Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА В СЛУЧАЕ ШИРОКОГО ЗАЗОРА МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ЦИЛИНДРАМИ

С. Н. Овчинникова

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается устойчивость течения Куэтта между вращающимися цилиндрами в предельном случае, когда радиус внутреннего цилиндра r_1 стремится к нулю, а его угловая скорость Ω_1 бесконечно возрастает так, что $\Omega_1 r_1^2 = k_1 = \text{const}$.

Зависимость критического числа Рейнольдса R_* от волнового числа α представляется нейтральной кривой. В случае $\alpha = 3$ при сверхкритических числах Рейнольдса течение Куэтта теряет устойчивость; рассчитан собственный вектор линеаризованной задачи, при помощи которого приближенно построен вихрь Тейлора.

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности 1 с коэффициентом вязкости ν заполняет пространство между концентрическими цилиндрами радиусов r_1, r_2, которые вращаются с угловыми скоростями Ω_1, Ω_2. Устремляя r_1 к нулю, а Ω_1 к бесконечности так, чтобы $\Omega_1 r_1^2 = k_1$, приходим к предельному случаю течения, создаваемого вихревой нитью интенсивности k_1, расположенной вдоль оси цилиндра радиуса r_2. Ниже исследуется устойчивость этого течения.

В п. 2 показано, что эта задача будет действительно предельной при $r_1 \to 0$.

Потребуем, чтобы расход жидкости через поперечное сечение равнялся нулю. Тогда точное решение v_0 уравнений Навье-Стокса, удовлетворяющее на границах условиям прилипания, представляет собой течение Куэтта

$$v_{0r} = v_{0z} = 0, \qquad v_{0\theta} = ar + 1/r, \qquad a = k_2/k_1 - 1, \qquad k_2 = \Omega_2 r_2^2 \tag{1.1}$$

Здесь r, θ, z — цилиндрические координаты.

Устойчивость течения (1.1) будем исследовать относительно вращательно-симметричных возмущений с периодом $2\pi / \alpha$ по z. Для этого представим возмущенное течение в виде

$$\mathbf{v}'(r, z, t) = \mathbf{v}_0(r) + e^{\sigma t}\,\mathbf{v}(r, z) \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в уравнения Навье — Стокса и пренебрегая квадратичными членами, получим известные уравнения первого приближения для малых возмущений

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad \sigma v_r - \frac{2v_{0\theta}}{r}v_\theta = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{R}\left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2}\right)$$

$$\sigma v_\theta + \left(\frac{dv_{0\theta}}{dr} + \frac{v_{0\theta}}{r}\right)v_r = \frac{1}{R}\left(\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2}\right), \quad \sigma v_z = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{R}\Delta v_z$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \qquad R = \Omega_1 r_1^2/\nu \tag{1.3}$$

Функции v_r, v_θ, v_z должны иметь период $2\pi / \alpha$ по z; обращаться в нуль при $r = 1$, и $v_r = v_\theta = 0$, $v_z < \infty$ при $r = 0$.

Предположим, что $a < 0$ и выполняется «принцип изменения устойчивости». Заметим, что принцип изменения устойчивости до сих пор не доказан, хотя и подтверждается экспериментами. При этих предположениях, как известно, критическим числом Рейнольдса R_* будет наименьшее значение числа R, которому соответствует нетривиальное решение краевой задачи (1.3) при $\sigma = 0$.

Решение задачи (1.3) при $\sigma = 0$ ищем в виде

$$\mathbf{v}(r, z) = \mathbf{v}_1(r)\, e^{i\alpha z} \tag{1.4}$$

Подставляя (1.4) в (1.3) и исключая давление и осевое возмущение скорости v_z, получим обыкновенные дифференциальные уравнения

$$(L - \alpha^2)^2 v_{1r} = 2\alpha^2 R\, \omega(r)\, v_{1\theta}, \quad (L - \alpha^2)\, v_{1\theta} = 2aRv_{1r} \tag{1.5}$$

$$L = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}, \qquad \omega(r) = a + \frac{1}{r^2} \tag{1.6}$$

с краевыми условиями

$$v_{1r} = v_{1\theta} = 0 \quad \text{при } r = 0,\ 1$$

$$\frac{dv_{1r}}{dr} < \infty \quad \text{при } r = 0, \qquad \frac{dv_{1r}}{dr} = 0 \quad \text{при } r = 1 \tag{1.7}$$

Наименьшее положительное собственное число задачи (1.5) — (1.7) будет критическим числом R_*. Сведем эту задачу к интегральному уравнению.

