Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Краевые задачи теории пологих оболочек можно условно разбить на два типа. Внутренние (расчет куполов, безбалочных перекрытий) и внешние краевые задачи (расчет оболочек, ослабленных отверстиями, т. е. задачи о концентрации напряжений). Оба эти направления имеют обширную литературу (см., например, [1]).

Ниже дается постановка основных краевых задач с некоторых единых позиций, в идейном плане близких к концепции Колосова — Мусхелишвили в плоской задаче теории упругости. Для односвязной и многосвязной области выписываются представления решений краевых задач в рядах.

1. Корректно записанные представления решения краевой задачи в теории оболочек должны удовлетворять следующим условиям: а) функции, определяющие смещения, усилия и моменты в оболочке, должны быть выражены через общие решения основных уравнений либо представлены в виде рядов по полным системам решений ; б) при этом должны быть выполнены статические условия в целом, т. е. условия на бесконечности (если оболочка предполагается неограниченной или условия равновесия всей оболочки, если последняя ограничена; в) условиям однозначности смещений (если по смыслу задачи дислокации отсутствуют): г) наконец, в некоторых задачах необходимо ставить условия периодичности смещений или усилий. Например, при растяжении цилиндрической оболочки, ослабленной большим количеством периодически расположенных одинаковых отверстий, усилия должны удовлетворять соответствующим условиям периодичности.

Общее решение основного уравнения технической теории пологих оболочек дано в [2]; будем считать его известным. Функции напряжений и прогибов определяются через общее решение $F(z, \zeta)$, следующим образом:

$$U(x, y) = F_1(z, \zeta),\ w(x, y) = \varepsilon^* F_2(z, \zeta),\ F(z, \zeta) = F_1 + iF_2$$

$$z = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}(x + iy), \qquad \zeta = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}(x - iy), \qquad \beta = \frac{\sqrt{\varepsilon(1-\alpha)}}{4} \tag{1.1}$$

$$\varepsilon = \frac{a^2\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Rh}$$

$$\varepsilon^* = \frac{\sqrt{12(1-\mu^2)}}{Eh^2}, \qquad \alpha = \frac{R}{R_1}, \qquad |\alpha| \leqslant 1$$

Здесь $U(x, y)$ и $w(x, y)$ — функции напряжений и прогибов, E, μ и h — модуль Юнга, коэффициент Пуассона и толщина оболочки, R, R_1 — соответствующие радиусы кривизны срединной поверхности, x, y — декартовы координаты, a — характерный линейный размер.

Все усилия и моменты, действующие в оболочке, можно выразить через функцию $F(z, \zeta)$. Для этого лишь необходимо перейти в известных формулах к переменным z, ζ. Имеем

$$
\begin{gathered}
\frac{hN_x}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} + i\frac{M_y - \mu M_x}{1-\mu^2} = \frac{i(1-\alpha)}{16R}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial\zeta} - \frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}\right) \\
\frac{hN_y}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} + i\frac{M_x - \mu M_y}{1-\mu^2} = \frac{i(1-\alpha)}{16R}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial\zeta} + \frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}\right) \qquad (1.2) \\
\frac{hN_{xy}}{\sqrt{12(1-\mu^2)}} - i\frac{M_{xy}}{1-\mu} = \frac{1-\alpha}{16R}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial\zeta^2}\right)
\end{gathered}
$$

где N_x, N_y и N_{xy} — усилия в срединной поверхности, M_x, M_y и M_{xy} — соответствующие моменты в оболочке.

Аналогичные формулы можно, очевидно, записать и для поперечных усилий.

