

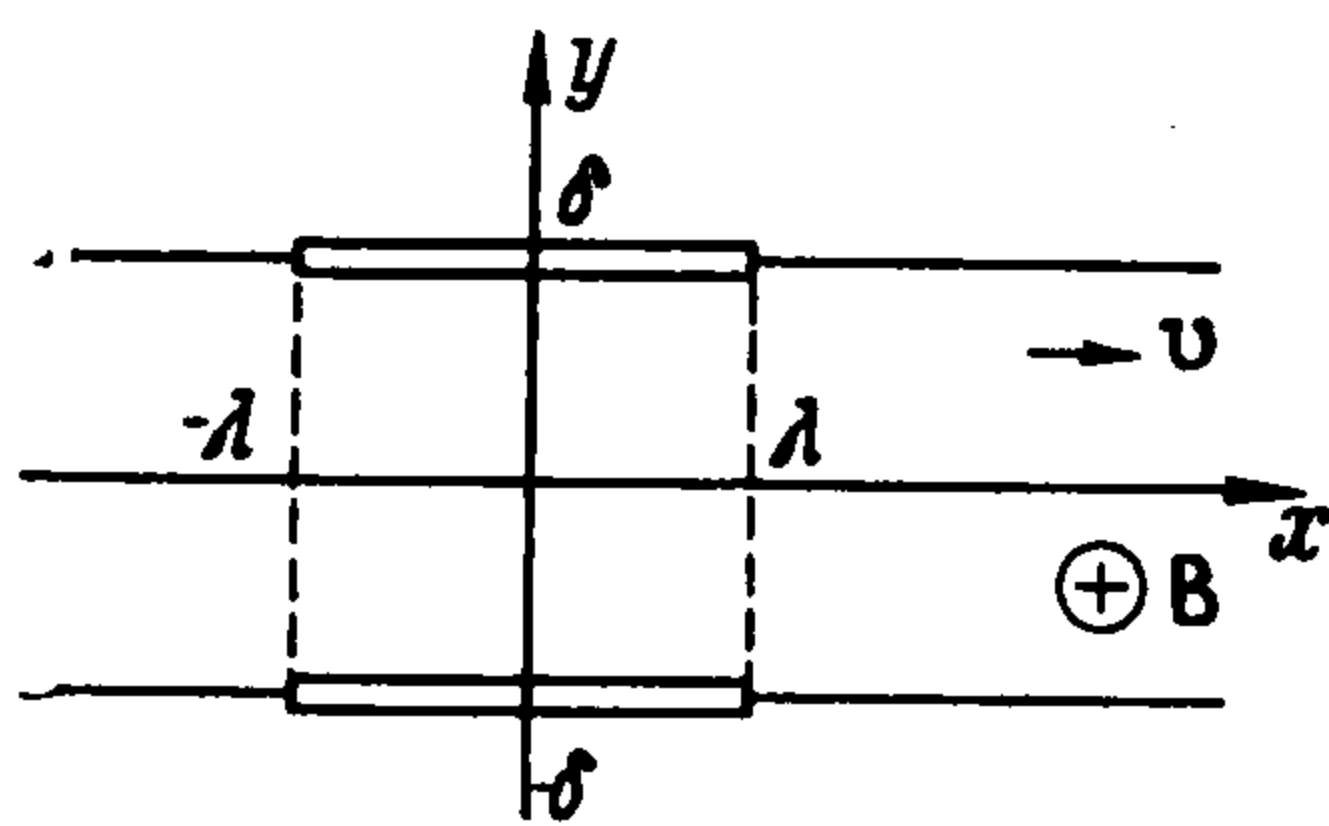
ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕНЗОРА УДЕЛЬНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ РАБОЧЕГО ВЕЩЕСТВА В МАГНИТНОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

К. А. Лурье

(Ленинград)

Рассматривается задача, поставленная и частично исследованная ранее [1, 2]. Изучаются условия, которым следует подчинить распределение удельного сопротивления рабочего вещества в канале с конечными электродами для того, чтобы ток во внешней цепи достигал максимального значения. Удельное сопротивление считается тензорной функцией координат; тензор предполагается симметричным, а его главные значения — кусочно-непрерывно дифференцируемыми функциями.

1. Постановка задачи. Рассматривается плоский канал (фиг. 1) шириной 2δ , стенки которого диэлектрические повсюду, за исключением двух



Фиг. 1

участков одинаковой длины 2λ , расположенных на противоположных сторонах канала один против другого и изготовленных из идеально проводящего материала. Проводящие участки соединены один с другим через нагрузку R .

В канале со скоростью $v(V(y), 0, 0)$ движется рабочее вещество, которое характеризуется тензором удельного сопротивления $P_0(x, y)$, меняющимся от точки к точке. Этот тензор будем предполагать симметричным; пусть $\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)$ будут его главные значения, а α, β — соответствующие главные оси. Если обозначить через $\gamma(x, y)$ угол между положительным направлением оси x и осью α , то декартовы составляющие тензора P_0 найдутся по формулам

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \frac{1}{2} [\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\gamma], & \rho_{yy} &= \frac{1}{2} [\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\gamma] \\ \rho_{xy} &= \rho_{yx} = \frac{1}{2} (\rho_1 - \rho_2) \sin 2\gamma \end{aligned} \quad (1.1)$$

При наложении магнитного поля $B(0, 0, -B(x))$ в канале протекает электрический ток плотности j (декартовы составляющие этого вектора будем обозначать через ζ^1, ζ^2), а через внешнюю цепь — ток I , определяемый по формуле

$$I = \int_{-\lambda}^{\lambda} \zeta^2(x, \pm \delta) dx \quad (1.2)$$

¹ Предполагается, что оси α и β составляют правую систему.

Уравнения, описывающие распределение тока в канале, представлены в форме [1,2]

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{P}_0 \cdot \mathbf{j} = -\operatorname{grad} z^1 + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (1.3)$$

Здесь z^1 означает потенциал электрического поля.

Если ввести функцию тока $z^2(x, y)$ соотношением $\mathbf{j} = -\operatorname{rot} \mathbf{i}_3 z^2$, то уравнения (1.3) запишутся в следующей стандартной форме (используются сокращенные обозначения производных z_x^1, z_y^1 и т. д.);

$$\begin{aligned} z_x^1 &= -\rho_{xx} \zeta^1 - \rho_{xy} \zeta^2 & z_x^2 &= \zeta^2 \\ z_y^1 &= -\rho_{yx} \zeta^1 - \rho_{yy} \zeta^2 + c^{-1} VB, & z_y^2 &= -\zeta^1 \end{aligned} \quad (1.4)$$

Соотношение (1.2) примет вид

$$I = z^2(\lambda, \pm \delta) - z^2(-\lambda, \pm \delta) \quad (1.5)$$

К уравнениям (1.4) присоединяются граничные условия, выражающие свойства стенок канала, а также условия на бесконечности и закон Ома для внешней цепи; эти условия имеют вид

$$z^1(x, \pm \delta) = z_{\pm}^1 = \text{const} \quad (\text{на электродах}) \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} z^2(x, \pm \delta)|_{x>\lambda} = z_+^2 = \text{const}, \quad z^2(x, \pm \delta)|_{x<-\lambda} = z_-^2 = \text{const} \quad (\text{на изоляторах}) \\ z_x^2(\pm \infty, y) = z_y^2(\pm \infty, y) = 0, \quad z_+^1 - z_-^1 = R(z_+^2 - z_-^2) \end{aligned}$$

Ставится задача об определении пары кусочно-непрерывно дифференцируемых функций $\rho_1(x, y), \rho_2(x, y)$, подчиненных неравенствами

$$0 < \rho_{\min} \leq \rho_i(x, y) \leq \rho_{\max} < \infty, \quad i = 1, 2 \quad (1.7)$$

и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции $\gamma(x, y)$ таким образом, чтобы функционал (1.5) принимал наибольшее возможное значение.

Сформулированная задача отличается от задач, рассмотренных в [1, 2], тензорным характером удельного сопротивления рабочего вещества. Как выяснится в дальнейшем, это обстоятельство имеет важное значение (в интересных для практики случаях оптимальное распределение существует в классе тензорных функций и отсутствует в классе скалярных функций).

2. Необходимые условия стационарности. Введем множители Лагранжа $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$, соответствующие четырем уравнениям (1.4), и составим функцию H , выразив предварительно декартовы составляющие тензора \mathbf{P}_0 через управляющие функции ρ_1, ρ_2, γ по формулам (1.1). Будем иметь

$$\begin{aligned} H &= -\frac{1}{2} \xi_1 \{[\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\gamma] \zeta^1 + (\rho_1 - \rho_2) \sin 2\gamma \zeta^2\} - \\ &- \frac{1}{2} \eta_1 \{(\rho_1 - \rho_2) \sin 2\gamma \zeta^1 + [\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\gamma] \zeta^2 - c^{-1} VB\} + \\ &+ \xi_2 \zeta^2 - \eta_2 \zeta^1 - \sum_{i=1}^2 \mu_i [(\rho_{\max} - \rho_i)(\rho_i - \rho_{\min}) - \rho_i^2] \end{aligned} \quad (2.1)$$

Множители $\mu_i, i = 1, 2$, соответствуют ограничениям (1.7), записанным в форме эквивалентных равенств [3].

Условия стационарности даются формулами [3]

$$\xi_{1x} + \eta_{1y} = 0, \quad \xi_{2x} + \eta_{2y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\partial H / \partial \zeta_1 = 0, \quad \partial H / \partial \zeta^2 = 0 \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \partial H / \partial \rho_1 = 0, \quad \partial H / \partial \rho_2 = 0, \quad \partial H / \partial \gamma = 0 \\ \partial H / \partial \rho_{1*} = 0, \quad \partial H / \partial \rho_{2*} = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введем функции $\omega_1(x, y)$, $\omega_2(x, y)$ соотношениями

$$\xi_1 = -\omega_{1y}, \quad \xi_2 = -\omega_{2y}; \quad \eta_1 = \omega_{1x}, \quad \eta_2 = \omega_{2x} \quad (2.5)$$

Уравнения (2.2) при этом удовлетворяются тождественно; что касается уравнений (2.3) и (2.4), то их можно представить в форме (опускаем легко воспроизводимые выкладки)

$$\rho_2 \omega_{1\alpha} + \omega_{2\beta} = 0 \quad (2.6)$$

$$\rho_1 \omega_{1\beta} - \omega_{2\alpha} = 0 \quad (2.7)$$

$$\rho_1^{-1} j_\alpha \omega_{2\alpha} + \mu_1 (2\rho_1 - \rho_{\max} - \rho_{\min}) = 0 \quad (2.8)$$

$$\rho_2^{-1} j_\beta \omega_{2\beta} + \mu_2 (2\rho_2 - \rho_{\max} - \rho_{\min}) = 0$$

$$(\rho_1 - \rho_2) (\rho_1 \omega_{2\beta} j_\alpha + \rho_2 \omega_{2\alpha} j_\beta) = 0 \quad (2.9)$$

$$\mu_1 \rho_{1*} = 0, \quad \mu_2 \rho_{2*} = 0 \quad (2.10)$$

Здесь

$$\omega_{i\alpha} = \omega_{ix} \cos \gamma + \omega_{iy} \sin \gamma, \quad \omega_{i\beta} = -\omega_{ix} \sin \gamma + \omega_{iy} \cos \gamma \quad (i = 1, 2) \quad (2.11)$$

$$j_\alpha = \zeta^1 \cos \gamma + \zeta^2 \sin \gamma, \quad j_\beta = -\zeta^1 \sin \gamma + \zeta^2 \cos \gamma \quad (2.12)$$

Функции $\omega_{i\alpha}$, $\omega_{i\beta}$, и j_α , j_β представляют физические составляющие векторов $\text{grad } \omega_i$ и \mathbf{j} по осям α и β .