Пусть $G_{1,\alpha}^0(r, \rho)$ — функция Грина дифференциального оператора $(L - \alpha^2)$ при краевых условиях $u(0) = u(1) = 0$, а $G_{2,\alpha}^0(r, \rho)$ — функция Грина оператора $(L - \alpha^2)^2$ при краевых условиях

$$u(0) = u(1) = u'(1) = 0, \qquad u'(0) < \infty$$

Из соотношений (1.5) — (1.7) следует

$$v_{1r} = 2\alpha^2 R \int_0^1 G_{2,\alpha}^0(r, \rho)\, \omega(\rho)\, v_{1\theta}(\rho)\, d\rho \tag{1.8}$$

$$v_{1\theta} = 2aR \int_0^1 G_{1,\alpha}^0(r, \rho)\, v_{1r}(\rho)\, d\rho \tag{1.9}$$

Исключая $v_{1\theta}$, приходим к уравнению

$$v_{1r} = \lambda \int_0^1 G_{3,\alpha}^0(r, \rho)\, v_{1r}(\rho)\, d\rho \equiv A(v_{1r}) \tag{1.10}$$

$$\lambda = 4\alpha^2 R^2, \quad G_{3,\alpha}^0(r, \rho) = a \int_0^1 G_{2,\alpha}^0(r, s)\, G_{1,\alpha}^0(s, \rho)\, \omega(s)\, ds$$

Таким образом, определение R свелось к решению задачи на собственные значения интегрального уравнения (1.10).

2. О предельном переходе при $r_1 \to 0$. Покажем, что число R_* будет предельным значением критических чисел Рейнольдса $R_*(r_1)$ при $r_1 \to 0$. В случае конечного зазора между цилиндрами ($r_1 > 0$) для определения $R_*(r_1)$ аналогично получаем уравнение

$$v_{1r} = 4\alpha^2 R^2(r_1)\int_0^1 G_{3,\alpha}(r,\rho)\, v_{1r}(\rho)\,\rho\, d\rho = A_{r_1}(v_{1r}) \tag{2.1}$$

$$G_{3,\alpha}(r,\rho) = a\int_0^1 G_{2,\alpha}(r,s)\, G_{1,\alpha}(s,\rho)\,\omega(s)\, s\, ds$$

Пользуясь выражениями для $G_{1,\alpha}$ и $G_{2,\alpha}$, приведенными в работе [1], можно показать, что для любого наперед заданного $\delta > 0$ при достаточно малом r_1

$$|sG_{1,\alpha}(r,s) - G_{1,\alpha}^0(r,s)| < \delta, \qquad |sG_{2,\alpha}(r,s) - G_{2,\alpha}^0(r,s)| < \delta$$

Поэтому при $r_1 \to 0$

$$\max_{0\leqslant r,\,\rho\leqslant 1} |\rho G_{3,\alpha}(r,\rho) - G_{3,\alpha}^0(r,\rho)| \to 0$$

А это значит, что оператор A_{r_1} стремится к оператору A, определенному равенством (1.10), в том смысле, что

$$\| A_{r_1} - A \|_{C\to C} \to 0 \qquad \text{при } r_1 \to 0$$

Поэтому можно заключить, что характеристические числа уравнения (1.10) получаются предельным переходом из характеристических чисел уравнения (2.1) ([2], § 78).

3. О функциях Грина $G_{1,\alpha}^0(r,\rho)$ и $G_{2,\alpha}^0(r,\rho)$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$(L - \alpha^2)^2 u = f \tag{3.1}$$

с краевыми условиями

$$u(0) = u(1) = u'(1) = 0, \qquad u'(0) < \infty \tag{3.2}$$

Этот оператор представим [3] в виде

$$(L - \alpha^2)^2 u = \frac{\rho_0}{r}\frac{d}{dr}\rho_1\frac{d}{dr}\frac{\rho_2\rho_0}{r}\frac{d}{dr}\rho_1\frac{d}{dr}\rho_2 u \tag{3.3}$$

$$\rho_0 = \rho_2 (I_1(\alpha r))^{-1}, \qquad \rho_1 = r I_1^2(\alpha r)$$

Лемма 3.1. Функция Грина $G_{2,\alpha}^0(r,s)$ краевой задачи (3.1), (3.2) — *осцилляционная.*

Доказательство этого факта основывается на результатах работы ([4], гл. III) и справедливости следующего утверждения.