Переходим к определению тангенциальных смещений u и v. Из закона Гука, связывающего усилия и деформации в оболочке, имеем

$$
\begin{aligned}
N_y - N_x + 2iN_{xy} &= -4Gh\frac{\beta\sqrt{i}}{a}\frac{\partial}{\partial z}(u - iv) - 2Gh\varepsilon^*\frac{1-\alpha}{R}F_2 = \\
&= 4\left(\frac{\beta\sqrt{i}}{a}\right)^2\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} \qquad (1.3)
\end{aligned}
$$

Интегрируя (1.3) по z, получаем

$$
4Gh(u - iv) = \frac{a}{\beta\sqrt{i}}f(\zeta) - 4\frac{\beta\sqrt{i}}{a}\frac{\partial F_1}{\partial z} - 2Gh\frac{1-\alpha}{R}\frac{a}{\beta\sqrt{i}}\int_{z_0}^{z} w\,dz \qquad (1.4)
$$

Вопрос, таким образом, упирается в определение аналитической функции $f(\zeta)$.

Применяя известную процедуру [3], получаем

$$
\begin{aligned}
(1+\mu)a^2\,\mathrm{Re}\,f'(\zeta) &= \frac{i(1-\alpha)\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial z\,\partial\zeta} + (1+\alpha)\varepsilon F_2(z, \zeta) + \\
&+ (1-\alpha)\varepsilon\,\mathrm{Re}\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_{z_0}^{z} F_2\,dz\right\} \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Последнее выражение удобнее переписать в виде

$$
(1+\mu)a^2\,\mathrm{Re}\,f'(\zeta) = \frac{1-\alpha}{2}\varepsilon\,\mathrm{Im}\left\{-\frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial\zeta} + 2\delta F + \frac{\partial}{\partial\zeta}\int_{z_0}^{z} F\,dz + \frac{\partial}{\partial z}\int_{\zeta_0}^{\zeta} F\,d\zeta\right\} \qquad (1.6)
$$

В правой части (1.6) фигурирует одна функция $F(z, \zeta)$.

Теперь необходимо принять во внимание тот факт, что $F(z, \zeta)$ является решением основного уравнения. Согласно [2], имеют место представления

$$
\begin{aligned}
F(z, \zeta) &= \varphi_0(z)\,\mathrm{ch}(\zeta - \zeta_0) + \psi_0(\zeta)\,\mathrm{ch}(z - z_0) - \qquad (1.7) \\
&- \sum_{k=0}^{1}\int_{z_0}^{z}\varphi_k(t)\frac{\partial}{\partial t}G_k(z - t, \zeta - \zeta_0)\,dt - \sum_{k=0}^{1}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\psi_k(\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}G_k(z - z_0, \zeta - \tau)\,d\tau
\end{aligned}
$$

Здесь $\varphi_k(z)$ и $\psi_k(\zeta)$ — произвольные аналитические функции своих аргументов, а ядра $G_k(z-t,\ \zeta-\tau)$ — известные функции.

Подставляя выражение (1.7) в правую часть (1.6), получаем после преобразований

$$(1+\mu)a^2\operatorname{Re} f'(\zeta) = -\frac{1-\alpha}{2}\varepsilon\operatorname{Im}[\varphi_1(z)+\psi_1(\zeta)] \tag{1.8}$$

Восстанавливая $f'(\zeta)$ и затем интегрируя ее, находим

$$\frac{Rhi\sqrt{1\pm\mu}}{(1-\alpha)\sqrt{3(1-\mu)}}f(\zeta) = -\int_{\zeta_0}^{\zeta}\psi_1(\zeta)\,d\zeta + \int_{\zeta_0}^{\zeta}\bar{\varphi}_1(-i\zeta)\,d\zeta \tag{1.9}$$

В равенстве (1.9) функция $\bar{\varphi}(z)$ определяется соотношением $\bar{\varphi}(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}$ [4].

В силу (1.9) и (1.4) окончательное выражение для тангенциальных смещений можно представить в виде

$$\lambda(u-iv) = \sqrt{i}\left\{\int_{\zeta_0}^{\zeta}[\psi_1(\zeta)-\bar{\varphi}_1(-i\zeta)]\,d\zeta - \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial}{\partial z}F_1 + 2i\int_{z_0}^{z}F_2\,dz\right\} \tag{1.10}$$

где

$$\lambda = Eh\left\{\frac{Rh}{(1-\alpha)\sqrt{12(1-\mu^2)}}\right\}^{1/2}, \qquad F_1 = \operatorname{Re}F(z,\zeta), \qquad F_2 = \operatorname{Im}F(z,\zeta)$$

В (1.10) функция $F(z,\zeta)$ задана представлением (1.7); функции $\psi_1(\zeta)$ и $\varphi_1(z)$ — произвольные аналитические функции, входящие в (1.7).