Граничные условия для функций $\omega_i(x, y)$ ($i = 1, 2$) составляются с учетом соотношений (1.5) и (1.6) (см. [1]). Имеем

$$\omega_2(x, \pm \delta) = \omega_{2\pm} = \text{const} \quad \text{на электродах} \quad (2.13)$$

$$\omega_1(x, \pm \delta) |_{x > \lambda} = \omega_{1+} = \text{const}, \quad \omega_1(x, \pm \delta) |_{x < -\lambda} = \omega_{1-} = \text{const} \quad \text{на изоляторах}$$

$$\text{grad } \omega_1 = \text{grad } \omega_2 = 0 \quad \text{на бесконечности}$$

$$\omega_{2+} - \omega_{2-} + 1 = R (\omega_{1+} - \omega_{1-})$$

Соотношения (2.6), (2.7), (2.13) для функций ω_1 , ω_2 можно интерпретировать как уравнения и граничные условия, описывающие распределение в канале фиктивных токов с плотностью $-P_0^{-1} \cdot \text{grad } \omega_2$, обусловленных «разностью потенциалов» $\omega_{2+} - \omega_{2-} + 1$ на электродах при отсутствии других внешних электродвижущих сил. Функция ω_1 при этом играет роль соответствующей «функции тока».

3. Необходимое условие Вейерштрасса. Чтобы составить это условие, проще всего воспользоваться следующим выражением для приращения δI функционала I , обусловленного произвольной вариацией δP тензора P_0 :

$$\delta I = - \iint_S [\xi_1 (\delta \rho_{xx} Z^1 + \delta \rho_{xy} Z^2) + \eta_1 (\delta \rho_{yx} Z^1 + \delta \rho_{yy} Z^2)] dx dy \quad (3.1)$$

Здесь Z^1 , Z^2 означают декартовы составляющие вектора плотности тока \mathbf{J} , отвечающего допустимому тензору удельного сопротивления $P =$

$= P_0 + \delta P$ (вообще условимся в дальнейшем употреблять большие буквы для обозначения допустимых величин, а соответствующие малые буквы — для оптимальных. Исключение: оптимальный тензор удельного сопротивления обозначен P_0 , допустимый P).

Формула (3.1) является точной; она легко выводится из исходных уравнений с учетом условий стационарности.

Выражение под знаком интеграла в (3.1) можно с учетом формул (2.5) — (2.7) преобразовать к виду

$$- (P_0^{-1} \cdot \text{grad } \omega_2) (\delta P \cdot J)$$

Если теперь ввести диаду

$$J (P_0^{-1} \cdot \text{grad } \omega_2)$$

то для приращения δI функционала получим следующую формулу:

$$\delta I = \iint_S S_p (\delta P \cdot J (P_0^{-1} \cdot \text{grad } \omega_2)) dx dy \quad (3.2)$$

Чтобы функционал I достигал на управлении P_0 максимума, необходимо и достаточно величину δI сделать неположительной для всех допустимых δP и J .

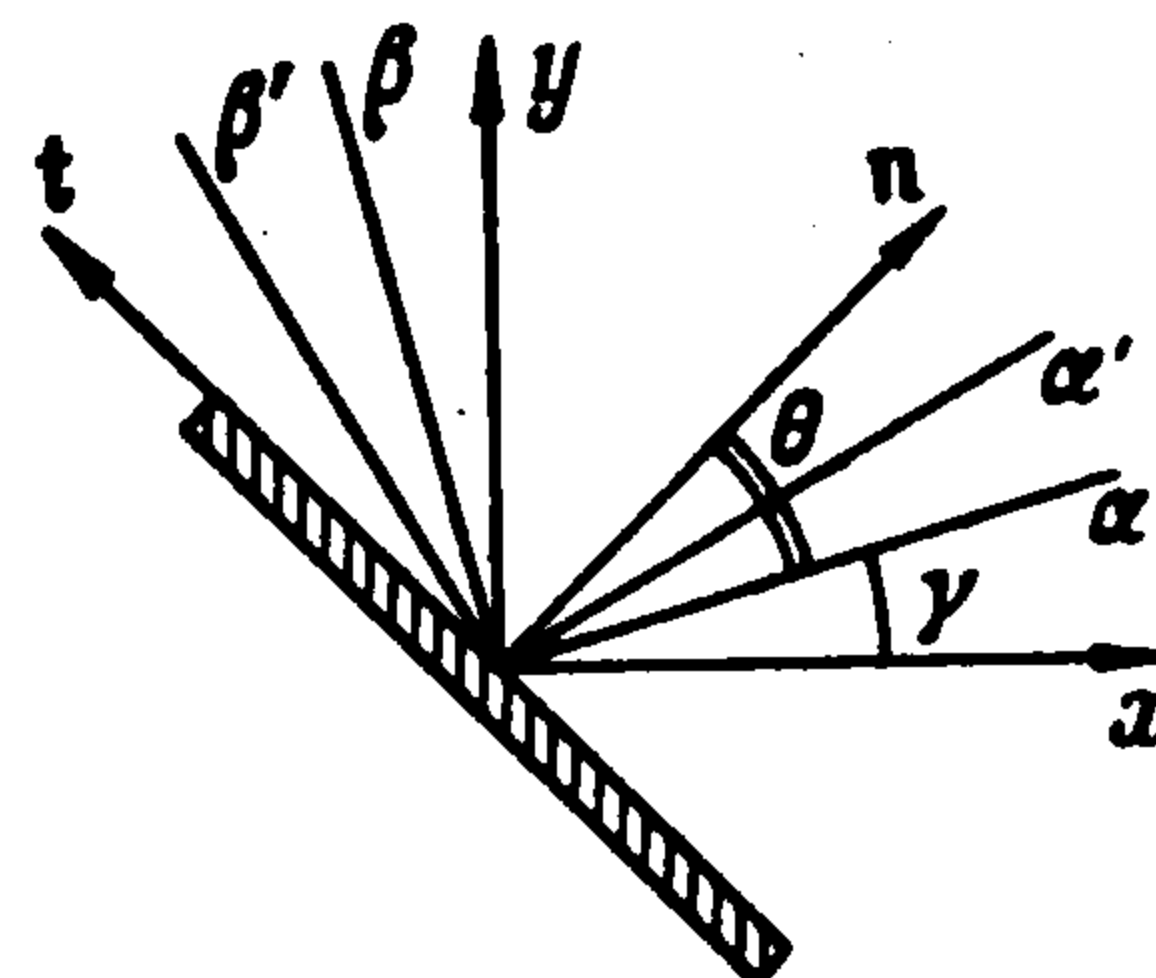
Вектор J , входящий в выражение (3.2), определяется в результате решения исходной краевой задачи, в которой тензор P_0 заменен допустимым тензором P . Трудности решения этой задачи не меньше, чем трудности решения первоначальной; условие $\delta I \leq 0$ при столь общем способе варьирования оказывается неэффективным. Чтобы получить эффективное условие, следует специализировать вариацию тензора δP ; именно предположим, что эта вариация отлична от нуля только в пределах узкой полоски шириной b и длиной l ($\epsilon = b/l$ — малый параметр задачи). Допустимый тензор $P = P_0 + \delta P$ должен удовлетворять ограничениям (4.7); в остальном он произволен.

Для такой специальной вариации нужно, очевидно, вычислить вектор J только в пределах полоски, причем достаточно найти главную линейную по ϵ часть этого вектора. Если полоска достаточно узка и если поле вектора j внутри полоски не имеет особенностей, то главную линейную часть вектора J можно вычислить, предполагая, что полоска находится во внешнем однородном поле токов j . При этом приращение δP можно, очевидно, считать постоянным тензором в пределах полоски.

Решение этой последней задачи хорошо известно. Предположим, что полоска ориентирована по оси t и имеет внешнюю нормаль n (фиг. 2), а ее сопротивление характеризуется тензором $P = P_0 + \delta P$. Если полоска помещена в однородное поле токов j , протекающих в среде с сопротивлением P_0 , то составляющие плотности тока внутри полоски найдутся по формулам

$$J_n = j_n + O(\epsilon) \quad (3.3)$$

$$J_t = j_t + \frac{P_{tt} - P_{tt}}{P_{tt}} j_t + \frac{P_{tn} - P_{tn}}{P_{tt}} j_n + O(\epsilon)$$



Фиг. 2

Эти формулы будут использованы для исключения вектора \mathbf{J} из левой части неравенства

$$\text{Sp} (\delta P \cdot \mathbf{J} (P_0^{-1} \cdot \text{grad } \omega_2)) \leq 0 \quad (3.4)$$

вытекающего теперь из (3.2) и выполняющегося почти всюду как необходимое условие сильного относительного максимума.

Если перейти к главным осям α и β тензора P_0 , то это неравенство можно записать в следующей эквивалентной форме (E означает функцию Вейерштрасса):

$$E = -[(P_{\alpha\alpha} - \rho_1) J_\alpha + P_{\alpha\beta} J_\beta] \rho_1^{-1} \omega_{2\alpha} - [P_{\beta\alpha} J_\alpha + (P_{\beta\beta} - \rho_2) J_\beta] \rho_2^{-1} \omega_{2\beta} \geq 0 \quad (3.5)$$

Составляющие J_α, J_β вектора \mathbf{J} следует выразить через j_α, j_β , а составляющие $P_{\alpha\alpha}, P_{\alpha\beta}, P_{\beta\beta}$, тензора P через величины, характеризующие этот тензор в его собственных главных осях. В результате функция E окажется зависящей от главных значений P_1, P_2 тензора P , от угла $\lambda = \delta\gamma$ между главными осями A и α тензоров P и P_0 , а также от угла θ между направлением n нормали к полоске и осью α (фиг. 2). Остальные величины, входящие в выражение для E , характеризуют оптимальный режим и считаются фиксированными.

Выполнив необходимые вычисления (см. Приложение), приходим к следующей эквивалентной записи неравенства (3.5):

$$M \equiv \frac{P_1 - \rho_1}{\rho_1} K_\alpha \omega_{2\alpha} + \frac{P_2 + \rho_2}{\rho_2} K_\beta \omega_{2\beta} - (P_1 - P_2) (j_\alpha \omega_{2\alpha} - j_\beta \omega_{2\beta}) (1 - \cos 2\lambda) + \\ + (P_1 - P_2) \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\rho_1 \rho_2} (\rho_1 j_\alpha \omega_{2\beta} + \rho_2 j_\beta \omega_{2\alpha}) \sin 2\lambda \leq 0 \quad (3.6)$$

Здесь

$$K_\alpha = j_\alpha [P_2 + \rho_1 + (P_2 - \rho_1) \cos 2\theta] + j_\beta (P_2 - \rho_2) \sin 2\theta \quad (3.7)$$

$$K_\beta = j_\beta [P_1 + \rho_2 - (P_1 - \rho_2) \cos 2\theta] + j_\alpha (P_1 - \rho_1) \sin 2\theta$$

Исследуем неравенство (3.6). В соответствии с условиями (2.10) придется различать:

- (1) неособые режимы: $\mu_1 \neq 0, \mu_2 \neq 0; \rho_{1*} = \rho_{2*} = 0$;
- (2) особые режимы по одной из управляющих функций ρ_1 или ρ_2 : $\mu_1 \neq 0, \mu_2 = 0$ (и тогда $\rho_{1*} = 0$), либо $\mu_2 \neq 0, \mu_1 = 0$ (и тогда $\rho_{2*} = 0$);
- (3) Особые режимы по обоим управляющим функциям ρ_1 и ρ_2 ; при этом $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Последний класс случаев сразу же исключается, поскольку уравнения (2.6) — (2.8) показывают, что при этом $\omega_1 = \text{const}, \omega_2 = \text{const}$ — вариант не представляющий интереса.

4. Неособые режимы. Управляющие функции ρ_1, ρ_2 могут принимать только предельные значения ρ_{\max} или ρ_{\min} . Предположим, что режим управления существенно анизотропный, т. е. $\rho_1 \neq \rho_2$.

Тогда, положив в (3.6) сначала $\lambda = 0, P_1 = \rho_1, P_2 \neq \rho_2$, а затем $\lambda = 0, P_2 = \rho_2, P_1 \neq \rho_1$ и принимая во внимание (2.9), приходим к следующим

неравенствам, характеризующим возможные режимы:

$$\rho_1 = \rho_{\max}, \quad \rho_2 = \rho_{\min}, \quad \text{если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \geq 0, \quad j_\beta \omega_{2\beta} \leq 0 \quad (4.1)$$

$$\rho_1 = \rho_{\min}, \quad \rho_2 = \rho_{\max}, \quad \text{если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \leq 0, \quad j_\beta \omega_{2\beta} \geq 0 \quad (4.2)$$

Условия (4.2) можно было бы получить из (4.1), меняя ролями оси α и β .