Лемма 3.2. Решение задачи (3.1), (3.2) имеет на интервале (0.1) не более перемен знака чем функция $f(r)$.

Рассуждаем от противного, пусть $f(r)$ в интервале (0.1) имеет n перемен знака, а $u(r)$ имеет $(n+1)$ перемену знака. Тогда на отрезке [0.1] функция $u(r)$ имеет $(n+3)$ нулевых места, так как выполняются условия (3.2). Функция

$$u_1(r) = \rho_1 \frac{d}{dr} \rho_2 u$$

согласно обобщенной теореме Ролля, имеет $(n+2)$ нулевых места в (0.1). Но из условий (3.2) и равенства $\rho_1(0) = 0$, следует

$$u_1(1) = u_1(0) = 0$$

Это значит, что в [0.1] функция $u_1(r)$ имеет $(n+4)$ нулевых места. Далее при помощи обобщенной теоремы Ролля получаем, что функция

$$u_2(r) = \frac{\rho_0}{r} \frac{d}{dr} \rho_1 \frac{d}{dr} \frac{\rho_2\rho_0}{r} \frac{d}{dr} \rho_1 \frac{d}{dr} \rho_2 u$$

имеет в (0.1) $(n+1)$ перемену знака, что приводит к противоречию, так как $u_2(r) \equiv f(r)$.

Выпишем функцию

$$-G^0_{1,\alpha}(r, s) = \begin{cases} s\,[I_1(\alpha r)/I_1(\alpha)]\,[K_1(\alpha s) I_1(\alpha) - K_1(\alpha) I_1(\alpha s)] & (r \leqslant s) \\ s\,[I_1(\alpha s)/I_1(\alpha)]\,[K_1(\alpha r) I_1(\alpha) - K_1(\alpha) I_1(\alpha r)] & (r \geqslant s) \end{cases}$$

Осцилляционность этой функции доказана в работе [3]. Функция Грина $G^0_{2,\alpha}(r, s)$ имеет вид

$$G^0_{2,\alpha}(r, s) = \begin{cases} [I_1(\alpha r)\psi_1(s) - K_1(\alpha r)\psi_2(s) - \Lambda_2^{-1}(0)\psi_2(r)\psi_2(s)]\,s & (r \leqslant s) \\ [I_1(\alpha s)\psi_1(r) - K_1(\alpha s)\psi_2(r) - \Lambda_2^{-1}(0)\psi_2(r)\psi_2(s)]\,s & (r \geqslant s) \end{cases}$$

