

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ОДНОМЕРНОЕ ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ

И. П. Семенова

(Москва)

Оценка влияния поперечного электрического поля на характеристики ЭГД генератора является важной проблемой электрогидродинамического преобразования энергии [1, 2]. При ряде упрощающих предположений, таких, как отсутствие сжимаемости и предположение о нулевой подвижности заряженных частиц, этот вопрос рассматривался в работах [3, 4]. В настоящей работе проведено качественное исследование стационарного одномерного электрогидродинамического течения сжимаемого газа при наличии подвижности заряженных частиц в переменном электрическом поле, имеющем продольную и поперечную компоненты.

1. Основные уравнения и интегралы. Рассмотрим стационарное движение сжимаемой, невязкой, нетеплопроводной среды с объемным зарядом в электрическом поле в плоском канале постоянного сечения, стенки которого ($y = \pm h$) выполнены из диэлектрика. На торцах канала расположены электроды. Будем считать, что канал узкий, движение происходит вдоль оси x , а ось y направлена поперек течения. Проведем осреднение уравнений по координате y , предполагая, что течение симметрично относительно оси канала.

Оценим степень неоднородности продольного электрического поля поперек канала. Проинтегрируем уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$ в пределах от $y = -h$ до $y = h$

$$E_x(h) - E_x(0) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^h E_y dy$$

Относя значения полей к значению продольного поля на оси канала $E_x(0)$ и вводя безразмерные координаты $x^* = x/L$, $y^* = y/L$, получим

$$\frac{E_x(h) - E_x(0)}{E_x(0)} \sim \frac{\partial E_{yw}}{\partial x^*} \frac{h}{LE_x(0)}$$

Здесь E_{yw} — значение поперечного поля на стенке канала. Для очень узкого канала ($h/L \ll 1$) можно считать, что даже в том случае, когда E_{yw} меняется вдоль канала, изменение продольного поля по ширине мало. Зависимость E_{yw} от x , вообще говоря, может быть найдена из решения двумерной задачи о течении в канале. Для качественного исследования течения в дальнейшем будем предполагать, что E_{yw} постоянно.

Осредняя по сечению уравнение $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, получим соотношение

$$E_x^* = 4\pi \langle q \rangle - E_{yw} / h \quad (1.1)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по x , $\langle q \rangle$ — среднее значение плотности электрического заряда.

Уравнение закона Ома в проекции на ось x имеет вид

$$j_x = q(u + bE_x) \quad (1.2)$$

При написании уравнения (1.2) предполагалось, что эффект диффузии в продольном направлении несущественен. После осреднения уравнение (1.2) сохранит свой вид, но истинные значения входящих в него величин q и j_x заменяются своими средними значениями.

В правую часть гидродинамического уравнения движения в проекции на ось x войдет выражение для электрической силы, действующей в продольном направлении $f_x = qE_x$. В силу предположения о постоянстве продольного электрического поля поперек канала выражение для электрической силы после осреднения имеет вид $\langle f_x \rangle = \langle q \rangle E_x$.

В уравнение энергии входят выражения вида $j_x E_x$ и $j_y E_y$. Среднее значение величины $j_x E_x$ равно $\langle j_x \rangle E_x$.

Для оценки величины $j_y E_y$ рассмотрим проекцию закона Ома на ось y . Будем учитывать диффузию в поперечном направлении. Величина j_y равна нулю на оси канала (вследствие симметрии задачи) и на стенках канала (стенки $y = \pm h$ — диэлектрики). Будем предполагать, что в каждом сечении канала поперечный ток j_y мал, т. е. выполняется соотношение $qbE_y \sim D\partial q / \partial y$ (D — коэффициент диффузии).

Тогда в уравнении энергии величину $j_y E_y$ можно опустить.

В реальных электрогидродинамических устройствах поперечный ток в точности равен нулю в случае нулевой подвижности ($j_y = bqE_y$). Можно ожидать, что при малых значениях подвижности сделанное предположение о малости j_y достаточно хорошо согласуется с действительностью. В электрогидродинамических ускорителях, когда имеется внешнее приложенное продольное электрическое поле E_0 , можно, по-видимому, считать, что при больших значениях E_0 заряженные частицы движутся, в основном, вдоль канала, т. е. выполняется предположение о том, что величина j_y мала.

Уравнение движения в проекции на ось y имеет вид

$$\frac{\partial p}{\partial y} = qE_y$$

Максимально возможное значение величины $f_y = qE_y$ соответствует значениям плотности электрического заряда и поля E_y , при которых наступает пробой в газе. Даже при этих значениях величин q и E_y во всех реальных устройствах выполняется соотношение

$$\int_0^h f_y dy \sim E_n^2 / 8\pi \ll p$$

Здесь E_n — поле пробоя. Следовательно, величина $\Delta p / p \ll 1$, и давление можно считать не меняющимся поперек канала.

Уравнение $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ при осреднении дает, что $\langle j_x \rangle = \text{const} = j_0$. В дальнейшем знак осреднения по сечению будет опущен.