Рассмотрим статические условия. Главный вектор усилий в срединной поверхности, действующих вдоль произвольной дуги L на поверхности оболочки, определяется формулой

$$X-iY = -2i\frac{\beta\sqrt{i}}{a}\frac{\partial F_1}{\partial z}\bigg|_L \tag{1.11}$$

Далее проекция на нормаль главного вектора сил вдоль L имеет вид

$$Q = \int_L\left\{\frac{y}{R}d\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) - \frac{x}{R_1}d\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) + D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\,dy - D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w\,dx\right\} \tag{1.12}$$

Здесь $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость. Последнее выражение можно представить в более удобной форме

$$Q = \frac{1-\alpha}{4R}\operatorname{Im}\left\{2(\delta z-\zeta)\frac{\partial F}{\partial z}\bigg|_L - 2(\delta\zeta - z)\frac{\partial F}{\partial\zeta}\bigg|_L + \right. \tag{1.13}$$
$$\left. + \int_L\left(\frac{\partial^3 F}{\partial z^2\partial\zeta} - 2\frac{\partial F}{\partial\zeta} - 2\delta\frac{\partial F}{\partial z}\right)z'(s)\,ds - \int_L\left(\frac{\partial^3 F}{\partial z\partial\zeta^2} - 2\frac{\partial F}{\partial z} - 2\delta\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right)\zeta'(s)\,ds\right\}$$

2. В случае первой краевой задачи будем предполагать, что на границе области L заданы усилия и моменты (2.1)

$$N_n = N_n^\circ(s), \qquad N_s = N_s^\circ(s), \qquad M_n = M_n^\circ(s), \qquad Q^* = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = Q^\circ(s)$$

где N_n и N_s — нормальная и касательная компоненты усилия в срединной поверхности, M_n и Q^* — нормальная компонента изгибающего момента и обобщенное, в смысле Кирхгофа, перерезывающее усилие, s — дуговая координата вдоль границы.

Краевые условия (2.1) можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$N_n - iN_s = f_1^\circ(s), \qquad M_n - i\left(M_s + \int_0^s Q_n\, ds + \mathrm{const}\right) = f_2^\circ(s) \tag{2.2}$$

где

$$f_1^\circ(s) = N_n^\circ - iN_s^\circ, \qquad f_2^\circ(s) = M_n^\circ - i\int_0^s Q^\circ(s)\, ds + \mathrm{const}$$

Пусть

$$F_s(z, \zeta) = F(z, \zeta) + F^\circ(z, \zeta) \tag{2.3}$$

где $F^\circ(z, \zeta)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (соответствующее либо некоторой нагрузке на бесконечности, если оболочка неограниченная, либо поперечной нагрузке на оболочку), F — решение основного однородного уравнения теории пологих оболочек [2].

Краевые условия (2.2) можно выразить через граничные значения функции F_s следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F_s}{\partial t\, \partial \tau} - \left(\overline{\frac{\partial^2 F_s}{\partial t\, \partial \tau}}\right) - e^{2i\theta}\left\{\frac{\partial^2 F_s}{\partial t^2} - \left(\overline{\frac{\partial^2 F_s}{\partial \tau^2}}\right)\right\} = 2f_1(s)$$

$$(1+\mu)\left[\frac{\partial^2 F_s}{\partial t\, \partial \tau} + \left(\overline{\frac{\partial^2 F_s}{\partial t\, \partial \tau}}\right)\right] + (1-\mu)e^{2i\theta}\left[\frac{\partial^2 F_s}{\partial t^2} + \left(\overline{\frac{\partial^2 F_s}{\partial \tau^2}}\right)\right] +$$

$$+ 4i\,\mathrm{Im}\int_0^s \left[t'(s)\frac{\partial^3 F_s}{\partial t^2\, \partial \tau} + \tau'(s)\frac{\partial^3 F_s}{\partial \tau^2\, \partial t}\right] ds = 2if_2(s) \tag{2.4}$$