Здесь

$$\psi_1(s) = -\Lambda_1(s) K_1(\alpha s) + \Lambda_3(s) I_1(\alpha s)$$

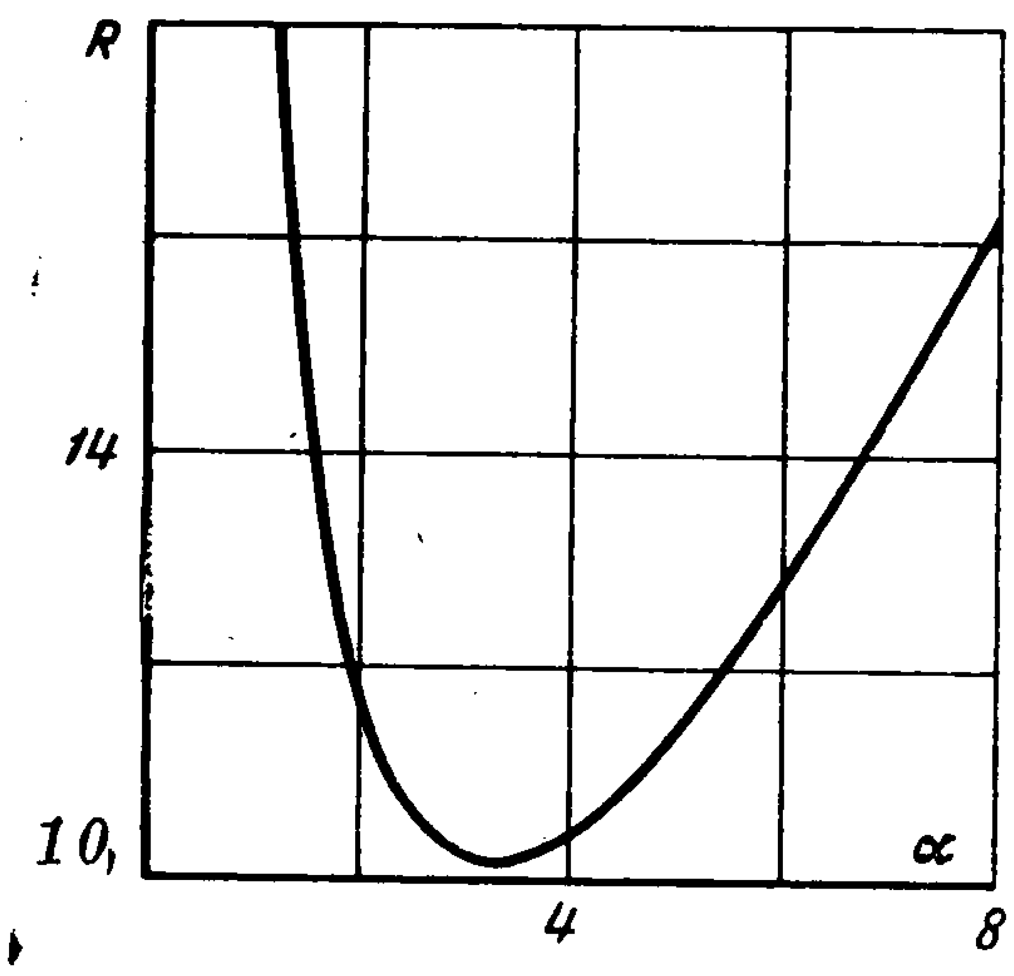
$$\psi_2(s) = \Lambda_1(s) I_1(\alpha s) - \Lambda_2(s) K_1(\alpha s)$$

$$\Lambda_1(s) = \int_s^1 K_1(\alpha r) I_1(\alpha r)\, r\, dr, \quad \Lambda_2(s) = \int_s^1 I_1^2(\alpha r)\, r\, dr, \quad \Lambda_3(s) = \int_s^1 K_1^2(\alpha r)\, r\, dr$$

При условии, что $\omega(r) > 0$ $(0 < r \leqslant 1)$ и $a < 0$, ядро $G^0_{3,\alpha}(r, \rho)$ осцилляционное как композиция осцилляционных ядер [4]. А это значит, согласно результатам работы [4], что оператор $A(v_{1r})$, определенный уравнением (1.10), имеет последовательность простых положительных собственных чисел

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$$

4. Численные результаты. Задачу на собственные значения (1.10) можно решать методом последовательных приближений по схеме



Фиг. 1

$$\lambda_{(n-1)} = \left[\int_0^1\int_0^1 G^0_{3,\alpha}(r, \rho)\, v_{1r(n)}(\rho)\, dr d\rho\right]^{-1} \tag{4.1}$$

$$v_{1r(n)} = \lambda_{(n-1)}\int_0^1 G^0_{3,\alpha}(r, \rho)\, v_{1r(n-1)}(\rho)\, d\rho \tag{4.2}$$