Система уравнений для рассматриваемой задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \rho u = m = \text{const}, \quad mu' + p' = qE_x, \quad m(c_p T + 0.5 u^2)' = j_0 E_x \quad (1.3) \\ p = \rho RT, \quad j_x = q(u + bE_x) = j_0, \quad E_x' = 4\pi q - E_{yw}/h \end{aligned}$$

Здесь ρ — плотность среды, u — составляющая скорости вдоль оси x ($u \geq 0$), p — давление, T — температура, c_p , R — теплоемкость при постоянном давлении и газовая постоянная, b — подвижность. Для определенности будем считать, что $q > 0$. Система уравнений (1.3) замкнута. Входящие в уравнения константы m , j_0 , E_{yw} считаются заданными. Из уравнений (1.3) нетрудно получить соотношения

$$u' = \frac{qE_x M^2 (u - u_1)}{mu(M^2 - 1)}, \quad M' = \frac{qE_x M^3 (\gamma + 1) (u - u_2)}{2mu^2 (M^2 - 1)}$$

$$u_1 = (\gamma - 1) bE_x, \quad u_2 = (1 + \gamma M^2) / (\gamma + 1), \quad M^2 = \rho u^2 / \gamma p \quad (1.4)$$

Здесь M — газодинамическое число Маха. Используя последнее уравнение системы (1.3), исключим из уравнения движения и уравнения энергии плотность заряда q и, интегрируя их, получим

$$mu + p - \frac{E_x^2}{8\pi} = \Pi + \frac{E_{yw}}{4\pi h} \int_0^x E_x dx$$

$$m(c_p T + 0.5u^2) = \varepsilon + j_0 \int_0^x E_x dx$$

Воспользовавшись уравнением состояния, из этих соотношений нетрудно получить выражение для M^2

$$M^2 = \frac{muE_{yw}(\alpha - u)}{4\pi h(\gamma - 1)[j_0(\Pi - mu + E_x^2/8\pi) + (0.5mu^2 - \varepsilon)E_{yw}/4\pi h]}$$

$$\alpha = 4\pi h j_0 (\gamma - 1) / \gamma E_{yw} \quad (1.5)$$

2. Определение границ области течения в плоскости uE_x . Последнее уравнение (1.3), уравнение (1.5) и первое уравнение (1.4) дают возможность исследовать движение в плоскости uE_x . Для этого построим с помощью уравнения (1.5) в плоскости uE_x кривые $M^2 = 0$, $M^2 = 1$, $M^2 = \infty$. Легко видеть, что значению $M^2 = 0$ соответствуют в плоскости uE_x две прямые линии $u = 0$, $u = \alpha$.

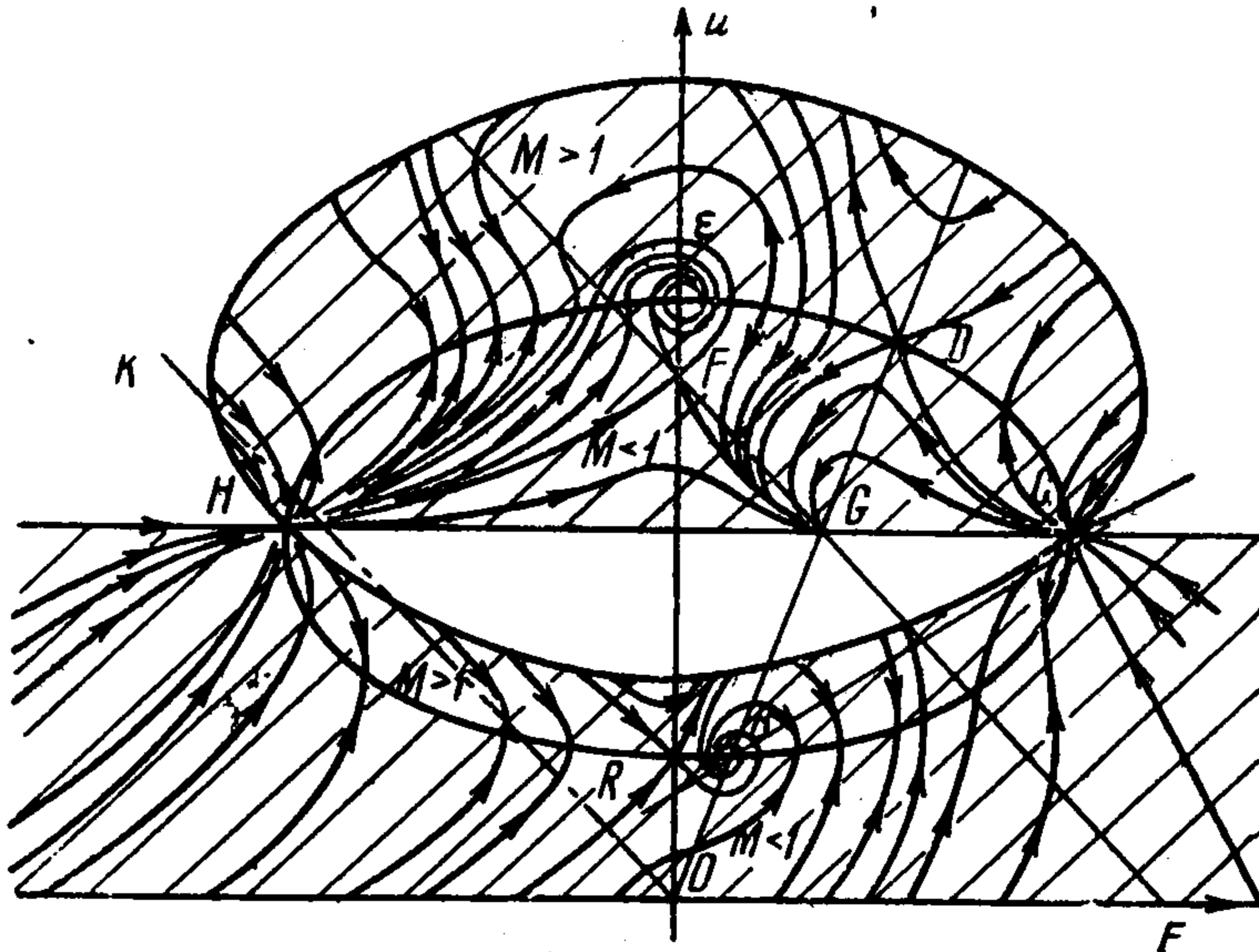
Значение, равное единице, и значение, равное бесконечности, число Маха принимает на линиях, уравнение которых имеет вид