где

$$f_1(s) = \frac{a^2}{2i\beta^2} f_1^\circ(s), \qquad f_2(s) = \frac{4R}{i(1-\alpha)} f_2^\circ(s), \qquad t(s) = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}[x(s) + iy(s)]$$

$$\tau(s) = \frac{\beta\sqrt{i}}{a}[x(s) - iy(s)]$$

Функции $f_1^\circ(s)$ и $f_2^\circ(s)$ заданы в (2.2).

В случае второй основной задачи задаем на L тангенциальные смещения u, v, прогиб w и нормальную производную. Краевые условия можно, очевидно, представить следующим образом:

$$u - iv = u^\circ(s) - iv^\circ(s), \qquad \frac{\partial w}{\partial s} - i\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w^\circ(s)}{\partial s} - iw_n^\circ(s) \tag{2.5}$$

Используя формулы для тангенциальных смещений (1.10), приводим условия (2.5) к виду

$$\int_{\tau_0(s)}^{\tau(s)} [\psi_1(\zeta) - \overline{\varphi}_1(-i\zeta)]\, d\zeta - \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial F_1}{\partial t} + 2i\int_{t_0(s)}^{t(s)} F_2 t'(s)\, ds = f_3(s) \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} = e^{i\theta} f_4(s), \qquad f_3(s) = \frac{\lambda}{\sqrt{i}}(u^\circ - iv^\circ), \qquad f_4(s) = \frac{a\sqrt{i}}{2\beta\varepsilon^*}\left(\frac{\partial w^\circ}{\partial s} - iw_n^\circ\right)$$

Здесь n — направление внешней нормали к L.

Помимо указанных двух существует еще несколько аналогичных краевых задач.

Таким образом, вопрос сводится к разысканию решения основного уравнения $F(z, \zeta)$ из некоторых краевых условий на границе области. При этом представление $F(z, \zeta)$ должно удовлетворять условиям корректности.

3. Если область односвязна и конечна, то решение краевой задачи 1 и 2 можно представить в виде ряда по некоторой полной системе частных решений. Например (3.1)

$$F(z, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n\Phi_n(z, \zeta) + A_n^*\Phi_n^*(z, \zeta) + B_n\Psi_n(z, \zeta) + B_n^*\Psi_n^*(z, \zeta)\}$$

Здесь A_n, A_n^*, B_n и B_n^* — постоянные, подлежащие определению из краевых условий; функции Φ_n, Φ_n^*, Ψ_n и Ψ_n^* построены в работе [2].

Если область круговая, то используем представления решений в полярных координатах [2]; если область отлична от круга, то можно при удовлетворении краевых условий воспользоваться одним из приближенных методов, например методом граничной каллокации.

4. При решении краевой задачи для бесконечной области, необходимо иметь решения, затухающие на бесконечности. Ниже дается построение таких решений.

Введем функцию

$$G(z, \zeta) = G_0(z, \zeta) + \left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) G_1(z, \zeta) \tag{4.1}$$

где G_0 и G_1 — ядра в (1.7). Общее решение $F(z, \zeta)$ представим в виде

$$F(z, \zeta) = a_0 G(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + a_1 G(z_0 - z, \zeta_0 - \zeta) + \int_{z_0}^{z} G(z - t, \zeta - \zeta_0) \times$$
$$\times \mu_0(t)\,dt + \int_{z}^{z_0} G(t - z, \zeta_0 - \zeta)\mu_1(-t)\,dt + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G(z - z_0, \zeta - \tau)\nu_0(\tau)\,d\tau +$$
$$+ \int_{\zeta}^{\zeta_0} G(z_0 - z, \tau - \zeta)\nu_1(-\tau)\,d\tau \tag{4.2}$$

Здесь μ_0, μ_1, ν_0 и ν_1 — произвольные аналитические функции своих аргументов, a_0 и a_1 — произвольные константы.