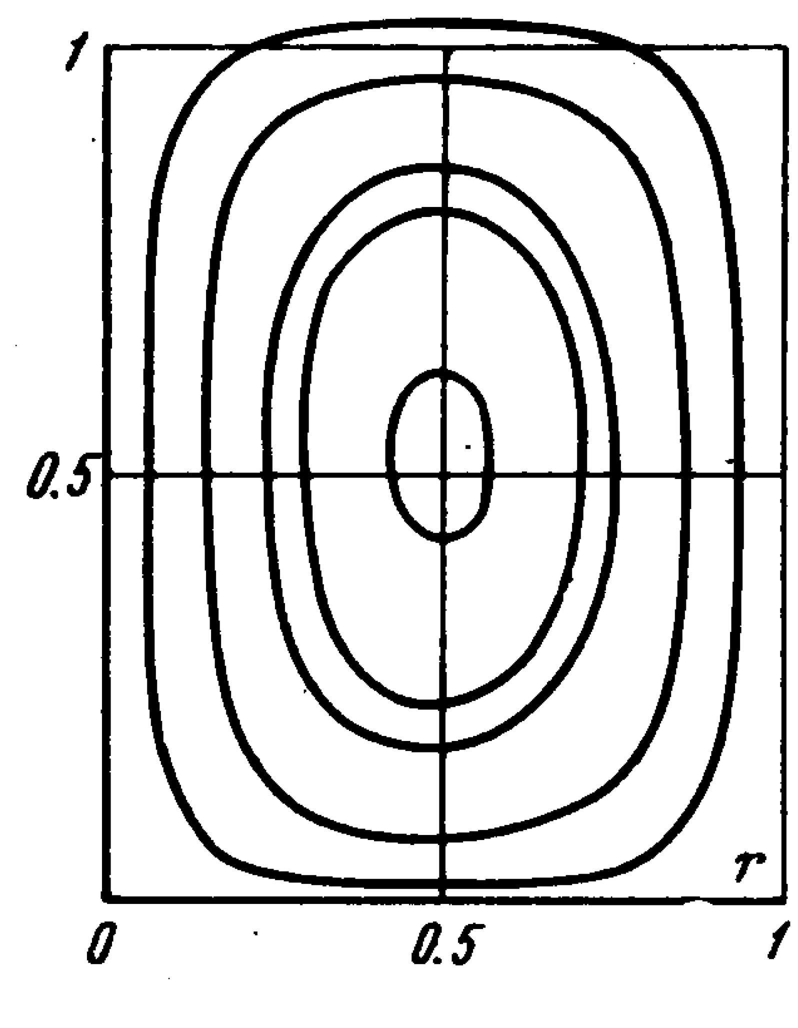
Так как ядро $G^0_{3,\alpha}(r, \rho)$ осцилляционное и для него справедлива теорема о позитивном собственном числе [5], последовательности (4.1) и (4.2) сходятся соответственно к наименьшему характеристическому числу уравнения (1.10) и отвечающей ему собственной функции.

Вычисляя для различных α критическое число R_* в случае покоящегося внешнего цилиндра ($\Omega_2 = 0$), получаем нейтральную кривую, изображенную на фиг. 1. Расчет проводился на ЭЦВМ «Минск-12» и мог обеспечить 3—4 верных знака у числа R_*. Значение волнового числа α_*, которому соответствует $\min_\alpha R_*(\alpha)$ находится между $\alpha = 3$ и $\alpha = 3.5$.

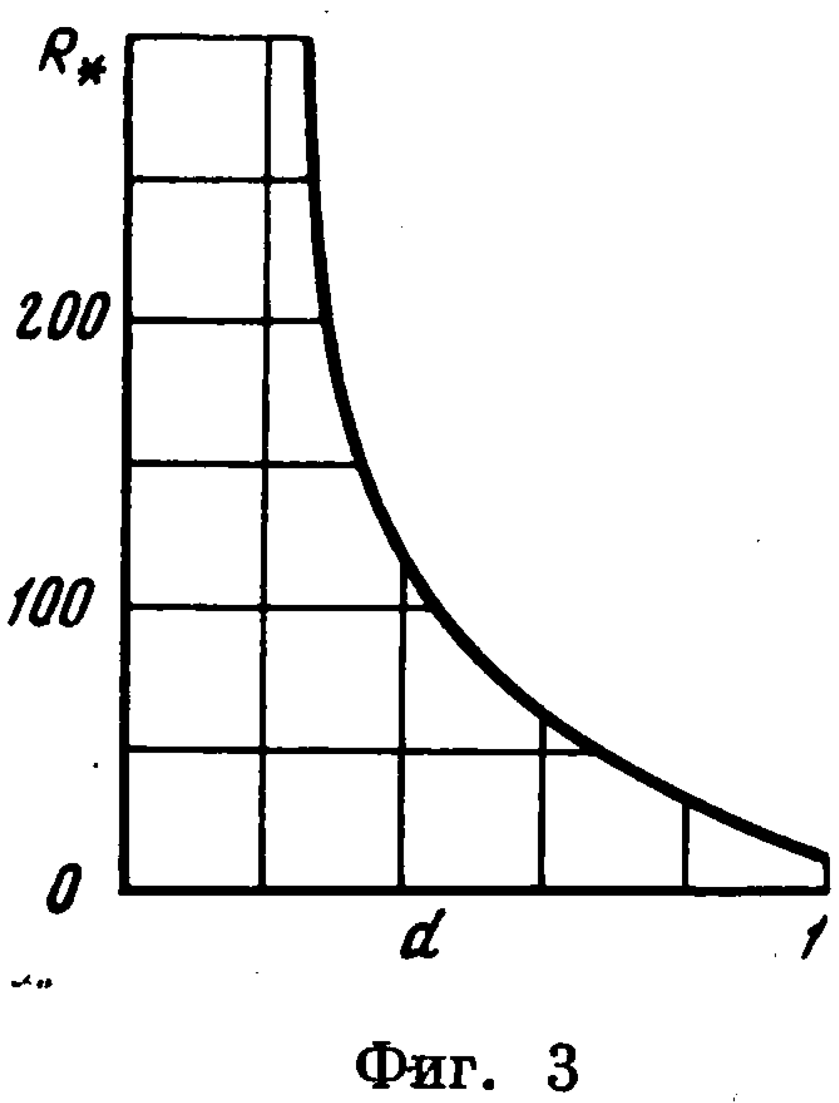
Для $\alpha = 3$ методом работы [1] было рассчитано первое собственное число в спектре устойчивости течения Куэтта при сверхкритических числах Рейнольдса $R = R_* + \varepsilon^2$. Оно оказалось равным