Неравенства (4.1), (4.2) необходимы для выполнения неравенства (3.6) покажем, что они и достаточны. Рассматривая условия (4.1) вычислим левую часть неравенства (3.6) при $\rho_1 = \rho_{\max}, \rho_2 = \rho_{\min}$. Пользуясь формулами (3.7) и (2.9), найдем

$$\begin{aligned} M = & \frac{P_1 - \rho_{\max}}{\rho_{\max}} j_\alpha \omega_{2\alpha} [P_2 + \rho_{\max} + (P_2 - \rho_{\max}) \cos 2\theta] + \\ & + \frac{P_2 - \rho_{\min}}{\rho_{\min}} j_\beta \omega_{2\beta} [P_1 + \rho_{\min} - (P_1 - \rho_{\min}) \cos 2\theta] - \\ & - (P_1 - P_2) (j_\alpha \omega_{2\alpha} - j_\beta \omega_{2\beta}) (1 - \cos 2\lambda) \end{aligned}$$

Неравенство $M \leq 0$ должно быть выполнено для любых допустимых P_1, P_2, θ и λ . Имеем

$$\max_\lambda M = \begin{cases} M(\lambda = 0), & \text{если } P_1 \geq P_2 \\ M(\lambda = 0) - 2(P_1 - P_2)(j_\alpha \omega_{2\alpha} - j_\beta \omega_{2\beta}), & \text{если } P_1 \leq P_2 \end{cases}$$

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что неравенство $\max_\lambda M \leq 0$ выполнено в обоих отмеченных случаях, каковы бы ни были допустимые значения P_1, P_2 и θ .

Аналогичное заключение справедливо и относительно режима (4.2).

Приведенное рассуждение показывает, между прочим, что в рассматриваемом случае ориентация полоски варьирования не влияет на форму условий минимума. Этот факт (имеющий место и в других анализируемых ниже случаях) связан с анизотропным характером вариаций управления. Внутри полоски оптимальный тензор P_0 заменяется допустимым тензором P с новыми главными направлениями, которые могут быть произвольными; после этого вращение самой полоски не вносит ничего нового в результат. Положение изменяется, когда переходим к задаче со скалярным управлением (см. [1, 2]): здесь оптимальная скалярная функция ρ заменяется в полоске варьирования допустимым скалярным управлением P ; при этом наклон полоски явно входит в формулу для приращения функционала как единственный фактор, характеризующий известную анизотропию варьирования. В [1] показано, как это влияет на окончательную форму условий минимума в задаче со скалярным управлением.

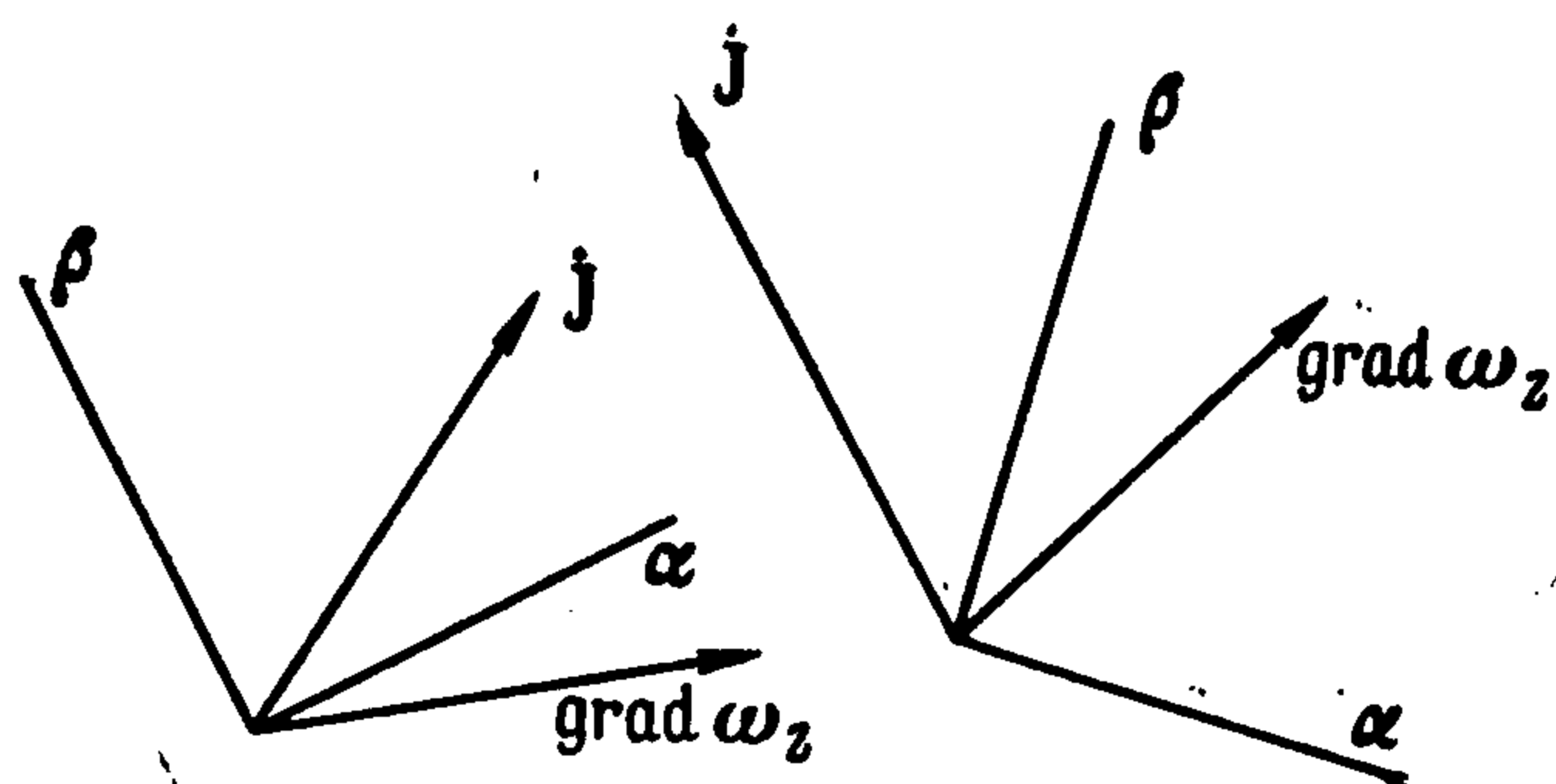
Возвращаясь к неособым анизотропным режимам, заключаем, что их можно характеризовать способами взаимного расположения векторов \mathbf{j} , $\text{grad } \omega_2$ и осей α и β , изображенными на фиг. 3 и 4. При этом векторы \mathbf{j} и $\text{grad } \omega_2$ располагаются в соседних квадрантах, разделенных либо осью α (режим (4.1)), либо осью β (режим (4.2)) (в обоих случаях осью, которой соответствует главное значение ρ_{\max} тензора P_0).

Рассмотрим возможность неособых изотропных режимов. Пусть для определенности $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\max}$. Тогда, очевидно

$$j_\alpha \omega_{2\alpha} \geq 0, \quad j_\beta \omega_{2\beta} \geq 0 \quad (4.3)$$

Эти неравенства легко следуют из (3.6), если положить в нем сначала $\lambda = 0$, а затем последовательно $P_2 = \rho_2$, $P_1 \neq \rho_1$ и $P_1 = \rho_1$, $P_2 \neq \rho_2$.

С другой стороны, уравнение (2.9) при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\max}$ удовлетворяется тождественно, ибо в изотропном режиме любую пару взаимно перпендикулярных направлений можно считать главными направлениями. Отсюда



Фиг. 3

Фиг. 4

следует, что неравенства (4.3) должны соблюдаться для любой пары взаимно перпендикулярных направлений α и β . Последнее возможно лишь при условии, если векторы j и $\text{grad } \omega_2$ связаны равенством

$$j = F \text{grad } \omega_2 \quad (4.4)$$

где $F = F(x, y)$ — неотрицательная функция.

Нетрудно проверить, что неравенство $M \leq 0$ при этом выполняется.

Случай $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\min}$ исчерпывается аналогично; функция F при этом неположительна.

Интересно сравнить условие (4.4) с условием реализации управления $\rho = \rho_{\max}$ в задаче со скалярным управлением. В [1] было показано, что это условие выражается неравенством

$$\chi \leq \arccos p, \quad p = (\rho_{\max} - \rho_{\min}) / (\rho_{\max} + \rho_{\min}) \quad (4.5)$$

где χ означает угол между векторами j и $\text{grad } \omega_2$. Сравнение показывает, что (4.4) эквивалентно требованию $\chi = 0$. Если это требование выполнено, то неравенство (4.5) удовлетворяется; обратно неверно. Результат вполне естествен: рассматривая анизотропные вариации в окрестности изотропного управления, с необходимостью приходим к более жесткому условию минимума.

5. Особые режимы. Предположим, что $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 = 0$. Тогда из (2.8) вытекает, что $j_\beta \omega_{2\beta} = 0$. Пусть $\omega_{2\beta} = 0$; исключая тривиальную возможность $\omega_{2\alpha} = 0$, выводим из уравнения (2.9), что $j_\beta = 0$. Обратно, если $j_\beta = 0$, то исключая тривиальный случай $j_\alpha = 0$, выводим из (2.9), что $\omega_{2\beta} = 0$.

Таким образом, особый случай $\omega_{2\beta} = 0$ характеризуется тем, что одновременно $j_\beta = 0$, т. е. векторы $\text{grad } \omega_2$ и j имеют общее направление с главной осью α тензора P_0 . Знак скалярного произведения $j \cdot \text{grad } \omega_2$ легко устанавливается при помощи неравенства (3.6); получаем

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_{\max}, & \text{ если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \geq 0 \text{ (векторы } j \text{ и } \text{grad } \omega_2 \text{ параллельны)} \\ \rho_1 = \rho_{\min}, & \text{ если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \leq 0 \text{ (векторы } j \text{ и } \text{grad } \omega_2 \text{ антипараллельны)} \end{aligned}$$

Что касается управления ρ_2 , то в рассматриваемом особом режиме оно безразлично. Это обстоятельство имеет общий характер и связано с тем, что если вектор \mathbf{j} направлен вдоль одной из главных осей тензора P_0 , то уравнения (1.4) не зависят от главного значения, соответствующего другой главной оси (для доказательства достаточно записать эти уравнения в главных осях тензора P_0 , см. формулы (A.10) Приложения).

Особый режим $\mu_1 = 0$, $\mu_2 \neq 0$ исчерпывается аналогичными рассуждениями.

Результаты последних трех пунктов суммируем в следующем предложении.

Теорема. Оптимальные управления в задаче п. 1 характеризуются следующими возможными режимами.

1. Неособые управления

1а. Анизотропные

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_{\max}, \quad \rho_2 = \rho_{\min}, \quad \text{если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \geq 0, \quad j_\beta \omega_{2\beta} \leq 0 \\ \rho_1 = \rho_{\min}, \quad \rho_2 = \rho_{\max}, \quad \text{если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \leq 0, \quad j_\beta \omega_{2\beta} \geq 0 \end{aligned}$$

1б. Изотропные

$$\begin{aligned} \rho_1 = \rho_2 = \rho_{\max}, \quad \text{если } \mathbf{j} = F \operatorname{grad} \omega_2, \quad F \geq 0 \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_{\min}, \quad \text{если } \mathbf{j} = F \operatorname{grad} \omega_2, \quad F \leq 0 \end{aligned}$$

2. Особые управления

2а. $\omega_{2\beta} = 0$, $j_\beta = 0$

$$\rho_1 = \begin{cases} \rho_{\max}, & \text{если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \geq 0, \\ \rho_{\min}, & \text{если } j_\alpha \omega_{2\alpha} \leq 0, \end{cases} \quad \rho_2 \text{ безразлично}$$

2б. $\omega_{2\alpha} = 0$, $j_\alpha = 0$

$$\rho_1 \text{ безразлично; } \quad \rho_2 = \begin{cases} \rho_{\max}, & \text{если } j_\beta \omega_{2\beta} \geq 0 \\ \rho_{\min}, & \text{если } j_\beta \omega_{2\beta} \leq 0 \end{cases}$$

В обоих последних случаях можно, в частности, считать $\rho_2 = \rho_1$; тогда приходим к изотропному режиму управления.