$$au^2 + cE_x^2 + 2du + f = 0 \quad (2.1)$$

Для случая $M^2 = 1$ коэффициенты в уравнении (2.1) принимают следующие значения:

$$a = \frac{m\gamma(\gamma + 1)E_{yw}}{8\pi h(\gamma - 1)}, \quad c = \frac{\gamma j_0}{8\pi}, \quad d = -0.5mj_0(\gamma + 1), \quad f = \gamma \left(j_0 \Pi - \frac{\varepsilon E_{yw}}{4\pi h} \right)$$

Если параметры задачи ($j_0, \Pi, \epsilon, E_{yw}, m, \gamma, h$) таковы, что выполняется соотношение $\epsilon E_{yw} / 4\pi h > j_0 \Pi$, то уравнение (2.1) представляет собой уравнение действительного эллипса. Если же это соотношение не выполняется, то для того, чтобы уравнение (2.1) было уравнением действительной кривой, должно выполняться соотношение $d^2 > af$. Если это соотношение не выполнено, то течение с таким значением E_{yw} не осуществляется. Центр эллипса $M^2 = 1$ расположен в точке с координатами $E_x = 0, u = \alpha$; ось абсцисс пересекает его в точках $E_x = \pm [8\pi (\epsilon E_{yw} / 4\pi h - j_0 \Pi) / j_0]^{1/2}$.

