi^3 \theta_1^{(j)} \theta_2^{(j)} \theta_3^{(j)}}\right)^{1/2} \exp\left(-\sum_{i=1}^{3} \frac{w_i^{(j)'2}}{2\theta_i^{(j)}}\right) \tag{4.7}$$

Используя соотношения (4.3), (4.4), (4.6) и (4.7), из кинетических уравнений (1.1) получим следующие уравнения переноса для величин $\theta_i^{(j)}$, представляющих средние квадраты пульсационных скоростей частиц j-й фракции в i-м направлении:

$$\frac{D^{(j)}(\langle\rho\rangle_j\,\theta_i^{(j)})}{Dt}+\langle\rho\rangle_j\theta_i^{(j)}\frac{\partial\langle\mathbf{w}^{(j)}\rangle}{\partial\mathbf{r}}+2P_{ik}^{(p)(j)}\frac{\partial\langle w_i^{(j)}\rangle}{\partial x_k}=2c_i^{(j)}\langle\rho\rangle_j\,(\theta_{i0}^{(j)}-\theta_i^{(j)}) \qquad (4.8)$$

Суммируя (4.8) по i, получим также уравнение переноса для $\theta^{(j)}$

$$\frac{D^{(j)}(\langle\rho\rangle_j\theta^{(j)})}{Dt}+\langle\rho\rangle_j\theta^{(j)}\frac{\partial\langle\mathbf{w}^{(j)}\rangle}{D\mathbf{r}}+2\mathbf{P}^{(p)(j)}:\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}*\langle\mathbf{w}^{(j)}\rangle\right)=2\sum_{i=1}^{3}c_i^{(j)}\langle\rho\rangle_j(\theta_{i0}^{(j)}-\theta_i^{(j)}) \qquad (4.9)$$

Это уравнение имеет в точности тот же смысл, что и уравнение теплопроводности в гидродинамике газов. Уравнения (4.8), как легко видеть, замыкают систему динамических уравнений (2.1), (2.2). Действительно, все псевдотурбулентные характеристики, входящие в последние уравнения, могут быть выражены, согласно (3.4), (3.5) и (4.7), через динамические переменные и величины $\theta_i^{(j)}$. Таким образом, имеем $7N+4$ уравнений для определения $7N+4$ неизвестных — трех компонент скорости $\langle\mathbf{v}\rangle$, давления $\langle p\rangle$, $3N$ величин $\theta_i^{(j)}$, $3N$ скоростей $\langle w_i^{(j)}\rangle$ и N средних концентраций различных фракций $\langle\rho\rangle_j$.

Рассматриваемое приближение по своему смыслу аналогично приближению Эйлера в кинетической теории газов и однофазной гидродинамике. Уместно сохранить эту же терминологию и для рассматриваемых здесь дисперсных систем.

5. Суспензии с непрерывным распределением частиц. Для перехода от суспензий, характеризуемых дискретным набором разных фракций, к суспензиям с непрерывным распределением частиц по некоторому параметру λ (либо же по нескольким параметрам, условно обозначаемым через λ) введем функцию распределения частиц $\psi(\lambda)$, нормированную на полную объемную концентрацию суспензии $\langle\rho\rangle$, т. е.

$$\int\psi(\lambda)\,d\lambda=\langle\rho\rangle \qquad (5.1)$$

где интегрирование производится по всей области изменения λ. Соответствие между непрерывным и дискретным описанием, рассматривавшимся выше, можно установить при помощи соотношения

$$\langle\rho\rangle_j=\psi(\lambda_j)\,\Delta\lambda \qquad (5.2)$$

считая, что коэффициенты β_{1j}, β_{2j}, γ_j, а также все другие величины, отмечавшиеся ранее индексом j, представляют собой некоторые функции от λ. Тогда непрерывное описание получится из дискретного после предельного перехода $\Delta\lambda\to 0$, причем λ играет в получающихся соотношениях роль параметра (или параметров).