6. Условие Вейерштрасса — Эрдманна и условие Вейерштрасса. Рассмотрим условие Вейерштрасса — Эрдманна, выполняющееся на линии раздела областей с различными режимами управления по переменным ρ_1 , ρ_2 , γ . Считая эту линию достаточно гладкой, напишем условие Вейерштрасса — Эрдманна в форме [3].

$$\omega_{1t} [z_n^1]_-^+ + \omega_{2t} [z_n^2]_-^+ = 0 \quad (6.1)$$

Знак $[]_-^+$ есть разность предельных значений соответствующей величины слева и справа от линии раздела; \mathbf{t} и \mathbf{n} означают единичные векторы касательной и нормали к этой линии. Производные ω_{1t} и ω_{2t} непрерывны на линии раздела; поэтому безразлично, с какой стороны от линии берутся предельные значения этих производных.

Преобразуем уравнения (6.1), перейдя при помощи формул типа (2.11) и (2.12) к локальным декартовым координатам α , β , своим на каждой сто-

роне линии; функцию VB будем считать непрерывной. Принимая во внимание непрерывность производных ω_{1t} , ω_{2t} и пользуясь уравнениями (2.6), (2.7), запишем условие (6.1) в форме

$$\begin{aligned} & [\omega_{2\alpha} j_\alpha \cos^2 \theta + \omega_{2\beta} j_\beta \sin^2 \theta + (\rho_1/\rho_2) \omega_{2\beta} j_\alpha \sin \theta \cos \theta + \\ & + (\rho_2/\rho_1) \omega_{2\alpha} j_\beta \sin \theta \cos \theta]_-^+ - [\omega_{2\alpha} j_\alpha \sin^2 \theta + \omega_{2\beta} j_\beta \cos^2 \theta - \\ & - \omega_{2\beta} j_\alpha \sin \theta \cos \theta - \omega_{2\alpha} j_\beta \sin \theta \cos \theta]_-^+ = 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

При дальнейших преобразованиях этого равенства следует иметь в виду возможные различия между режимами управления по разные стороны скачка. Рассмотрим несколько возникающих здесь случаев.

(1а), (1а) — оба режима неособые анизотропные; при этом

$$\rho_{1+} = \rho_{\max}, \quad \rho_{2+} = \rho_{\min}; \quad \rho_{1-} = \rho_{\min}, \quad \rho_{2-} = \rho_{\max} \quad (6.3)$$

Пользуясь условием стационарности (2.9) для левых и правых предельных значений, приведем (6.2) к форме

$$[\cos 2\theta (j_\alpha \omega_{2\alpha} - j_\beta \omega_{2\beta})]_-^+ = 0 \quad (6.4)$$

(1а), (1б) — анизотропный и изотропный режимы; при этом

$$\rho_{1+} = \rho_{\max}, \quad \rho_{2+} = \rho_{\min}; \quad \rho_{1-} = \rho_{\max}, \quad \rho_{2-} = \rho_{\max} \quad (6.5)$$

Условие стационарности (2.9) эффективно только для анизотропного режима: для изотропного оно удовлетворяется тождественно.

Получаем

$$[\cos 2\theta (j_\alpha \omega_{2\alpha} - j_\beta \omega_{2\beta})]_-^+ - \sin 2\theta (j_\alpha \omega_{2\beta} + j_\beta \omega_{2\alpha})_- = 0 \quad (6.6)$$

Этот результат не зависит от того, какие именно предельные значения (ρ_{\max} или ρ_{\min}) принимают функции ρ_1 , ρ_2 по обе стороны от линии скачка (разумеется, в пределах сочетания (1а) и (1б) режимов управления).

(1б), (1б) — оба режима изотропны. При этом

$$\rho_{1+} = \rho_{\max}, \quad \rho_{2+} = \rho_{\max}; \quad \rho_{1-} = \rho_{\min}, \quad \rho_{2-} = \rho_{\min} \quad (6.7)$$

Условие (6.1) записывается в форме

$$[\cos 2\theta (j_\alpha \omega_{2\alpha} - j_\beta \omega_{2\beta})]_-^+ + [\sin 2\theta (j_\alpha \omega_{2\beta} + j_\beta \omega_{2\alpha})]_-^+ = 0 \quad (6.8)$$

Аналогичные формулы характеризуют линии раздела неособых и особых режимов и т. д.

Соотношения (6.4), (6.6), (6.8) и т. д. должны быть согласованы с условиями стационарности (2.9) и с неравенствами Вейерштрасса (теорема), которым удовлетворяют предельные значения векторов \mathbf{j} и $\text{grad } \omega_2$. Требование, чтобы такое согласование имело место, выделяет определенные сочетания предельных значений, удовлетворяющие всем необходимым условиям минимума.

Чтобы получить нужные соотношения, воспользуемся формулами (А.11) Приложения, связывающими предельные значения составляющих векторов \mathbf{j}_+ и \mathbf{j}_- , а также векторов $(\text{grad } \omega_2)_+$ и $(\text{grad } \omega_2)_-$.

Рассмотрим переход (1а), (1а), определяемый (6.3). Пользуясь упомянутыми формулами, составим равенство (2.9) для минус-предельных значений; после преобразований, в ходе которых учитывается условие (2.9) для плюс-предельных значений, получим равенство

$$\rho_{\min}\rho_{\max}a \cos(\theta_+ - \theta_-)(j_\alpha\omega_{2\alpha} - j_\beta\omega_{2\beta})_+ = 0 \quad (6.9)$$

$$a = \rho_{\min} \sin \theta_- \cos \theta_+ - \rho_{\max} \cos \theta_- \sin \theta_+$$

Равенство (6.9) показывает, что возможны два случая: $a = 0$ и $(j_\alpha\omega_{2\alpha} - j_\beta\omega_{2\beta})_+ = 0$ (случай $\cos(\theta_+ - \theta_-) = 0$ тривиален, так как отвечает отсутствию скачка). С другой стороны, согласно теореме, должны быть выполнены неравенства

$$(j_\alpha\omega_{2\alpha})_+ \geq 0, \quad (j_\beta\omega_{2\beta})_+ \leq 0; \quad (j_\alpha\omega_{2\alpha})_- \leq 0, \quad (j_\beta\omega_{2\beta})_- \geq 0 \quad (6.10)$$

Вторую пару этих неравенств можно с учетом формул (А.11) Приложения и условия (2.9) для плюс-предельных значений преобразовать к виду

$$(j_\alpha\omega_{2\alpha})_+ \rho_{\max}\rho_{\min} \cos^2(\theta_+ - \theta_-) + a^2 (j_\beta\omega_{2\beta})_+ \leq 0 \quad (6.11)$$

$$(j_\beta\omega_{2\beta})_+ \rho_{\max}\rho_{\min} \cos^2(\theta_+ - \theta_-) + a^2 (j_\alpha\omega_{2\alpha})_+ \geq 0$$

Если $a = 0$, то эти неравенства совместимы с первой парой неравенств (6.10) лишь в случае, если $(j_\alpha\omega_{2\alpha})_+ = (j_\beta\omega_{2\beta})_+ = 0$. Этот же результат получается и тогда, когда $(j_\alpha\omega_{2\alpha})_+ - (j_\beta\omega_{2\beta})_+ = 0$. Принимая во внимание формулу (2.9) для плюс-предельных значений, приходим к заключению о том, что на линии раздела между неособыми существенно анизотропными режимами выполняются следующие условия:

$$\text{либо } \mathbf{j}_+ = \mathbf{j}_- = 0, \quad \text{либо } (\text{grad } \omega_2)_+ = (\text{grad } \omega_2)_- = 0$$

Рассмотрим переход (1а), (1б) согласно (6.5). Должны иметь (теорема)

$$(j_\alpha\omega_{2\alpha})_+ \geq 0, \quad (j_\beta\omega_{2\beta})_+ \leq 0, \quad (j_\alpha)_- = F(\omega_{2\alpha})_-, \quad (j_\beta)_- = F(\omega_{2\beta})_-, \quad F \geq 0 \quad (6.12)$$

Если $F > 0$ то, поступая как при выводе соотношения (6.9) получим равенство

$$\rho_{\max}(j_\alpha\omega_{2\beta})_+ - \rho_{\min}(j_\beta\omega_{2\alpha})_+ = 0$$

Сравнивая его с условием (2.9) для плюс-предельных значений, находим

$$(j_\alpha\omega_{2\beta})_+ = (j_\beta\omega_{2\alpha})_+ = 0$$

Отсюда следует, что либо $(j_\beta)_+ = 0$, $(\omega_{2\beta})_+ = 0$, либо $(j_\alpha)_+ = 0$, $(\omega_{2\alpha})_+ = 0$. Вторая возможность в сочетании с условием $(j_\beta\omega_{2\beta})_+ \leq 0$ приводит к неравенству $(j_\beta\omega_{2\beta})_- < 0$ (это нетрудно показать с помощью формул (А.11) Приложения). Последнее неравенство противоречит условию $F \geq 0$ (если оставить в стороне тривиальную возможность одновременного выполнения условий $(j_\beta)_+ = (\omega_{2\beta})_+ = 0$).

Остается исследовать случай $(j_\beta)_+ = (\omega_{2\beta})_+ = 0$. Нетрудно видеть, что соотношения (6.12) (вторая строка) при этом соблюдаются; по аналогии с

предыдущим устанавливаем, что

$$(j_\alpha \omega_{2\alpha})_- > 0, \quad (j_\beta)_- = (\omega_{2\beta})_- = 0$$

В результате оказывается, что векторы \mathbf{j} и $\text{grad } \omega_2$ при переходе из области изотропного режима управления в область неособого существенно анизотропного режима не изменяются ни по величине, ни по направлению. Это осуществляется благодаря тому, что со стороны области анизотропного режима упомянутые векторы имеют на линии раздела общее направление с той главной осью, вдоль которой удельное сопротивление остается таким же, как в зоне изотропного режима (в данном случае ρ_{\max}).

Рассмотрим переход (1б), (1б) согласно (6.7). Для этого случая, принимая во внимание формулы (А.11) Приложения и теорему, заключаем, что на линии скачка должны соблюдаться равенства

$$j_+ = j_- = 0$$

либо равенства

$$(\text{grad } \omega_2)_+ = (\text{grad } \omega_2)_- = 0$$

Эти условия не отличаются от соответствующих условий на линии, разделяющей два неособых анизотропных режима¹.

Аналогично получаются условия на линии раздела неособых и особых режимов и т. д.

7. Асимптотический случай $\rho_{\max} = \infty$. В этом и последующих пунктах будет рассмотрен случай, когда верхний предел ρ_{\max} в неравенствах (1.7) равен бесконечности. Будут построены асимптотические уравнения, описывающие оптимальный режим, и будет дана характеристика некоторых основных свойств оптимального управления.

Рассмотрим условие стационарности (2.9) по управлению γ

$$\rho_1 j_\alpha \omega_{2\beta} + \rho_2 j_\beta \omega_{2\alpha} = 0$$

Переходя от главных осей α, β к декартовым осям x, y , преобразуем это уравнение к виду

$$\begin{aligned} (\rho_1 \zeta^2 \omega_{2x} + \rho_2 \zeta^1 \omega_{2y}) \text{tg}^2 \gamma - (\rho_1 + \rho_2) (\omega_{2y} \zeta^2 - \omega_{2x} \zeta^1) \text{tg} \gamma - \\ - (\rho_1 \omega_{2y} \zeta^1 + \rho_2 \omega_{2x} \zeta^2) = 0 \end{aligned} \quad (7.1)$$

Теорема, сформулированная и доказанная в п. 5, позволяет дать правило выбора корней этого уравнения. Если предельные значения ρ_{\max}, ρ_{\min} оба конечны, то непосредственное вычисление (см. Приложение) показывает, что корню $(\text{tg } \gamma)_1$ (верхний знак в формуле для корней) соответствуют неравенства $j_\alpha \omega_{2\alpha} \geq 0, j_\beta \omega_{2\beta} \leq 0$, а корню $(\text{tg } \gamma)_2$ (нижний знак в

¹ В случае скалярного управления [1,2] также возникает необходимость согласования условия Вейерштрасса — Эрдманна с условием Вейерштрасса по обе стороны линии скачка. Это требование приводит к следующему условию: нормаль \mathbf{n} к линии скачка должна быть биссектрисой углов χ_\pm между векторами \mathbf{j} и $\text{grad } \omega_2$ по обе стороны линии скачка. Углы χ_\pm задаются равенствами

$$\chi_+ = \arccos p, \quad \chi_- = \pi - \arccos p, \quad p = (\rho_{\max} - \rho_{\min}) / (\rho_{\max} + \rho_{\min})$$

формуле для корней) — неравенства $j_\alpha \omega_{2\alpha} \leq 0$, $j_\beta \omega_{2\beta} \geq 0$. Согласно теореме, в первом случае должны взять $\rho_1 = \rho_{\max}$, $\rho_2 = \rho_{\min}$, а во втором случае $\rho_1 = \rho_{\min}$, $\rho_2 = \rho_{\max}$.