Представление (4.2) отражает следующее свойство решений основного уравнения: если $F(z, \zeta)$ — решение, то решениями являются и функции $F(\zeta, z)$, $F(-z, -\zeta)$, $F(-\zeta, -z)$.

Введем четыре типа решений

$$\Phi(z, \zeta) =$$
$$= \overset{\circ}{D}_{z,\zeta}\{\mu_0(z - z_0)\} = \frac{a_0}{2} G(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + \int_{z_0}^{z} G(z - t, \zeta - \zeta_0)\mu_0(t - z_0)\,dt$$

$$\Psi(z, \zeta) =$$
$$= D'_{z,\zeta}\{\mu_1(z_0 - z)\} = \frac{a_1}{2} G(z_0 - z, \zeta_0 - \zeta) + \int_{z}^{z_0} G(t - z, \zeta_0 - \zeta)\mu_1(z_0 - t)\,dt$$

$$\Phi^*(z,\zeta)=$$

$$= D^{\circ}_{\zeta,z}\{\nu_0(\zeta-\zeta_0)\} = \frac{a_0}{2}G(z-z_0,\zeta-\zeta_0)+\int\limits_{\zeta_0}^{\zeta}G(z-z_0,\zeta-\tau)\,\nu_0(\tau-\zeta_0)\,d\tau$$

$$\Psi^*(z,\zeta)= \tag{4.3}$$

$$= D^{1}_{\zeta,z}\{\nu_1(\zeta_0-\zeta)\} = \frac{a_1}{2}G(z_0-z,\zeta_0-\zeta)+\int\limits_{\zeta}^{\zeta_0}G(z_0-z,\tau-\zeta)\,\nu_1(\zeta_0-\tau)\,d\tau$$

Общее решение основного уравнения теории пологих оболочек, очевидно, имеет вид

$$F(z,\zeta)=\Phi(z,\zeta)+\Psi(z,\zeta)+\Phi^*(z,\zeta)+\Psi^*(z,\zeta) \tag{4.4}$$

Рассмотрим частные решения, которые назовем решениями первого рода

$$\Phi_\gamma(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=$$

$$= D^{\circ}_{z,\zeta}\left\{\frac{(z-z_0)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{z-z_0}\right\},\quad \Psi_\gamma(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=D^{1}_{z,\zeta}\left\{\frac{(z_0-z)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{z_0-z}\right\} \tag{4.5}$$

$$\Phi_\gamma^*(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=$$

$$= D^{\circ}_{\zeta,z}\left\{\frac{(\zeta-\zeta_0)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{\zeta-\zeta_0}\right\},\quad \Psi_\gamma^*(z-z_0,\zeta-\zeta_0)=D'_{\zeta,z}\left\{\frac{(\zeta_0-\zeta)^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}e^{\zeta_0-\zeta}\right\}$$

Здесь $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция Эйлера; пока будем предполагать, что $\mathrm{Re}\,\gamma>0$.

Согласно [2], функцию $G(z,\zeta)$ можно представить в виде

$$G(z,\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}g_k'(\zeta)=e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\omega_k(\zeta)=G(\zeta,z) \tag{4.6}$$

где g_k и ω_k — известные функции, например для цилиндрической оболочки $(\delta=1)$ имеем

$$\omega_k(\zeta)=\frac{\zeta^k}{k!} \tag{4.7}$$

Из (4.5) следуют равенства

$$\Psi_\gamma(z,\zeta)=\Phi_\gamma(-z,-\zeta),\qquad \Phi_\gamma^*(z,\zeta)=\Phi_\gamma(\zeta,z),$$

$$\Psi_\gamma^*(z,\zeta)=\Phi_\gamma(-\zeta,-z) \tag{4.8}$$

Таким образом, в определении нуждается лишь функция $\Phi_\gamma(z,\zeta)$. Реализуя первую из формул (4.5), находим, учитывая (4.3) и (4.6)[1]

$$\Phi_\gamma(z,\zeta)=e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+\gamma}\omega_k(\zeta)}{\Gamma(k+\gamma+1)} \tag{4.9}$$

При $\gamma=-n$, $(n=1,2\ldots)$ формула (4.9) приобретает вид

$$\Phi_{-n}(z,\zeta)=e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}\omega_{k+n}(\zeta) \tag{4.10}$$

---

[1] Ниже полагаем везде $z_0=\zeta_0=0$.