$$\sigma = 2.21\, \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)$$

Отсюда следует, что течение Куэтта при сверхкритических числах R теряет устойчивость. Собственный вектор линеаризованной задачи (1.3) при $\sigma = 0$ с точностью до постоянного множителя совпадает с первым членом в разложении по параметру вторичного течения — вихря Тейлора, возникающего при потере устойчивости куэттовским



Фиг. 2



Фиг. 3

потоком. Чтобы приближенно построить вихрь Тейлора (фиг. 2), был рассчитан этот собственный вектор. Его компонента v_{1r} вычислялась вместе с R_* по схеме (4.1), (4.2), компонента $v_{1\theta}$ определялась по формуле (1.9), а для определения v_{1z} получаем

$$v_{1z} = -2R_*\alpha\int_0^1 \frac{1}{r}\left(G^0_{2,\alpha}(r, \rho) + r\frac{\partial G^0_{2,\alpha}(r, \rho)}{\partial r}\right)\omega(\rho)\, v_{1\theta}(\rho)\, d\rho$$

Результаты вычислений приведены в таблице. На фиг. 3 изображена зависимость критических чисел $R_*(\alpha_*) = \min_\alpha R_*(\alpha)$ (при $\alpha \approx 3$) от величины $d = (r_2 - r_1) / r_2$. Значение $R_*(\alpha_*)$ для $d = 1/_2$ и $d = 1/_3$ взяты из работ [1, 6], для $d \approx 0.12$ из данных, полученных Дж. Тейлором (см., например, [7]) для $d = 1$ из этой работы.

r	v_{1r}	$v_{1\theta}$	v_{1z}
0.0625	1.6463	0.8760	—16.910
0.1250	2.9759	1.6768	—13.973
0.1875	3.9019	2.3460	—10.835
0.2500	4.4435	2.8495	—7.8635
0.3125	4.6421	3.1725	—5.1998
0.3750	4.5553	3.3167	—2.9429
0.4375	4.2472	3.2962	—1.1169
0.5000	3.7800	3.1336	0.2927
0.5625	3.2103	2.8566	1.3181
0.6250	2.5884	2.4953	1.9971
0.6875	1.9583	2.0796	2.3646
0.7500	1.3590	1.6374	2.4475
0.8125	0.8268	1.1931	2.2607
0.8750	0.3971	0.7656	1.8047
0.9375	0.1073	0.3670	1.0629

Автор благодарит В. И. Юдовича за постоянное внимание к работе и ценные указания.

Поступила 10 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
2. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М., Гостехиздат, 1957.
3. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
4. Грантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и малые колебания механических систем. М., Гостехиздат, 1950.
5. Красносельский М. А. Положительные решения операторных уравнений. Главы нелинейного анализа. М., Физматгиз, 1962.
6. Kirchgässner K. Die Instabilität der Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern gegenüber Taylor — Wirbeln für beliebige Spaltbreiten. Z. angew. Math. und. Phys., 1961, Bd. 12, Fsc. 1, S. 14—29.
7. Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.