Непосредственно проверяется, что при этих условиях оба корня уравнения (7.1) определяют одну и ту же пару главных осей. Это согласуется с тем, что уравнение (7.1) инвариантно относительно замены $\operatorname{tg} \gamma \rightarrow \operatorname{ctg} \gamma$, $\rho_1 \rightarrow \rho_2$, $\rho_2 \rightarrow \rho_1$. В дальнейшем будем без особых оговорок выбирать корень $(\operatorname{tg} \gamma)_1$.

Предположим, что $\rho_{\max} \rightarrow \infty$ при фиксированном ρ_{\min} . В этом случае корень уравнения (7.1) стремится к следующим предельным значениям¹:

$$(\operatorname{tg} \gamma)_0 = \begin{cases} (\omega_{2y} / \omega_{2x})_0, & \text{если } (\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2)_0 > 0 \\ -(\zeta^1 / \zeta^2)_0, & \text{если } (\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2)_0 < 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Этот результат показывает, что главные оси в пределе ориентируются так, что либо вектор $\operatorname{grad} \omega_2$ оказывается параллельным тому главному направлению, которому отвечает главное значение ρ_{\max} , либо вектор \mathbf{j} оказывается параллельным главному направлению ρ_{\min} . Естественно ожидать, что для первого из этих случаев в пределе будет $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 = 0$, так как вектор \mathbf{j} не может иметь составляющей в том главном направлении, которому соответствует бесконечно большое сопротивление (в дальнейшем это утверждение будет доказано). Поэтому вместо первого из неравенств (7.2) следует взять равенство $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 = 0$.

Вторая возможность характеризуется тем, что скалярное произведение $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2$, вообще говоря, отлично от нуля и отрицательно. В этом нетрудно убедиться, если вспомнить интерпретацию $\operatorname{grad} \omega_2$ как вектора напряженности фиктивного электрического поля в задаче для сопряженных переменных (см. п. 2). Если вектор \mathbf{j} (плотность тока) имеет в пределе только составляющую вдоль главного направления ρ_{\min} , то вектор $\operatorname{grad} \omega_2$ (напряженность электрического поля) имеет, вообще говоря, составляющие по обоим главным направлениям. Поэтому во второй строке (7.2) в общем случае фигурирует неравенство.

8. Асимптотическая форма уравнений оптимального режима. Особенность этих уравнений заключается в том, что они имеют разный вид в тех частях основной области, где знаки скалярного произведения $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2$ различны. К такому выводу нетрудно прийти, основываясь на некоторых предварительных соображениях физического характера и принимая во внимание формулы (7.2).

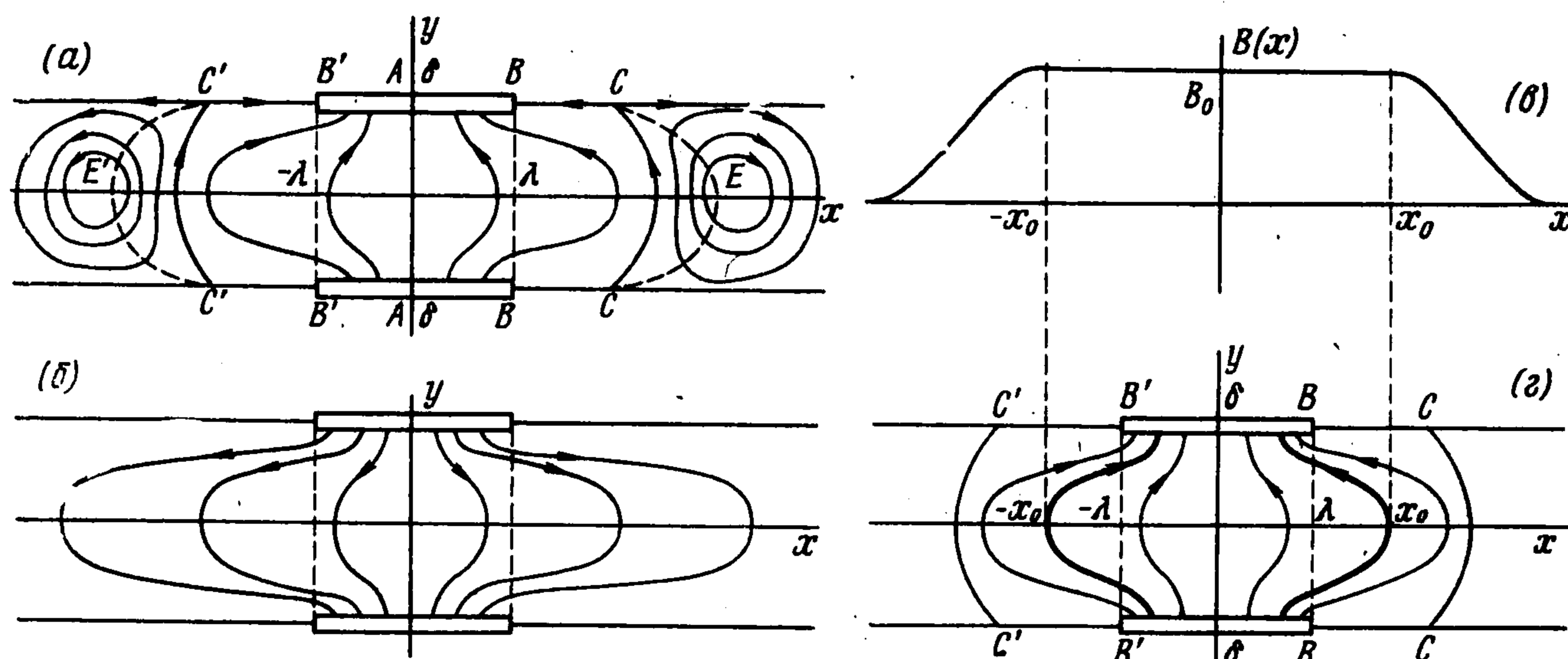
Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Предположим, что удельное сопротивление среды постоянно и изотропно ($P_0 = \rho I$, $\rho = \operatorname{const}$, I — единичный тензор). Векторные линии \mathbf{j} и $\operatorname{grad} \omega_2$ для этого случая характеризуются соответственно фиг. 5, а, б

¹ Подчеркнем, что речь идет о предельном переходе по параметру $\mu = \rho_{\min} / \rho_{\max}$, входящему явно в уравнение (7.1); величины ζ^1 , ζ^2 , ω_{2x} , ω_{2y} , входящие в формулу (7.2), зависят от μ . Это обстоятельство отражено в обозначении $(\quad)_0$ для скалярных произведений.

(на фиг. 5, в представлен соответствующий график $B(x)$ — величины вектора магнитной индукции; в дальнейшем будем считать, что функция $B(x)$ задается графиком этого типа).

Фигура 5, а, б, показывает, что постоянное и изотропное сопротивление не являются оптимальными (это было показано в [1] для случая изотропного удельного сопротивления и тем более справедливо в присутствии анизотропии: достаточно вспомнить теорему п. 5).



Фиг. 5

Предположим, ограничиваясь по-прежнему изотропным, но уже неоднородным распределением сопротивления, что в некоторой средней области (например, в области $CECC'E'C'$ фиг. 5, а, б) сопротивление равно $\rho_{\min} = \text{const}$, а в оставшейся области (слева от $C'E'C'$ и справа от CEC) сопротивление равно $\rho_{\max} = \text{const}$. Предполагая, что топологическая структура линий \mathbf{j} и $\text{grad } \omega_2$ при этом не изменится (произойдет только преломление линий на границе раздела областей), обнаруживаем, что такое распределение до некоторой степени согласуется с теоремой работы [1], характеризующей оптимальное расположение векторных линий в задаче с изотропным управлением.

В самом деле, в средней области скалярное произведение $\mathbf{j} \cdot \text{grad } \omega_2$ отрицательно, а в боковых областях положительно. Условия теоремы работы [1] при этом нарушаются в окрестности линий CEC и $C'E'C'$, которые в задаче с изотропным управлением служат линиями разрыва управления. При этом необходимо еще, чтобы в произвольной близости от этих линий было выполнено условие Вейерштрасса, которое, следовательно, должно быть согласовано с условием Вейерштрасса — Эрдманна, выполняющимся вдоль самих линий раздела. В п. 6 (сноска на стр. 280) указаны условия, необходимые для такого согласования. Нетрудно видеть, что эти условия в данном случае не могут быть удовлетворены.

Действительно, в асимптотическом случае $\mu \rightarrow 1$ нетрудно указать предельные положения (исчезающих при $\mu = 1$) линий разрыва CEC , $C'E'C'$ (для этого достаточно наложить фиг. 5, а на фиг. 5, б (соответствующие случаю $\rho = \text{const}$) и соединить плавной кривой точки, в которых выполнено равенство $\mathbf{j} \cdot \text{grad } \omega_2 = 0$; эта кривая будет искомой. Нетрудно указать

и аналитическое уравнение этой кривой). Если бы упомянутые выше условия могли бы быть удовлетворены, то они удовлетворялись бы и в пределе $\mu = 1$ имеющимся для этого случая точным решением (см., например, [4]). Непосредственная проверка показывает, что это не имеет места.

Последнее обстоятельство заставляет совсем отказаться от попыток искать оптимальное решение в классе изотропных управлений и приводит к необходимости включить в рассмотрение анизотропные управления¹ Р.

Этот более широкий класс управлений замечателен тем, что создает возможность менять конфигурацию векторных линий \mathbf{j} и $\text{grad } \omega_2$ изменением угла γ , характеризующего ориентацию главных осей симметричного тензора P_0 . При этом можно допустить, что оптимальное решение вовсе лишено каких-либо разрывов управлений: непрерывное изменение γ может привести к необходимой конфигурации векторных линий, тогда как появление разрывов связано с весьма жесткими трудно выполнимыми условиями (см. п. 6).

Рассмотрим асимптотический вид основных дифференциальных уравнений.

Процессы в канале описываются системой (1.4) или, что то же, системой

$$z_x^1 = \rho_{xx} z_y^2 - \rho_{xy} z_x^2, \quad z_y^1 = \rho_{yx} z_y^2 - \rho_{yy} z_x^2 + c^{-1} V B \quad (8.1)$$

к которой присоединяются уравнения для сопряженных переменных

$$\rho_1 \rho_2 \omega_{1x} = \rho_{xy} \omega_{2x} - \rho_{xx} \omega_{2y}, \quad \rho_1 \rho_2 \omega_{1y} = \rho_{yy} \omega_{2x} - \rho_{yx} \omega_{2y} \quad (8.2)$$

Декартовы составляющие ρ_{xx} , $\rho_{xy} = \rho_{yx}$, ρ_{yy} тензора P_0 связаны с главными значениями ρ_1 , ρ_2 этого тензора и с углом γ по формулам (1.1).

Разыскивая асимптотическое решение, будем предполагать, что при $\rho_{\max} \rightarrow \infty$ величины $z_x^1, \dots, \omega_{2y}$ стремятся к конечным ненулевым предельным значениям. Положим

$$\text{tg } \gamma = (\text{tg } \gamma)_0 + \mu m + O(\mu^2) \quad (8.3)$$

Это соотношение представляет собой разложение по степеням параметра μ корня уравнения (7.1). Нужно подчеркнуть, что для величин $\zeta^1, \dots, \omega_{2y}$, входящих в это уравнение, берутся их точные значения, соответствующие достаточно большому конечному значению ρ_{\max} , а разложение (8.3) ведется по параметру μ , входящему явно в коэффициенты уравнения (7.1). Поэтому, например²,

$$(\text{tg } \gamma)_0 \neq \text{tg } \gamma_0, \text{ но } (\text{tg } \gamma)_0 \rightarrow \text{tg } \gamma_0 \text{ при } \mu \rightarrow 0$$

Для $\cos 2\gamma$, $\sin 2\gamma$ получаются разложения

$$\cos 2\gamma = (\cos 2\gamma)_0 - m (\sin 2\gamma)_0 [1 + (\cos 2\gamma)_0] \mu + O(\mu^2) \quad (8.4)$$

$$\sin 2\gamma = (\sin 2\gamma)_0 + m (\cos 2\gamma)_0 [1 + (\cos 2\gamma)_0] \mu + O(\mu^2) \quad (8.5)$$

¹ Выше говорилось об асимптотическом при $\mu \rightarrow 1$ положении линии раздела областей с различными значениями управления. Это утверждение не вполне точно: нельзя говорить об асимптотическом положении несуществующих линий раздела. Точный смысл сказанного выяснится в дальнейшем.