Формулы (4.9) и (4.10) дают аналитическое продолжение интегралов (4.5) на всю плоскость параметра γ.

Для частного случая $\delta = 1$ (цилиндрическая оболочка) система регулярных решений первого рода дает

$$\Phi_\gamma(z,\zeta) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\gamma/2} e^{z+\zeta} I_\gamma(2\sqrt{z\zeta}), \quad \Psi_\gamma(z,\zeta) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\gamma/2} e^{-z-\zeta} I_\gamma(2\sqrt{z\zeta}) \tag{4.11}$$

$$\Phi_\gamma^*(z,\zeta) = \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\gamma/2} e^{z+\zeta} I_\gamma(2\sqrt{z\zeta}), \quad \Psi_\gamma^*(z,\zeta) = \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{\gamma/2} e^{-z-\zeta} I_\gamma(2\sqrt{z\zeta})$$

Отправляясь от полученных выше решений (4.9), (4.8), построим решения, убывающие на бесконечности.

Определим однозначные решения логарифмического типа через регулярные решения первого рода следующим образом:

$$\Omega_1(z,\zeta) = \frac{1}{2}\lim_{\gamma\to 0}\left\{\frac{\partial\Phi_{-\gamma}(z,\zeta)}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Phi_\gamma^*(z,\zeta)}{\partial\gamma}\right\}$$

$$\Omega_2(z,\zeta) = \frac{1}{2}\lim_{\gamma\to 0}\left\{\frac{\partial\Psi_{-\gamma}(z,\zeta)}{\partial\gamma} - \frac{\partial\Psi_\gamma^*(z,\zeta)}{\partial\gamma}\right\} \tag{4.12}$$

Реализуя первое равенство в (4.12), находим после соответствующего предельного перехода

$$\Omega_1(z,\zeta) = -G(z,\zeta)\ln\sqrt{z\zeta} + \Omega_1^\circ(z,\zeta) \tag{4.13}$$

$$\Omega_1^\circ(z,\zeta) = e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi(k+1)}{2k!}[z^k\omega_k(\zeta) + \zeta^k\omega_k(z)], \quad \psi(k+1) = -C + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}$$

$\psi(1) = -C$ (C — постоянная Эйлера).

Из (4.13) следует, что $\Omega_1(z,\zeta)$ имеет логарифмическую особенность в точке $z = \zeta = 0$. Множителем при логарифме является ядро, функция $\Omega_1^\circ(z,\zeta)$ — аналитична в любой конечной точке z, ζ.

Второе логарифмическое решение определяется в силу (4.12) и (4.8) формулой

$$\Omega_2(z,\zeta) = \Omega_1(-z, -\zeta) \tag{4.14}$$

Назовем регулярными решениями второго рода функции, выражающиеся через решения логарифмического типа следующим образом:

$$Z_1^{(-n)}(z,\zeta) = (-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial z} - 1\right)^n\Omega_1(z,\zeta), \quad Z_2^{(-n)}(z,\zeta) = (-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} - 1\right)^n\Omega_1(z,\zeta)$$

$$Z_3^{(-n)}(z,\zeta) = Z_1^{(-n)}(-z, -\zeta), \quad Z_4^{(-n)}(z,\zeta) = Z_2^{(-n)}(-z, -\zeta) \tag{4.15}$$

Ясно, что так определенные решения однозначны и имеют в точке $z = \zeta = 0$ полюс порядка n.