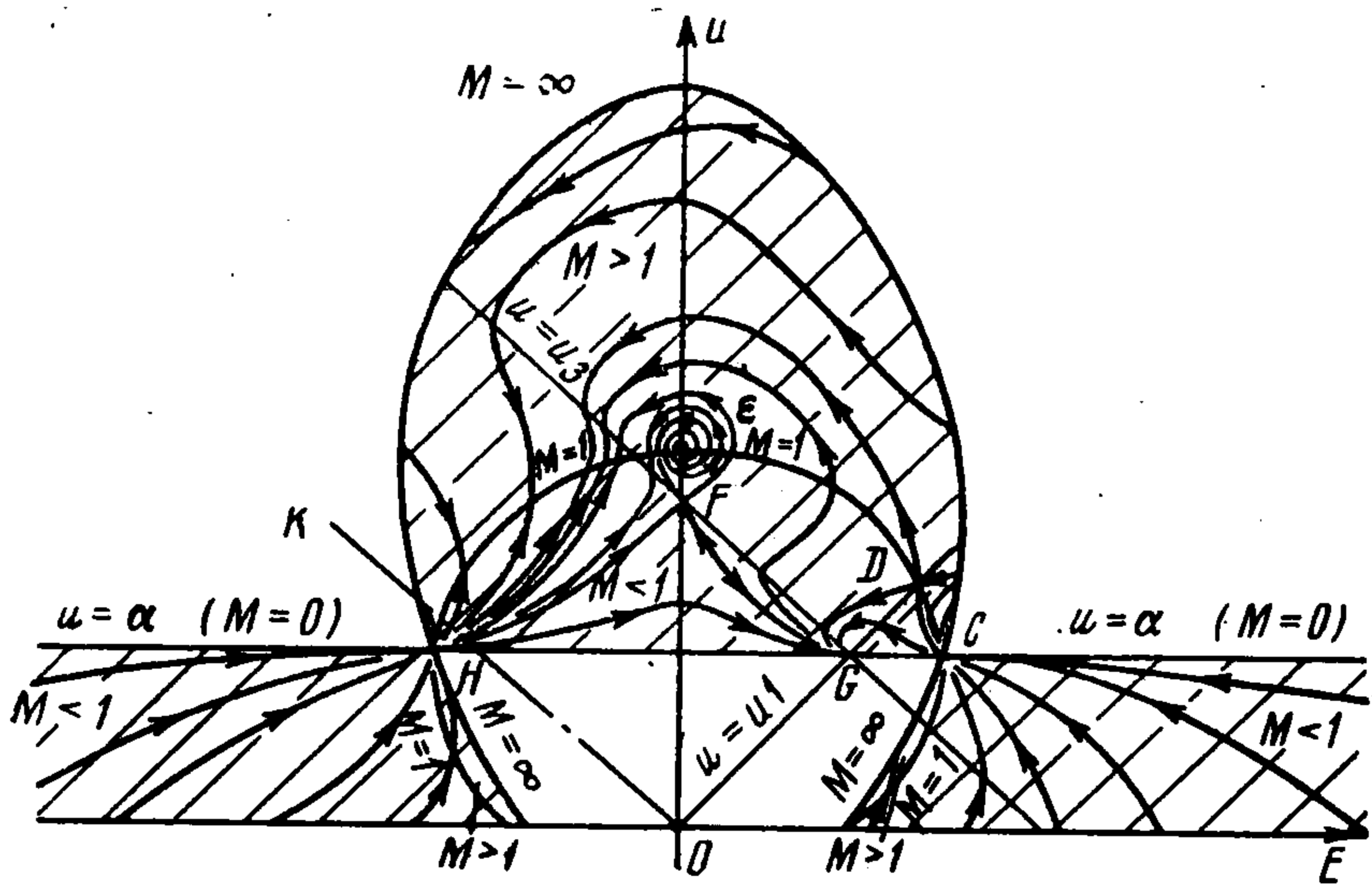


Фиг. 1

В зависимости от соотношения между параметрами задачи эллипс может иметь две точки пересечения с осью абсцисс, может касаться оси и не иметь ни одной общей точки, т. е. может быть расположен выше оси абсцисс. Условие отсутствия общих точек с осью абсцисс имеет вид

$$j_0 \Pi > \epsilon E_{yw} / 4\pi h \tag{2.2}$$

Для случая $M^2 = \infty$ коэффициенты в уравнении (2.1) принимают следующие значения:



Фиг. 2

$$a = m E_{yw} / 8\pi h$$

$$c = j_0 / 8\pi$$

$$d = -m j_0 / 2$$

$$f = j_0 \Pi - \epsilon E_{yw} / 4\pi h$$

Кривая $M^2 = \infty$ представляет собой эллипс с центром в точке $E_x = 0, u = 4\pi h j_0 / E_{yw} = \alpha \gamma / (\gamma - 1)$.

Нетрудно видеть, что центр эллипса $M^2 = \infty$ расположен выше центра эллипса $M^2 = 1$. Нарушение условия (2.2) означает наличие точек пересечения с осью абсцисс. Точки пересечения эллипсов с осью абсцисс совпадают. Пересечение эллипса $M^2 = \infty$ с прямой $u = \alpha$, на которой расположен центр эллипса $M^2 = 1$, происходит в точках, совпадающих с концами горизонтальной полуоси эллипса $M^2 = 1$.

Возможные случаи взаимного расположения линий $M^2 = 0, M^2 = 1$ и $M^2 = \infty$ представлены на фиг. 1, 2. Линии разделяют верхнюю полуплоскость ($u \geq 0$) на ряд областей. Физический смысл имеют области,

в которых в соответствии с уравнением (1.5) значения M^2 положительны. Области, имеющие физический смысл, на фиг. 1,2 заштрихованы.

Семейство линий $M^2 = \text{const}$ представляет собой семейство эллипсов, имеющих общие точки пересечения с прямыми $u = 0$, $u = \alpha$ и непрерывно заполняющих область верхней полуплоскости между линиями $M^2 = 0$ и $M^2 = \infty$. Значение числа Маха в точках пересечения эллипсов определяется угловым коэффициентом интегральной кривой, входящей в эту точку, т. е. принимает то значение, которое имеет число Маха на эллипсе, угловым коэффициент которого в точке пересечения совпадает с угловым коэффициентом интегральной кривой.

3. Исследование особых точек. Изучим поведение интегральных кривых системы уравнений (1.3) в плоскости uE_x . Два последних уравнения (1.3), первое уравнение (1.4) и уравнение (1.5) позволяют получить соотношение

$$\frac{du}{dE_x} = \frac{\gamma j_0 E_x (u - u_1) (\alpha - u)}{4\pi (\gamma - 1) (u - u_3) (au^2 + cE_x^2 + 2du + f)} \quad (3.1)$$

Здесь

$$u_3 = 4\pi h j_0 / E_{yw} - bE_x, \quad au^2 + cE_x^2 + 2du + f = \\ = \gamma (M^2 - 1) / 4\pi h (\gamma - 1)$$

Проведем в плоскости uE_x линии $u = u_1 = (\gamma - 1) bE_x$, $u = u_3 = 4\pi h j_0 / E_{yw} - bE_x$. Прямая $u = u_1$ пересекает эллипс $M^2 = 1$ в точках B и D . Угловым коэффициент прямой $u = u_1$ зависит от значения подвижности b . В том случае, когда выполнено неравенство (2.2), т. е. эллипс $M^2 = 1$ не пересекает ось абсцисс, возможны ситуации, когда имеются две точки пересечения, есть касание и нет общих точек у прямой $u = u_1$ и эллипса $M^2 = 1$. Когда неравенство (2.2) не выполнено, всегда имеются две точки пересечения, причем физический смысл имеет точка D , в которой $u > 0$. Точка D в зависимости от наклона прямой $u = u_1$ может быть расположена выше или ниже линии $u = \alpha$ и находиться на ней.