² См. сноску на стр. 281.

Необходимость удержания слагаемых порядка μ в этих формулах диктуется структурой уравнений (8.1), (8.2). В связи с этим нужно иметь в виду, что, согласно сделанному выше замечанию, величины $(\cos 2\gamma)_0$, $(\sin 2\gamma)_0$ тоже разлагаются в ряды вида

$$(\cos 2\gamma)_0 = \cos 2\gamma_0 + O(\mu), \quad (\sin 2\gamma)_0 = \sin 2\gamma_0 + O(\mu)$$

При вычислении значений $(\operatorname{tg} \gamma)_0$ и m нужно пользоваться первой формулой (7.2) для тех точек, где $(\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2)_0 > 0$, и второй формулой для тех точек, где $(\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2)_0 < 0$. После несложных выкладок получаем:

Для области, где $(\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2)_0 < 0$

$$(\operatorname{tg} \gamma)_0 = \frac{z_y^2}{z_x^2}, \quad m = - \frac{(\operatorname{grad} z^2)^2 (\operatorname{grad} \omega_2 \cdot \operatorname{grad} z^2)}{(\omega_{2y} z_x^2 - \omega_{2x} z_y^2) (z_x^2)^2} \quad (8.6)$$

Для области, где $(\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2)_0 > 0$

$$(\operatorname{tg} \gamma)_0 = \frac{\omega_{2y}}{\omega_{2x}}, \quad m = \frac{(\operatorname{grad} \omega_2)^2 (\operatorname{grad} \omega_2 \cdot \operatorname{grad} z^2)}{(\omega_{2y} z_x^2 - \omega_{2x} z_y^2) (\omega_{2x})^2} \quad (8.7)$$

Теперь не составляет труда написать искомые асимптотические уравнения. Рассмотрим случай $(\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2)_0 < 0$. Подставляя разложения (8.4), (8.5) в уравнения (8.1) и учитывая формулы (8.6), обнаружим, что коэффициент при $\rho_1 = \rho_{\max}$ в правой части уравнений (8.1) тождественно обращается в нуль. В оставшихся слагаемых можно перейти к пределу $\mu = 0$; при этом выражения $z_x^1, \dots, \omega_{2y}$ перейдут в соответствующие предельные величины, для которых сохраним прежние обозначения $z_x^1, \dots, \omega_{2y}$. Что касается уравнений (8.2), то коэффициент при $\rho_1 = \rho_{\max}$ в правой части каждого из них не равен нулю; разделив обе части каждого из этих уравнений на ρ_{\max} , перейдем к пределу $\mu = 0$. В результате приходим к уравнениям, описывающим оптимальный процесс в области $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 < 0$

$$z_x^1 = \rho_{\min} z_y^2 + \rho_{\min} z_x^2 K, \quad z_y^1 = -\rho_{\min} z_x^2 + \rho_{\min} z_y^2 K + c^{-1} V B \quad (8.8)$$

$$\rho_{\min} \omega_{1x} = -z_x^2 \frac{\omega_{2y} z_x^2 - \omega_{2x} z_y^2}{(\operatorname{grad} z^2)^2}, \quad \rho_{\min} \omega_{1y} = -z_y^2 \frac{\omega_{2y} z_x^2 - \omega_{2x} z_y^2}{(\operatorname{grad} z^2)^2} \quad (8.9)$$

Для области, где $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 > 0$, получаются уравнения¹

$$z_x^1 = - \frac{\omega_{2y} z_x^2 - \omega_{2x} z_y^2}{(\operatorname{grad} \omega_2)^2} (\rho_{\max} \omega_{2x} - 2\rho_{\min} \omega_{2y} K + \rho_{\min} \omega_{2x} K^2) \quad (8.10)$$

$$z_y^1 = - \frac{\omega_{2y} z_x^2 - \omega_{2x} z_y^2}{(\operatorname{grad} \omega_2)^2} (\rho_{\max} \omega_{2y} - 2\rho_{\min} \omega_{2x} K + \rho_{\min} \omega_{2y} K^2) + c^{-1} V B$$

$$\rho_{\max} \omega_{1x} = -\omega_{2y} + K \omega_{2x}, \quad \rho_{\max} \omega_{1y} = \omega_{2x} + K \omega_{2y} \quad (8.11)$$

В этих формулах введено обозначение

$$K = \frac{\operatorname{grad} \omega_2 \cdot \operatorname{grad} z^2}{\omega_{2y} z_x^2 - \omega_{2x} z_y^2} \quad (8.12)$$

¹ Из уравнений (8.10), (8.11) следует, что $\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \omega_2 \rightarrow 0$ при $\rho_{\max} \rightarrow \infty$ (см. стр. 281).

9. Асимптотическое решение в области $j \cdot \text{grad } \omega_2 < 0$. Рассмотрим подробнее уравнения (8.8) и (8.9). Последняя пара уравнений показывает, что

$$z^2 = h(\omega_1) \quad (9.1)$$

где $h(\omega_1)$ — произвольная функция.

Уравнения (8.9) эквивалентны системе

$$\omega_{2x} = \rho_{\min}(\omega_{1y} - \omega_{1x}K), \quad \omega_{2y} = -\rho_{\min}(\omega_{1x} + \omega_{1y}K) \quad (9.2)$$

Совокупность уравнений (8.8), (8.12) и (9.2) можно получить более простым путем. Предположим с самого начала, что $\rho_1 = \rho_{\max} = \infty$, $\rho_2 = \rho_{\min}$. Основные уравнения задачи запишутся тогда в форме

$$\begin{aligned} 0 &= z_y^2 \cos \gamma - z_x^2 \sin \gamma \\ z_y^1 \cos \gamma - z_x^1 \sin \gamma &= -\rho_{\min}(z_y^2 \sin \gamma + z_x^2 \cos \gamma) + c^{-1}VB \cos \gamma \end{aligned} \quad (9.3)$$

Первое из этих уравнений выражает равенство нулю составляющей вектора j по оси α , а второе — дифференциальный закон Ома в направлении оси β .

Эквивалентная запись системы (9.3) получится, если к уравнению

$$\text{tg } \gamma = z_y^2 / z_x^2 \quad (9.4)$$

присоединить систему

$$z_x^1 = \rho_{\min} z_y^2 + \rho_{\min} z_x^2 K, \quad z_y^1 = -\rho_{\min} z_x^2 + \rho_{\min} z_y^2 K + c^{-1}VB \quad (9.5)$$

в которой K означает произвольную функцию, трактуемую как управление.

Для системы (9.5) ставится первоначальная оптимальная задача. Уравнения Эйлера имеют вид

$$\omega_{2x} = \rho_{\min}(\omega_{1y} - \omega_{1x}K), \quad \omega_{2y} = -\rho_{\min}(\omega_{1x} + \omega_{1y}K) \quad (9.6)$$

Условие стационарности по управлению K приводит к равенству

$$z^2 = h(\omega_1) \quad (9.7)$$

Ясно, что уравнения (9.5) — (9.7) эквивалентны уравнениям (8.8), (8.12), (9.2).

Представим основные уравнения в более удобной для дальнейшего форме. Для этого исключим функцию z^2 из системы (8.8) при помощи (9.1); будем иметь

$$z_x^1 = \rho_{\min} h'(\omega_1)(\omega_{1y} + \omega_{1x}K), \quad z_y^1 = \rho_{\min} h'(\omega_1)(\omega_{1y}K - \omega_{1x}) + c^{-1}VB \quad (9.8)$$

Исключение функции z^1 из этой системы приводит к равенству

$$h'(\omega_1)[\Delta\omega_1 + \omega_{1x}K_y - \omega_{1y}K_x] + h''(\omega_1)(\text{grad } \omega_1)^2 = (c\rho_{\min})^{-1}VB_x(x) \quad (9.9)$$

С другой стороны, система (9.2) порождает уравнение

$$\Delta\omega_1 = \omega_{1x}K_y - \omega_{1y}K_x \quad (9.10)$$

Это уравнение вместе с (9.9) приводит к соотношению

$$2h'(\omega_1) \Delta\omega_1 + h''(\omega_1) (\text{grad } \omega_1)^2 = (c\rho_{\min})^{-1} VB_x(x) \quad (9.11)$$

Если функция $h(\omega_1)$ известна, то уравнения (9.10) и (9.11) вместе с соответствующими граничными условиями определяют функции ω_1 и K .

Рассмотрим граничные условия на электродах. Требования

$$z^1 = z_{\pm}^1 = \text{const}, \quad \omega_2 = \omega_{2\pm} = \text{const} \quad \text{при } |x| < \lambda, y = \pm \delta$$

приводят к формулам (см. (9.2) и (9.8))

$$h'(\omega_1)(\omega_{1y} + \omega_{1x}K) = 0, \quad \omega_{1y} - \omega_{1x}K = 0$$

справедливым вдоль электродов. Отбрасывая тривиальную возможность $h'(\omega_1) = 0$ (это означало бы, что на электродах $j_y = 0$), заключаем отсюда, что вдоль электродов справедливы равенства

$$\omega_{1y} = 0, \quad K = 0 \quad (9.12)$$

Таким образом, линии тока \mathbf{j} (а вместе с ними и главные направления β) должны быть нормальны к электродам. Соображения симметрии показывают, что соотношения (9.12) выполняются и вдоль оси x .

Изолирующие стенки канала суть линии тока \mathbf{j} ; это обстоятельство выражается равенствами

$$\omega_1(x, \pm \delta)|_{x < -\lambda} = \omega_{1-} = \text{const}, \quad \omega_1(x, \pm \delta)|_{x > \lambda} = \omega_{1+} = \text{const} \quad (9.13)$$

Симметрия задачи показывает, что отрезок AA (фиг. 5, a) также есть линия тока; имеем

$$\omega_1 = 1/2(\omega_{1+} + \omega_{1-}) \quad (\text{вдоль } AA) \quad ((9.14)$$

Остается написать условия, связывающие значения функций ω_1 и $h(\omega_1)$, с параметрами внешней цепи. Эти условия имеют вид (см. формулы (1.6) и (2.13))

$$z_+^1 - z_-^1 = R(z_+^2 - z_-^2), \quad \omega_{2+} - \omega_{2-} + 1 = R(\omega_{1+} - \omega_{1-}) \quad (9.15)$$

Для преобразования последних двух равенств воспользуемся формулами (9.2), (9.8) и (9.14). Рассмотрим линию тока L ($\omega_1 = \text{const}$), соединяющую электроды, и вычислим линейный интеграл

$$\int_L \omega_{1x} dx + \omega_{1y} dy$$

взятый вдоль этой линии тока. При помощи уравнений (9.2) найдем

$$\int_L \omega_{2x} dx + \omega_{2y} dy = \rho_{\min} \int_L \omega_{1y} dx - \omega_{1x} dy$$

Подставляя этот результат во второе равенство (9.15), получим

$$\rho_{\min} \int_L \omega_{1y} dx - \omega_{1x} dy = R(\omega_{1+} - \omega_{1-}) - 1 \quad (9.16)$$

Совершенно так же, пользуясь уравнениями (9.8), придем к формуле

$$\rho_{\min} h'(\omega_1) \int_L \omega_{1y} dx - \omega_{1x} dy = R [h(\omega_{1+}) - h(\omega_{1-})] - c^{-1} \int_L VB dy \quad (9.17)$$

Сравнение (9.16) и (9.17) приводит к формуле

$$h'(\omega_1) = \frac{1}{R(\omega_{1+} - \omega_{1-}) - 1} \left\{ R [h(\omega_{1+}) - h(\omega_{1-})] - c^{-1} \int_L VB dy \right\} \quad (9.18)$$

($\omega_{1-} \leq \omega_1 \leq \omega_{1+}$)

определяющей функцию $h(\omega_1)$ неявным образом. Если к условию (9.18) присоединить равенство (9.16), взятое для значения параметра $\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_{1+} + \omega_{1-})$, то в совокупности с остальными граничными условиями будем иметь полную систему соотношений, которые вместе с уравнениями (9.11) и (9.10) определяют функции ω_1 и K . Нужно отметить, что при этом предполагается, что функция ω_1 не принимает значений, лежащих вне промежутка $[\omega_{1-}, \omega_{1+}]$. Если это условие не выполнено, то схема усложняется из-за того, что появляются замкнутые линии тока.