С учетом этих изменений стохастические уравнения для $\mathbf{v}'$, $\mathbf{w}'$, p' и ρ' сохраняют свою форму (3.1), но вместо (3.3) имеем

$$\Psi_{\rho,\rho}(\omega,\mathbf{k})\approx\frac{\Phi_{\rho,\rho}(\mathbf{k})}{\langle\rho\rangle}\int\left[\frac{\psi(\lambda')}{M(\lambda,\lambda')}\left(\int\frac{d\omega}{M(\lambda,\lambda')}\right)^{-1}\right]d\lambda'$$

$$M(\lambda,\lambda')\approx[\omega-\mathbf{k}(\langle\mathbf{w}\rangle(\lambda')-\langle\mathbf{w}\rangle(\lambda))]^2+[\mathbf{D}(\lambda')\,\mathbf{kk}-\omega^2\theta^{-1}(\lambda')\,\mathrm{tr}\,\mathbf{D}(\lambda')]^2 \qquad (5.3)$$

причем $\langle\rho\rangle$ выражается через $\psi(\lambda)$ согласно (5.1). Используя (5.3), все характеристики равновесной псевдотурбулентности легко вычислить прежним путем. В рассматриваемом случае они будут зависеть также от неизвестной функции $\psi(\lambda)$.

Динамические уравнения для диспергированной фазы принимают вид

$$\frac{D\psi}{Dt}+\psi\frac{\partial\langle\mathbf{w}\rangle}{\partial\mathbf{r}}=0,\quad \frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\langle\mathbf{w}\rangle\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}},\quad d=d(\lambda),\ldots \tag{5.4}$$

$$d\psi\frac{D\langle\mathbf{w}\rangle}{Dt}=-\frac{\partial\mathbf{P}^{(p)}}{\partial\mathbf{r}}+\frac{\psi}{\sigma}\langle\mathbf{F}_p\rangle,\quad \mathbf{P}^{(p)}=d\psi\langle\mathbf{w}'*\mathbf{w}'\rangle$$

Динамические уравнения для жидкой фазы сохраняют свою форму (2.2), если произвести замены

$$\mathbf{q}=-\frac{1}{\langle\rho\rangle}\int\psi(\lambda)\langle\rho'\mathbf{v}'\rangle\,d\lambda,\qquad \sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\rho\rangle_j}{\langle\rho\rangle}\langle\rho'\mathbf{e}^{(j)\prime}\rangle=\frac{1}{\langle\rho\rangle}\int\psi(\lambda)\langle\rho'\mathbf{e}'\rangle\,d\lambda$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\rho\rangle_j}{\langle\rho\rangle}\langle\mathbf{v}^{(j)\prime}*\mathbf{v}^{(j)\prime}\rangle=\frac{1}{\langle\rho\rangle}\int\psi(\lambda)\langle\mathbf{v}'*\mathbf{v}'\rangle\,d\lambda \tag{5.5}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\frac{\langle\rho\rangle_j}{\sigma_j}\langle\mathbf{F}_i^{(j)}\rangle=\int\frac{\psi(\lambda)}{\sigma(\lambda)}\langle\mathbf{F}_i\rangle\,d\lambda$$

Используя (5.2), нетрудно получить также новые формы для уравнений (4.8) и (4.9). Таким образом, для суспензий с непрерывным распределением частиц имеем всего двенадцать уравнений (восемь уравнений сохранения массы и импульса фаз, три уравнения переноса и соотношение (5.1)) для двенадцати неизвестных ($\langle p\rangle$, $\langle\rho\rangle$, три величины θ_i, $\psi(\lambda)$ и шесть скоростей). По сравнению с монодисперсной суспензией число уравнений увеличивается на единицу. Однако система уравнений для полидисперсной суспензии значительно сложнее таковой для монодисперсной суспензии, ибо сами уравнения — интегро-дифференциальные.

В заключение заметим, что обычно имеет место дисперсность частиц по размерам при одинаковой их плотности; однако в ряде приложений (разделение руд в потоках, сепарация в псевдоожиженном слое и т. п.) приходится рассматривать суспензии, диспергированные не только по размерам, но и по плотности частиц.

Поступила 4 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Буевич Ю. А. О гидродинамике однородных суспензий. ПМТФ, 1969, № 6.
2. Houghton G. Particle and fluid diffusion in homogeneous fluidization. Indust. and Engng Chem. Fundament., 1966, vol. 5, No. 2.
3. Левич В. Г., Мясников В. П. Кинетическая модель кипящего слоя. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
4. Ergun S. Fluid flow through packed columus. Chem. Engng Progr., 1952, vol. 48, No. 2, p. 89.
5. Буевич Ю. А. Гидродинамическая модель дисперсных систем. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.