Прямая $u = u_3$ проходит через точку F — центр эллипса $M^2 = \infty$ и пересекается с прямой $u = u_1$ в точке G .

Прямая $u = \alpha$ является горизонтальной прямой, на которой расположен центр эллипса $M^2 = 1$. Нетрудно видеть, что эта прямая есть интегральная кривая уравнения (3.1).

Уравнение (3.1) имеет восемь особых точек: A и ϵ — точки пересечения эллипса $M^2 = 1$ с осью ординат ($E_x = 0$); B и D — точки пересечения прямой $u = u_1$ и эллипса $M^2 = 1$; F — точка пересечения линии $u = u_3$ с осью ординат, G — точка пересечения линий: $u = \alpha$ и $u = u_3$; C и H — точки пересечения эллипса $M^2 = 1$ и прямой $u = \alpha$. Когда неравенство (2.2) не выполнено, т. е. эллипсы пересекают ось абсцисс, точки A и B расположены в области, не имеющей физического смысла. Введем новые переменные t и z по формулам $u = u^* + z$, $E_x = E_x^* + t$. Здесь u^* и E_x^* — координаты особой точки.

После линеаризации в окрестности особой точки уравнение (3.1) примет вид

$$z' = \frac{c^\circ t + d^\circ z}{a^\circ t + b^\circ z} \quad (3.2)$$

В точке A с координатами

$$E_x(A) = 0, \quad u(A) = \alpha - [\alpha^2 - \gamma(j_0\Pi - \varepsilon E_{yw} / 4\pi h)]^{1/2}$$

коэффициенты уравнения (3.2) принимают следующие значения;

$$c^\circ = \frac{j_0 h u(A)}{m E_{yw} (\gamma + 1) (4\pi h j_0 / E_{yw} - u(A))} > 0, \quad d^\circ = 0, \quad a^\circ = 0, \quad b^\circ = 1$$

При этом

$$(a^\circ - d^\circ)^2 + 4 b^\circ c^\circ > 0, \quad a^\circ d^\circ - b^\circ c^\circ < 0$$

В соответствии с общепринятой классификацией [6] точка A — особая точка типа седла.

В точке ε

$$E_x(\varepsilon) = 0, \quad u(\varepsilon) = \alpha + [\alpha^2 - \gamma(j_0\Pi - \varepsilon E_{yw} / 4\pi h)]^{1/2}$$

коэффициенты в (3.2) имеют вид

$$c^\circ = \frac{j_0 h u(\varepsilon)}{m E_{yw} (\gamma + 1) (4\pi h j_0 / E_{yw} - u(\varepsilon))}, \quad d^\circ = 0, \quad a^\circ = 0, \quad b^\circ = 1$$

Коэффициент c° положителен, если $4\pi h j_0 / E_{yw} > u(\varepsilon)$, т. е. если точка ε расположена ниже, чем точка F ($E(F) = 0$, $u(F) = 4\pi h j_0 / E_{yw}$) — центр эллипса $M^2 = 1$. В этом случае точка ε — особая точка типа седла. Если же $4\pi h j_0 / E_{yw} < u(\varepsilon)$, то $c^\circ < 0$ и точка ε — центр.

Как следует из общей теории дифференциальных уравнений, вопрос о том, является ли точка ε центром, не может быть решен при помощи критерия, основанного на рассмотрении только линейных членов в числителе и знаменателе уравнения (3.1). Исследование общей картины поведения интегральных кривых и изоклины показывает, что точка ε — фокус.

В том случае, когда $4\pi h j_0 / E_{yw} = u(\varepsilon)$, точки F и ε совпадают. При этом значение скорости в этой точке равно u_3 , и вопрос о типе особой точки уравнения (3.1) в этом случае не может быть решен методом линейной теории. Переходя в уравнении (3.2) к переменным z и t , сохраним в знаменателе квадратичные члены. Имеем

$$z' = - \frac{\kappa t}{z(z + bt)}, \quad \kappa = \gamma u_\varepsilon / 4\pi m (\gamma + 1)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде $z = kt$. Для определения углового коэффициента характеристического направления в окрестности точки ε получим соотношение

$$k(k + b) = -\kappa / z$$

При $z \rightarrow 0$ это соотношение справедливо, когда $k \rightarrow -\infty$, т. е. существует характеристическое направление с вертикальной касательной в точке ε .