Замечание. Если условие (9.18) выполнено, то равенство (9.16) достаточно взять лишь при одном значении параметра ω_1 (например, $\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_{1+} + \omega_{1-})$), поскольку справедливость его для других значений параметра вытекает тогда автоматически.

Для доказательства проинтегрируем обе части уравнения (9.11) по области Σ , ограниченной двумя линиями тока

$$L_0 (\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_{1+} + \omega_{1-})), \quad L_1 (\omega_1 = \omega_1^\circ), \quad \frac{1}{2}(\omega_{1+} + \omega_{1-}) < \omega_1^\circ \leq \omega_{1+}$$

и двумя отрезками электродов (фиг. 6); пользуясь уравнением (9.18) и условием (9.16), взятым при значении параметра $\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega_{1+} + \omega_{1-})$, представим результат в виде

$$\iint_{\Sigma} [h'(\omega_1^\circ) + h'(\omega_1)] \Delta \omega_1 dx dy = 0$$

Это равенство справедливо для любой области Σ указанного выше типа; отсюда следует, что подынтегральная функция последнего интеграла допускает представление

$$\frac{\partial}{\partial y} (u \omega_{1x}) - \frac{\partial}{\partial x} (u \omega_{1y})$$

причем функция u обращается в нуль на электродах. Отсюда уже легко получается желаемый результат.

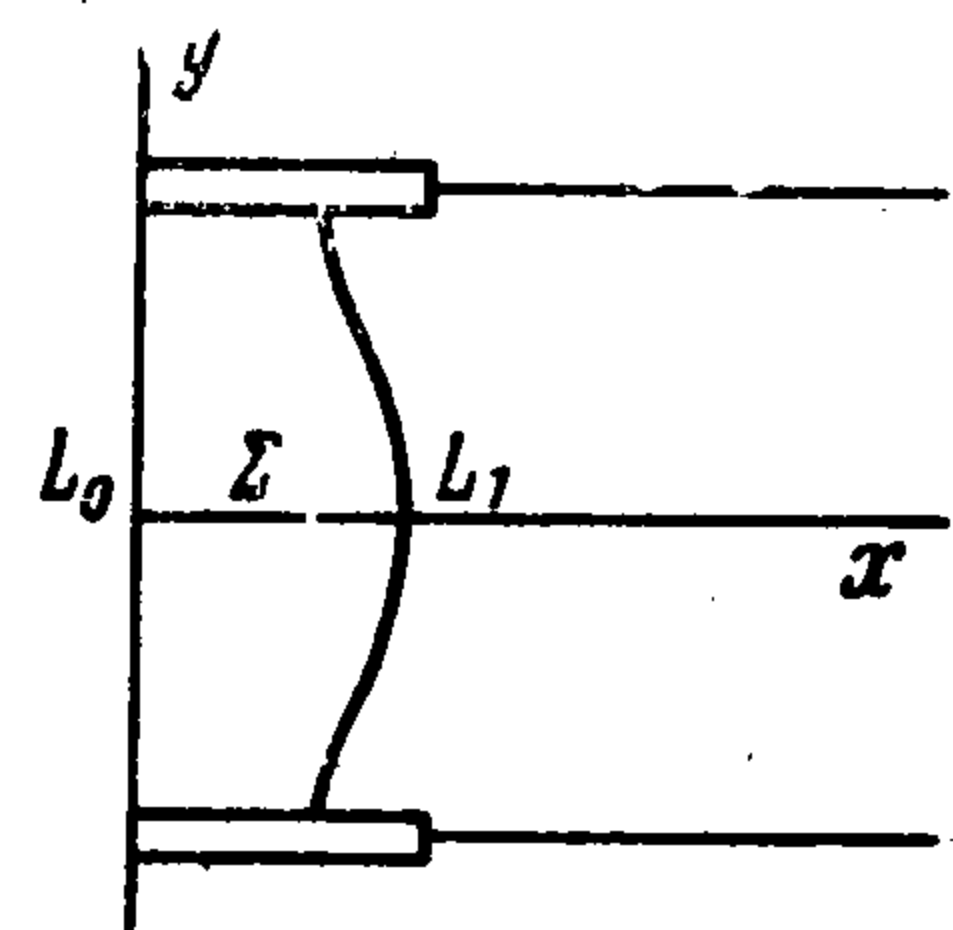
Исходное требование $(\mathbf{j} \cdot \text{grad } \omega_2)_0 < 0$ в пределе переходит в неравенство $\mathbf{j} \cdot \text{grad } \omega_2 < 0$; из формул (9.1) и (9.2) следует эквивалентное условие

$$h'(\omega_1) > 0, \quad \forall \omega_1 \in (\omega_{1-}, \omega_{1+}) \quad (9.19)$$

Если дополнительно предположить, что оптимальное решение таково, что во всей занятой токами области выполнено неравенство (9.19), то, суммируя сказанное, придем к следующей задаче.

Требуется определить функцию $\omega_1(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (9.11) при граничных условиях (9.12), (9.13), условия

$$-\rho_{\min} \int_{-\delta}^{\delta} \omega_{1x}(0, y) dy = R(\omega_{1+} - \omega_{1-}) - 1 \quad (9.20)$$



Фиг. 6

и дополнительном требовании (9.18), которое вместе с неравенством (9.19) определяет функцию $h(\omega_1)$. Интеграл в правой части равенства (9.18) берется вдоль линии тока L , соответствующей тому значению параметра $\omega_1 = \text{const}$, который служит аргументом функции $h'(\omega_1)$ в левой части этого равенства. Линии тока $\omega_1 = \omega_{1+}$, $\omega_1 = \omega_{1-}$ являются критическими: вдоль этих линий функция $h'(\omega_1)$ принимает значение нуль.

После того как найдена функция $\omega_1(x, y)$, уравнение (9.10) вместе с условием Коши $K(x, \pm \delta)_{|x| < \lambda} = 0$ (см. (9.12)) определит функцию K .

Если функция $B(x)$ на некотором интервале значений аргумента сохраняет постоянное значение B_0 , то задача допускает известное упрощение.

Рассмотрим линии тока L , целиком лежащие в области, где выполнено условие $B(x) = B_0 = \text{const}$. Формула (9.18), показывает, что на таких линиях функция $h'(\omega_1)$ принимает одно и то же постоянное значение; уравнение (9.11) в соответствующей области сводится к уравнению Лапласа. Но тогда уравнение (9.10) допускает интеграл

$$K = f(\omega_1) \quad (9.21)$$

где $f(\omega_1)$ — произвольная функция. Так как область $B(x) = B_0 = \text{const}$ захватывает электроды¹ (фиг. 5, *в*), вдоль которых $K = 0$, то в формуле (9.21) следует положить $f \equiv 0$, т. е. $K \equiv 0$.

Этот результат показывает, что в области, занятой линиями тока, целиком расположенными в зоне $B(x) = B_0 = \text{const}$, оптимальное управление изотропно и равно $\rho_{\min} = \text{const}$. Анизотропия управления характеризуется ненулевыми значениями функции K ; управление анизотропно там, где проходят линии тока, хотя бы некоторой своей частью лежащие в зоне $B(x) \neq \text{const}$. На фиг. 5, *г* жирным отмечена линия тока, разделяющая области изотропного и анизотропного управлений; линии тока $BCCB$ и $B'C'C'B'$ являются критическими.

Предположение о существовании критических линий тока подтверждается исследованием формулы (9.18). Первый множитель, стоящий в правой части этого равенства, всегда отрицателен (как обратная величина разности между падением напряжения на электродах в задаче для сопряженных переменных и внешней единичной электродвижущей силой, создающей это падение напряжения). Что касается второго множителя, то его знак зависит, вообще говоря, от выбора линии тока L . Пусть функция $B(x)$ задается графиком фиг. 5, *в*, а $V = V(y)$. Если линия тока расположена целиком в зоне, где $B(x) = B_0 = \text{const}$, то выражение в числителе отрицательно (ясно, что слагаемое $R [h(\omega_{1+}) - h(\omega_{1-})]$ не превышает выражения

$$\frac{B_0}{c} \int_{-\delta}^{\delta} V dy$$

¹ Это утверждение следует из сделанного выше предположения о том, что существуют линии тока, соединяющие электроды и целиком расположенные в области $B(x) = B_0 = \text{const}$.

если график $B(x)$ задается фиг. 5, в, так как это слагаемое не превышает упомянутого выражения даже тогда, когда $B(x) \equiv B_0 = \text{const}$ повсюду в канале). Если же линия тока (соединяющая, согласно предположению, электроды) лежит значительной своей частью в области $B(x) = 0$, то числитель отношения (9.21) положителен. Этот последний вариант должен быть отброшен как противоречащий неравенству (9.19). Отсюда следует, что в пределах принятой схемы линии тока не проникают достаточно далеко в зону спадания поля $B(x)$ и возможен случай, когда вся занятая токами область ограничена критическими линиями $BCCB$ и $B'C'C'B'$ (вдоль которых $h'(\omega_1) = 0$) и электродами. За пределами этой области либо меняется топологическая структура линий тока, т. е. появляются замкнутые линии, либо процесс описывается уравнениями (8.10), (8.11), соответствующими случаю $\mathbf{j} \cdot \text{grad } \omega_2 > 0$. Замечательно, что ни одна из этих возможностей не имеет какого-нибудь значения для конечного результата, так как условие $h'(\omega_1) = 0$ на критической линии тока достаточно для определения этой линии независимо от того, что происходит по другую ее сторону. Ничто не мешает, например, считать, что канал вне области $CCC'C'$ заполнен однородным изотропным изолятором $\rho = \infty$, так что токи вне области $CCC'C'$ вообще отсутствуют.

Уравнение (9.11) имеет коэффициент при главной части, обращающийся в нуль на критических линиях тока. В достаточной близости от этих линий управление всегда анизотропно, поскольку критические линии необходимо выходят за пределы зоны $B(x) = B_0 = \text{const}$. Подобные малые окрестности критических линий не являются, однако, областями быстрого изменения функции ω_1 . Действительно, производные ω_{1x} , ω_{1y} принимают вдоль критических линий конечные значения (это следует из формулы (9.16) и рассуждения на стр. 35 либо из формулы (9.17) с учетом того обстоятельства, что на критических линиях обращаются в нуль множитель $h'(\omega_1)$ и выражение в правой части).