Из (4.15) и (4.13) находим

$$Z_1^{(-n)}(z,\zeta) = (-1)^{n+1}\Phi_{-n}(z,\zeta)\ln\sqrt{z\zeta} + e^{z+\zeta}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(k-1)!}{2z^k}\omega_{n-k}(\zeta) +$$

$$+ (-1)^n e^{z+\zeta}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\psi(k+1)}{2k!}\left[z^k\omega_{k+n}(\zeta) + \zeta^k\frac{d^n\omega_k(z)}{dz^n}\right] \tag{4.16}$$

Имеет место равенство

$$Z_2^{(-n)}(z, \zeta) = Z_1^{(-n)}(\zeta, z) \tag{4.17}$$

Остальные решения второго рода определены в (4.15).

Для цилиндрической оболочки решения (4.15) приобретают вид

$$Z_1^{(-n)}(z, \zeta) = \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{n/2} e^{z+\zeta} K_n(2\sqrt{z\zeta}), \qquad Z_2^{(-n)}(z, \zeta) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n/2} e^{z+\zeta} K_n(2\sqrt{z\zeta})$$

$$Z_3^{(-n)}(z, \zeta) = \left(\frac{\zeta}{z}\right)^{n/2} e^{-z-\zeta} K_n(2\sqrt{z\zeta}), \qquad Z_4^{(-n)}(z, \zeta) = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n/2} e^{-z-\zeta} K_n(2\sqrt{z\zeta}) \tag{4.18}$$

где $K_n(t)$ — цилиндрическая функция Макдональда.

Логарифмические решения (4.12) выражаются в этом случае формулами

$$\Omega_1(z, \zeta) = e^{z+\zeta} K_0(2\sqrt{z\zeta}), \qquad \Omega_2(z, \zeta) = e^{-z-\zeta} K_0(2\sqrt{z\zeta}) \tag{4.19}$$

Порядок убывания решений (4.18), (4.19), при увеличении $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ найдем, привлекая асимптотические формулы для $K_\nu(x)$ при больших $|x| \gg |\nu|$ (см. [5]). Имеем

$$Z_i^{(-n)}(z, \zeta) \approx \left(\frac{\pi\sqrt{Rh}}{\rho\lambda}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{\lambda(x-\rho)}{2\sqrt{2Rh}}\right\} \quad (i = 0, 2) \tag{4.20}$$

$$Z_i^{(-n)}(z, \zeta) \approx \left(\frac{\pi\sqrt{Rh}}{\rho\lambda}\right)^{1/2} \exp\left\{\frac{\lambda(-x-\rho)}{2\sqrt{2Rh}}\right\} \quad (i = 1, 3)$$

$$\lambda = [12(1-\mu^2)]^{1/4}$$

Как и следовало ожидать [6], наиболее слабое затухание имеет место вдоль асимптотической линии ($y = 0$).

При решении краевых задач для неограниченной области полезными являются затухающие на бесконечности решения, определяемые через логарифмические решения следующим образом:

$$T_1^{(-n)}(z, \zeta) = \frac{\partial^n}{\partial z^n}\Omega_1(z, \zeta), \qquad T_2^{(-n)}(z, \zeta) = T_1^{(-n)}(\zeta, z) \tag{4.21}$$

$$T_3^{(-n)}(z, \zeta) = T_1^{(-n)}(-z, -\zeta), \qquad T_4^{(-n)}(z, \zeta) = T_1^{(-n)}(-\zeta, -z)$$

Обозначим

$$u_{p,q}^{j,n} = \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \zeta^q} T_j^{(-n)}(z, \zeta) \qquad (j = 1, 2, 3, 4) \tag{4.22}$$

Найдем представления функций $u_{p,q}^{j,n}$ в полярных координатах. Для этого запишем

$$u_{p,q}^{j,n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{p,q}^{k,n}(j, \sqrt{z\zeta})\, e^{ik\theta}, \qquad e^{i\theta} = \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{1/2} \tag{4.23}$$