Координаты точек D и B определяются из условия $u = u_1$ и $M^2 = 1$ и соответственно равны

$$E(D, B) = \beta \pm [\beta^2 - (j_0 \Pi - \varepsilon E_{yw} / 4 \pi h) / \delta]^{1/2}, \quad u(D, B) = (\gamma - 1) b E(D, B) \quad (3.3)$$

$$\delta = j_0 / 8\pi + E_{yw} m (\gamma^2 - 1) / 8\pi h, \quad \beta = m \beta j_0 (\gamma^2 - 1) / \delta$$

Условие существования двух точек пересечения, расположенных в физической области ($u \geq 0$), имеет вид

$$\beta^2 > j_0 \Pi - \varepsilon E_{yw} / 4\pi h$$

Если эллипсы пересекают ось абсцисс, т. е. неравенство (2.2) не выполнено, только точка D расположена в области $u \geq 0$. Коэффициенты уравнения (3.2) в точках B, D принимают следующие значения:

$$c^\circ = -(\gamma - 1) b, \quad d^\circ = 1, \quad d^\circ = -\gamma, \quad b^\circ = (\alpha - u^*) \omega$$

Здесь u^* равно либо $u(D)$, либо $u(B)$ в зависимости от рассматриваемой точки

$$\omega = \gamma m (\gamma + 1) E_{yw} / j_0 E^* h (\gamma - 1)$$

Здесь E^* означает либо $E(B)$, либо $E(D)$

$$(a^\circ - d^\circ)^2 + 4b^\circ c^\circ = (\gamma + 1)^2 - 4(\gamma - 1) b (\alpha - u^*) \omega$$

Если $u^* \geq \alpha$, то это выражение положительно, а $a^\circ d^\circ - b^\circ c^\circ = -\gamma + (\gamma - 1) b \omega (\alpha - u^*) < 0$, т. е. точка типа седла. Поскольку неравенство $u^* \geq \alpha$ может выполняться только для точки D , то точка D является седлом, когда она расположена выше или на линии $u = \alpha$ (фиг. 1).

Если точки B и D расположены ниже линии $u = \alpha$, то они могут быть либо фокусом, либо узлом, либо седлом в зависимости от соотношения между параметрами. Нетрудно показать, что точка D даже в том случае, когда она расположена ниже линии $u = \alpha$, всегда седло. Точка B может быть либо фокусом, либо узлом.

Прямая $u = u_3$ пересекает ось ординат ($E_x = 0$) в точке с координатой $u(F) = 4\pi h j_0 / E_{yw}$. Коэффициенты уравнения (3.2) в точке F имеют вид

$$c^\circ = -j_0^2 h u(F) / E_{yw} (\gamma - 1) \Omega_1, \quad d^\circ = 0, \quad a^\circ = b, \quad b^\circ = 1$$

Здесь Ω_1 — значение выражения $M^2 - 1$ (левая часть уравнения (2.1)) в точке F . Знак коэффициента c° зависит от того, внутри или вне эллипса $M^2 = 1$ расположена точка F . В том случае, когда эллипс $M^2 = 1$ не пересекает ось абсцисс, т. е. справедливо неравенство (2.2), величина Ω_1 положительна для точек, расположенных вне эллипса, и отрицательна

для точек, заключенных внутри эллипса. Если точка F расположена внутри эллипса, то $(a^\circ - d^\circ)^2 + 4b^\circ c^\circ > 0$, $a^\circ d^\circ - b^\circ c^\circ < 0$ и точка F — седло (фиг. 1, 2, 3), если вне эллипса $M^2 = 1$, то, если $b^2 > 4\pi h j_0^2 u(F) / E_{yw} (\gamma - 1) \Omega_1$, то точка F — узел, если выполнено обратное неравенство, то точка F — фокус.

Если эллипс $M^2 = 1$ пересекает ось абсцисс, то точка F — седло, если расположена внутри эллипса ($\Omega_1 > 0$), и либо фокус, либо узел, если расположена вне эллипса $M^2 = 1$.

В точке G ($E_x(G) = \alpha / b (\gamma - 1)$, $u(G) = \alpha$) пересекаются линии $u = u_1$, $u = u_3$, $u = \alpha$. Вопрос о типе этой точки не может быть решен методами линейной теории. Перейдем в уравнении (3.1) к переменным z и t и оставим в числителе и знаменателе главные члены

$$z' = - \Omega_3 \frac{z(z - (\gamma - 1)bt)}{z + bt} \quad (3.4)$$

Здесь $\Omega_3 = j_0 E_x(G) h \gamma / (\gamma - 1) \Omega_2$, Ω_2 — значение выражения $M^2 - 1$ (левой части уравнения (2.1)) в точке G . Определим характеристические направления в окрестности точки G . Для этого будем искать решение уравнения (3.4) в виде $z = kt$. Подставляя в уравнение (3.4), получим

$$k = - \Omega_3 \frac{z(k - (\gamma - 1)b)}{k + b}$$

При $y \rightarrow 0$ имеем одно значение $k = 0$, соответствующее решению $u = \alpha$. Второе значение $k \rightarrow -b$, когда $y \rightarrow 0$, т. е. интегральная кривая касается линии $u = u_3$.