Приложение. К выводу неравенства (3.6). Преобразуем выражение в квадратных скобках в левой части неравенства (3.5). Составляющие J_α , J_β вектора \mathbf{J} выражаются через составляющие J_n , J_t по формулам (фиг. 2)

$$J_\alpha = J_n \cos \theta - J_t \sin \theta, \quad J_\beta = J_n \sin \theta + J_t \cos \theta \quad (\text{A.1})$$

Подставляя сюда вместо J_n , J_t их выражения (3.3), получим

$$J_\alpha = j_\alpha - \frac{\rho_{tt} - P_{tt}}{P_{tt}} j_t \sin \theta - \frac{\rho_{tn} - P_{tn}}{P_{tt}} j_n \sin \theta + O(\varepsilon) \quad (\text{A.2})$$

$$J_\beta = j_\beta + \frac{\rho_{tt} - P_{tt}}{P_{tt}} j_t \cos \theta + \frac{\rho_{tn} - P_{tn}}{P_{tt}} j_n \cos \theta + O(\varepsilon)$$

Справедливы формулы (см. (1.1) и фиг. 2)

$$\rho_{tt} = 1/2 [\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\theta], \quad P_{tt} = 1/2 [P_1 + P_2 - (P_1 - P_2) \cos 2\psi]$$

$$\rho_{nn} = 1/2 [\rho_1 + \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\theta], \quad P_{nn} = 1/2 [P_1 + P_2 + (P_1 - P_2) \cos 2\psi] \quad (\text{A.3})$$

$$\rho_{tn} = \rho_{nt} = -1/2 (\rho_1 - \rho_2) \sin 2\theta, \quad P_{tn} = P_{nt} = -1/2 (P_1 - P_2) \sin 2\psi$$

При помощи этих соотношений можно выразить правые части равенств (А.2) через главные значения ρ_1, ρ_2, P_1, P_2 тензоров P_0 и P и через углы θ и ψ , заключенные между нормалью n к полоске варьирования и осями α и A соответственно. Получаем (слагаемые $O(\varepsilon)$ далее опускаются)

$$\begin{aligned} J_\alpha &= [P_1 + P_2 - (P_1 - P_2) \cos 2\psi]^{-1} \{m - 2(P_1 - P_2) j_n \sin \psi \sin(\theta - \psi)\} \\ J_\beta &= [P_1 + P_2 - (P_1 - P_2) \cos 2\psi]^{-1} \{n - 2(P_1 - P_2) j_n \cos \psi \sin(\theta - \psi)\} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

В этих формулах ($\delta\rho_i = P_i - \rho_i, i = 1, 2$)

$$\begin{aligned} m &= j_\alpha [P_1 + P_2 - (P_1 - P_2) \cos 2\theta] - 2 \sin \theta [\delta\rho_1 j_\alpha \sin \theta - \delta\rho_2 j_\beta \cos \theta] \\ n &= j_\beta [P_1 + P_2 - (P_1 - P_2) \cos 2\theta] + 2 \cos \theta [\delta\rho_1 j_\alpha \sin \theta - \delta\rho_2 j_\beta \cos \theta] \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

В неравенство (3.5) входят составляющие $P_{\alpha\alpha}, P_{\alpha\beta} = P_{\beta\alpha}, P_{\beta\beta}$ тензора P в системе главных осей α, β тензора P_0 . Эти составляющие выражаются через главные значения P_1, P_2 и тензора P , и через угол $\lambda = \theta - \psi$ между главными осями α и A тензоров P_0 и P при помощи формул (1.1), в которых вместо оси x нужно взять ось α , а вместо оси α ось A ; при этом $\gamma = \lambda$. После несложных выкладок получим

$$(P_{\alpha\alpha} - \rho_1) J_\alpha + P_{\alpha\beta} J_\beta = (P_1 - \rho_1) J_\alpha - (P_1 - P_2) \sin \lambda (J_\alpha \sin \lambda - J_\beta \cos \lambda) \quad (\text{A.6})$$

$$P_{\beta\alpha} J_\alpha + (P_{\beta\beta} - \rho_2) J_\beta = (P_2 - \rho_2) J_\beta + (P_1 - P_2) \sin \lambda (J_\alpha \cos \lambda + J_\beta \sin \lambda)$$

Исключение J_α, J_β при помощи (А.4) приводит к формулам

$$\begin{aligned} [(P_{\alpha\alpha} - \rho_1) J_\alpha + P_{\alpha\beta} J_\beta] [P_1 + P_2 - (P_1 - P_2) \cos 2\psi] &= (P_1 - \rho_1) m - (P_1 - P_2) f \sin \lambda \\ [P_{\beta\alpha} J_\alpha + (P_{\beta\beta} - \rho_2) J_\beta] [P_1 + P_2 - (P_1 - P_2) \cos 2\psi] &= (P_2 - \rho_2) n + (P_1 - P_2) g \sin \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} f &= [2\rho_1 j_\alpha + (\rho_1 - \rho_2) j_\beta \sin 2\theta] \sin \lambda - j_\beta [\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\theta] \cos \lambda \\ g &= [2\rho_2 j_\beta + (\rho_2 - \rho_1) j_\alpha \sin 2\theta] \sin \lambda + j_\alpha [\rho_1 + \rho_2 - (\rho_1 - \rho_2) \cos 2\theta] \cos \lambda \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Составляя при помощи полученных формул левую часть неравенства (3.5) и учитывая условие стационарности (2.9), придем к неравенству (3.6).

К выводу формулы (6.9) и др. Предельные значения векторов j и $\text{grad } \omega_2$ на разных сторонах линии разрыва управлений связаны соотношениями, получающимися из исходных уравнений (1.1) и условий непрерывности

$$[z_t^1]_-^+ = [z_t^2]_-^+ = [\omega_{1t}]_-^+ = [\omega_{2t}]_-^+ = 0 \quad (\text{A.9})$$

Пусть θ_\pm будут углы, составляемые нормалью n к линии скачка с осями α_\pm тензоров $(P_0)_\pm$ по разные стороны от этой линии. Чтобы получить необходимые соотношения, нужно записать уравнения (1.1) в главных осях тензора P_0 . Будем иметь

$$z_\alpha^1 = -\rho_1 j_\alpha + c^{-1} V B \sin \gamma, \quad z_\beta^1 = -\rho_2 j_\beta + c^{-1} V B \cos \gamma \quad (\text{A.10})$$

Здесь $j_\alpha = -z_\beta^2, j_\beta = z_\alpha^2$, а γ означает угол, составляемый осью α с осью x (фиг. 2).

Теперь, обращая формулы (А.1) и пользуясь уравнениями (2.6), (2.7) для значений $(\omega_{1t})_\pm$ и уравнениями (А.10) для значений $(z_t^1)_\pm$, представим уравнения (А.9) в форме

$$\begin{aligned} [\rho_1 j_\alpha \sin \theta]_-^+ - [\rho_2 j_\beta \cos \theta]_-^+ &= 0, \quad [\rho_1^{-1} \omega_{2\alpha} \cos \theta]_-^+ + [\rho_2^{-1} \omega_{2\beta} \sin \theta]_-^+ = 0 \\ [j_\alpha \cos \theta]_-^+ + [j_\beta \sin \theta]_-^+ &= 0, \quad [\omega_{2\alpha} \sin \theta]_-^+ - [\omega_{2\beta} \cos \theta]_-^+ = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Искомые соотношения получаются разрешением этих уравнений относительно $(j_\alpha)_-$, $(j_\beta)_-$, $(\omega_{2x})_-$, $(\omega_{2y})_-$.

К выводу формул (7.1). Корень $(\operatorname{tg} \gamma)_1$ уравнения (7.1) определяется формулой

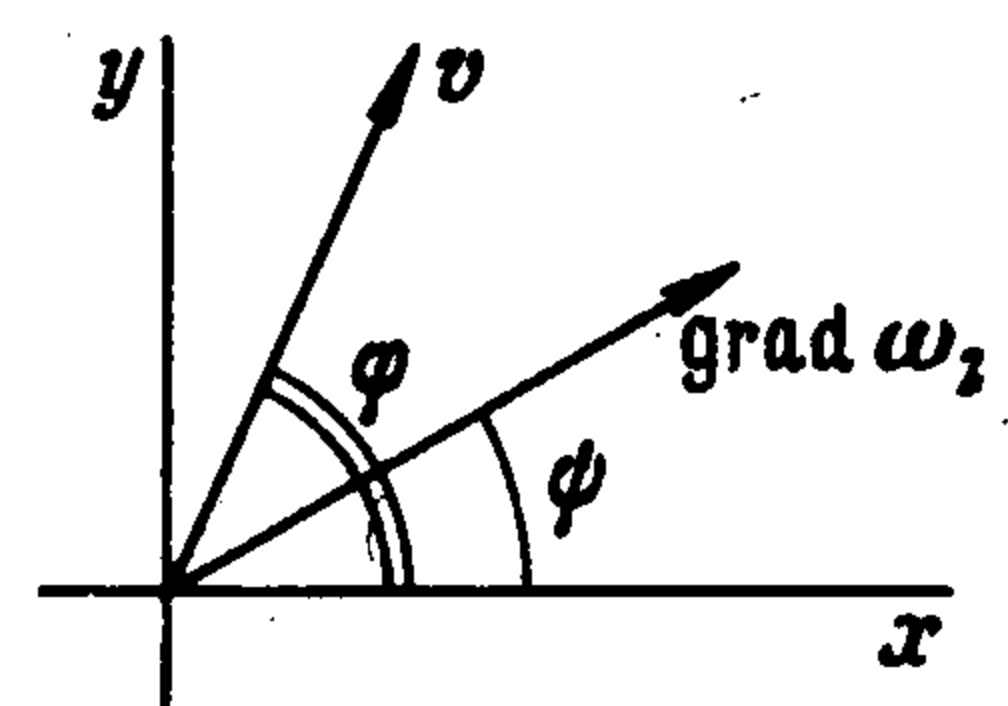
$$\frac{(\rho_1 + \rho_2) (\omega_{2y} \zeta^2 - \omega_{2x} \zeta^1)}{2 (\rho_1 \zeta^2 \omega_{2x} + \rho_2 \zeta^1 \omega_{2y})} + \frac{\{(\rho_1 + \rho_2)^2 (\omega_{2y} \zeta^2 - \omega_{2x} \zeta^1)^2 + 4 (\rho_1^2 + \rho_2^2) \omega_{2x} \omega_{2y} \zeta^1 \zeta^2 + 4 \rho_1 \rho_2 [(\omega_{2y} \zeta^1)^2 + (\omega_{2x} \zeta^2)^2]\}^{1/2}}{2 (\rho_1 \zeta^2 \omega_{2x} + \rho_2 \zeta^1 \omega_{2y})} \quad (\text{A.12})$$

или, что то же самое, соотношением (см. фиг. 7)

$$\frac{-(\rho_1 + \rho_2) \cos(\varphi + \psi) + [4\rho_1\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 \cos^2(\varphi - \psi)]^{1/2}}{2 (\rho_1 \sin \varphi \cos \psi + \rho_2 \cos \varphi \sin \psi)} \quad (\text{A.13})$$

Нетрудно видеть, что выражение

$$\frac{1}{(\cos^2 \gamma)_1} 4 (\rho_1 \sin \varphi \cos \psi + \rho_2 \cos \varphi \sin \psi)^2 (|j| |\operatorname{grad} \omega_2|)^{-1} j_\alpha \omega_{2\alpha}$$



Фиг. 7

может быть представлено в следующей форме:

$$\alpha_1 \rho_1^2 + \alpha_2 \rho_2^2 + 2\alpha_3 \rho_1 \rho_2 + 2 (\alpha_4 \rho_1 + \alpha_5 \rho_2) [4\rho_1\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 \cos^2(\varphi - \psi)]^{1/2} \quad (\text{A.14})$$

Простые выкладки приводят к следующим выражениям для коэффициентов:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2 \sin^2 \varphi \cos(\varphi - \psi), & \alpha_2 &= 2 \sin^2 \psi \cos(\varphi - \psi), & \alpha_4 &= \sin^2 \varphi, & \alpha_5 &= \sin^2 \psi \\ \alpha_3 &= 4 \sin \varphi \sin \psi - (\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi) \cos(\varphi - \psi) \end{aligned}$$

Знак $j_\alpha \omega_{2\alpha}$ совпадает со знаком выражения (A.13); это последнее всегда положительно, поскольку равенство

$$[4\rho_1\rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)^2 \cos^2(\varphi - \psi)] (\rho_1 \sin^2 \varphi + \rho_2 \sin^2 \psi)^2 - \{(\rho_1^2 \sin^2 \varphi + \rho_2^2 \sin^2 \psi) \times \\ \times \cos(\varphi - \psi) + \rho_1 \rho_2 [4 \sin \varphi \sin \psi - (\sin^2 \varphi + \sin^2 \psi) \cos(\varphi - \psi)]\}^2$$

равна, как нетрудно видеть

$$4\rho_1\rho_2 [\rho_1 \sin^2 \varphi - \rho_2 \sin^2 \psi - (\rho_1 - \rho_2) \sin \varphi \sin \psi \cos(\varphi - \psi)]^2$$

Для величины $j_\beta \omega_{2\beta}$ доказательство проводится точно так же.

Поступила 15 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье К. А. Оптимальное управление проводимостью жидкости, движущейся по каналу в магнитном поле. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
2. Лурье К. А. К задаче об оптимальном распределении проводимости жидкости, движущейся во внешнем магнитном поле. ПМТФ, 1964, № 2.
3. Лурье К. А. Задача Майера — Больца для кратных интегралов и оптимизация поведения систем с распределенными параметрами. ПММ, 1963, т. 27, вып. 5.
4. Ватажин А. Б. К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики. ПММ, 1961, т. 25, вып. 5.