Особые точки C и H имеют соответственно координаты

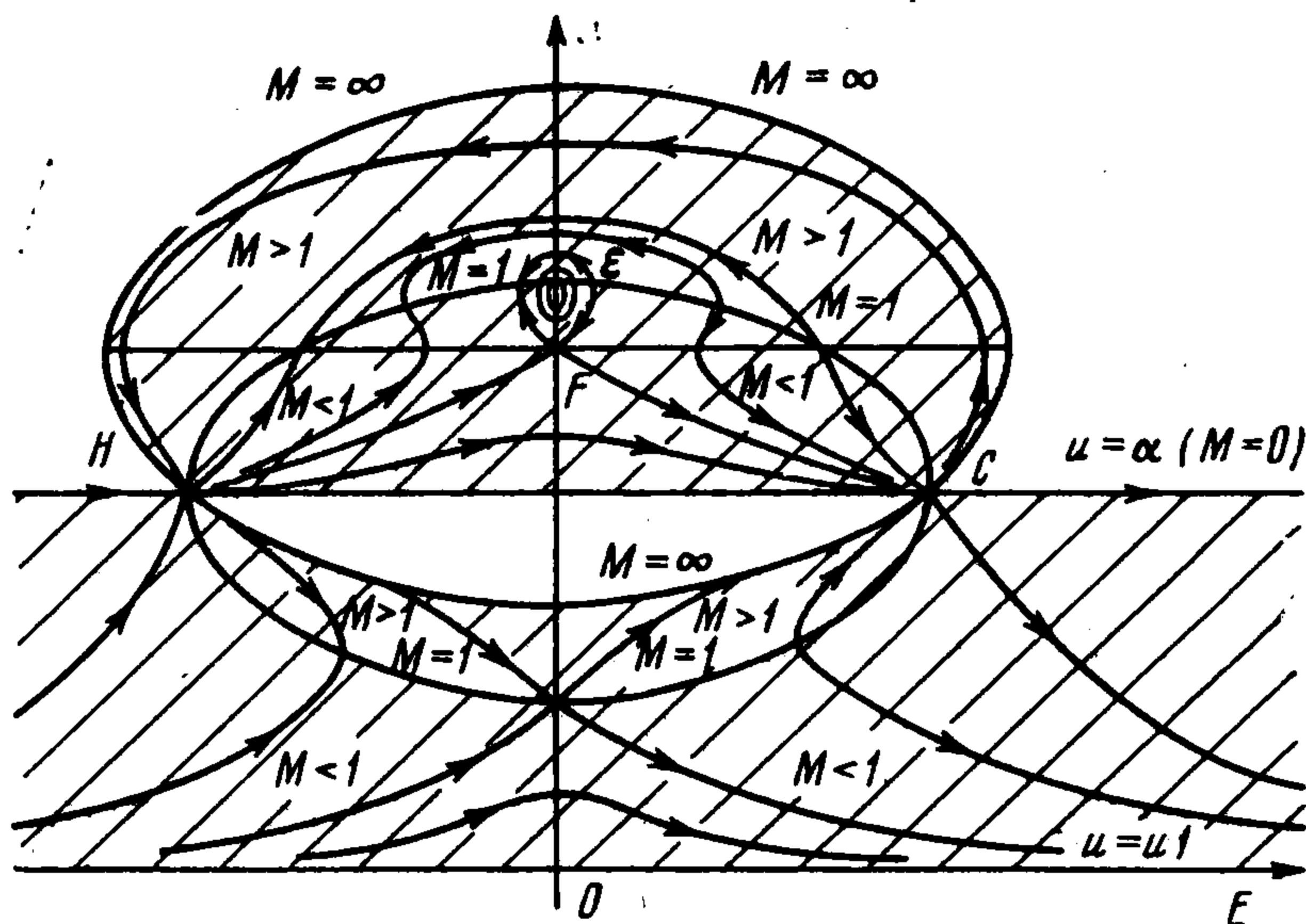
$$E(C, H) = \pm \left[\frac{4\pi m (\gamma + 1) \alpha}{\gamma} + \frac{8\pi}{j_0} \left(\frac{\epsilon E_{yw}}{4\pi h} - j_0 \Pi \right) \right]^{1/2}$$

Коэффициенты уравнения (3.2) принимают вид $c^\circ = 0$, $d^\circ = 1$, $a^\circ = 1$, $b^\circ = 0$

Точки C и H — узлы, так как выполняются соотношения

$$(a^\circ - d^\circ)^2 + 4b^\circ c^\circ > 0, \quad a^\circ d^\circ - b^\circ c^\circ > 0$$

Линии $M^2 = 1$, $E_x = 0$, $u = u_1$, $u = u_3$, $u = \alpha$ разделяют верхнюю полуплоскость на ряд областей, в каждой из которых нетрудно в соответствии с уравнением (3.1) установить знак du / dE_x , т. е. знак угловых коэффициентов интегральных кривых. Кроме того, на перечисленных линиях известны угловые коэффициенты интегральных кривых. Интегральные кривые пересекают линии $E_x = 0$ и $u = u_1$ с нулевой касательной. Линия $u = \alpha$ есть интегральная кривая уравнения (3.1). Другие ин-



Фиг. 3

тегральные кривые могут пересекать ее только в особых точках C , G , H . На линиях $u = u_3$ и $M^2 = 1$ интегральные кривые имеют вертикальную касательную. Зная наклон интегральных кривых в различных областях, типы особых точек и значения производных на особых линиях, можно изобразить качественную картину поведения интегральных кривых системы уравнений (1.3) в плоскости uE_x . На фиг. 1, 2 представлены различные случаи расположения эллипсов $M^2 = 1$ и $M^2 = \infty$, особых точек и особых линий.

Особый интерес представляет случай, когда подвижность заряженных частиц b равна нулю (фиг. 3). Картина поведения интегральных кривых получается при этом как частный случай предыдущего исследования. Прямая $u = u_1$ вырождается в ось абсцисс, прямая $u = u_3 = 4\pi h j_0 / E_{yw}$ — в горизонтальную линию, проходящую через точку F . Особые точки B , G и D исчезают. Из уравнения (3.1) в этом случае сразу следует, что картина интегральных кривых полностью симметрична относительно оси ординат ($E_x = 0$), поэтому точка ϵ обязательно центр.

Выражая из уравнения закона Ома плотность электрического заряда q и подставляя ее в последнее уравнение (1.3), получим

$$E_x' = \frac{E_{yw} (u_3 - u)}{h (u + bE_x)}$$

Это уравнение совместно с уравнением (3.1) позволяет определить, как изменяются параметры потока при движении вдоль канала. Направление изменения скорости и продольного электрического поля показано стрелками на интегральных кривых.

В общем случае при движении вдоль канала (движение в плоскости uE_x в направлениях, указанных стрелками) может быть достигнуто число Маха, равное единице (стрелки упираются в эллипс $M^2 = 1$). Если при этом интегральные кривые не попадают в особые точки, то такая ситуация реализуется только в конце канала. Непрерывный переход через скорость звука в точках, отличных от особых, невозможен. Было показано, что точки A и D всегда особые точки типа седла. В них, вообще говоря, возможен переход из дозвукового режима в сверхзвуковой и обратно. В том случае, когда точка F расположена вне эллипса $M^2 = 1$, точка ϵ — тоже седловая особая точка и в ней тоже возможны такие переходы. Точки C и H — всегда узлы. Направление стрелок на интегральных кривых показывает, что переход через скорость звука в этих точках не осуществляется. В том случае, когда точки B и ϵ — фокусы, интегральные кривые, приближаясь к ним, обязательно пересекут линию $M^2 = 1$ в точках, отличных от B и ϵ , что соответствует либо концу канала, либо нарушению непрерывности течения. В том случае, когда не выполнено неравенство (2.2), т. е. эллипсы пересекают ось абсцисс, переход через звук возможен только в точке A (фиг. 2). Когда подвижность b равна нулю (фиг. 3), переход через скорость звука возможен только в точке A . Если же эллипсы пересекают ось абсцисс, то в случае нулевой подвижности переход через звук невозможен нигде.

На фиг. 1, 2 проведена линия OK , на которой выполняется соотношение $u = -bE_x$. Слева от прямой OK значение плотности электрического тока отрицательно ($j_0 < 0$), справа — положительно ($j_0 > 0$). Область, заключенная между линией OK и осью ординат, соответствует генераторному режиму ($j_0 E_x < 0$, $j_0 > 0$), область положительных значений E_x и область слева от линии OK соответствует ускорительному режиму ($j_0 E_x > 0$). Точке, в которой достигается значение скорости $u = -bE_x$, должен соответствовать конец канала, так как из предпоследнего уравнения (1.3) следует, что в этой точке $q = \infty$ (величины u' , M' , E' также принимают бесконечные значения).

Отметим, что когда величина E_{yw} стремится к нулю, эллипсы $M^2 = 1$ и $M^2 = \infty$ превращаются в параболы, и картина поведения интегральных кривых принимает вид, приведенный работе [5].

Теоретически вопрос о течении газа с нулевой подвижностью рассмотрен в работах [4,7]. Выводы о том, что решение симметрично относительно оси ординат ($E_x = 0$), об ограниченности скорости течения и о характере изменения скорости и электрического поля при движении вдоль канала согласуются с результатами работы [4].

В заключение автор выражает благодарность Г. А. Любимову и А. Е. Якубенко за обсуждение.

Поступила 6 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Гурдин М., Баррето Э., Хан М. Характеристики электрогазодинамических генераторов. В сб.: «Прикладная магнитная гидродинамика». М., «Мир», 1965.
2. Kahn В. К., Gourdin M. G. Electrogasdynamic power generation. AIAA Journal, 1964, vol. 2, No. 8.
3. Grandmaier H. E. Radial space charge fields in electro-fluid dynamic generators. AIAA Journal, 1967, vol. 5, No. 5.
4. Grandmaier H. E. Electrofluid-dynamic generator performance limits. AIAA Journal, 1968, vol. 6, No. 6.
5. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Одномерные течения в электрогидродинамике, ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
6. Трикоми Ф. Дж. Дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Гогосов В. В., Полянский В. А., Семенова И. П., Якубенко А. Е. Исследование электрогидродинамических течений при больших электрических числах Рейнольдса. ПМТФ, 1969, № 1.