Так как, в силу (4.21)

$$F_{p,q}^{k,n}(2, \sqrt{z\zeta}) = F_{q,p}^{-k,n}(1, \sqrt{z\zeta}), \qquad F_{p,q}^{k,n}(3, \sqrt{z\zeta}) = (-1)^{k+p+q} F_{p,q}^{k,n}(1, \sqrt{z\zeta})$$

$$F_{p,q}^{k,n}(4, \sqrt{z\zeta}) = (-1)^{k+p+q} F_{q,p}^{-k,n}(1, \sqrt{z\zeta}) \tag{4.24}$$

то в определении нуждаются лишь функции

$$F_{p,q}^{k,n}(1, \sqrt{z\zeta}) = F_{p,q}^{k,n}(\sqrt{z\zeta})$$

Логарифмическое решение $\Omega_1(z, \zeta)$ можно представить помимо формулы (4.13) еще в следующей форме:

$$\Omega_1(z, \zeta) = -G(z, \zeta)\ln\sqrt{z\zeta} + \Omega^\circ_1(z, \zeta) \tag{4.25}$$

$$\Omega_1^\circ(z, \zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi(k+1)}{2k!}[z^k\omega_k'(\zeta) + \zeta^k\omega_k'(z)] -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k+1}}{(k+1)!}\omega_k''(\zeta) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\zeta^{k+1}}{(k+1)!}\omega_k''(z)$$

$$\omega_k'(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\zeta^s}{s!}c_{k,s}, \qquad \omega_k''(\zeta) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\zeta^s}{s!}c^*_{ks}, \qquad c^*_{k,s} = \sum_{j=0}^{k}\frac{c_{j,s}}{k-j+1}$$

$$c_{2k,2s} = a_{k,s}, \quad c_{2k,2s+1} = a_{k,s} + b_{k-1,s}, \quad c_{2k+1,2s} = a_{k,s} + b_{k,s-1}, \quad c_{2k+1,2s+1} = b_{k,s}$$

$$b_{-1,s} = b_{k,-1} = 0 \qquad (s, k = 0, 1, \ldots)$$

Величины $a_{k,s}$ и $b_{k,s}$ определены в [2].

Дифференцируя (4.25) согласно формулам (4.21) и (4.22) и представляя затем полученное выражение в полярных координатах с учетом легко выводимой формулы

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{z^{k+1}}\sum_{s=0}^{\infty}c_{n-k,s}\frac{\zeta^s}{s!} = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-ik\theta}\sum_{s=0}^{\min(n,k-1)}\frac{A_s c_{n-s,k-s-1}}{(k-s-1)!}(\sqrt{z\zeta})^{k-2s-2} \tag{4.26}$$

получаем

$$F_{p,q}^{k,n}(\sqrt{z\zeta}) = F_{0,q}^{k,n+p}(\sqrt{z\zeta}) \tag{4.27}$$

Здесь

$$F_{0,q}^{k,n}(\sqrt{z\zeta}) = \sum_{j=0}^{\min(q-1,\,k-1)}\frac{(-1)^j j!\, c_{q-j-1,\,k-j-1+n}}{2\Gamma(k-j)}(\sqrt{z\zeta})^{k-2j-2} -$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{z\zeta})^{2j+k}}{j!\Gamma(j+k+1)}\left\{c_{j+n+k,\,j+q}\left(\ln\sqrt{z\zeta} - \frac{\psi(j+1)+\psi(j+k+1)}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(c^*_{j+k+n-1,\,j+q} + c^*_{j+q-1,\,j+k+n})\right\}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots,)$$

$$F_{0,q}^{-k,n}(\sqrt{z\zeta}) = \sum_{j=0}^{\min(n-1,\,k-1)}\frac{(-1)^{j+1} j!\, c_{n-j-1,\,k-j+q-1}}{2\Gamma(k-j)}(\sqrt{z\zeta})^{k-2j-2} -$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{z\zeta})^{2j+k}}{j!\Gamma(j+k+1)}\left\{c_{j+n,\,j+k+q}\left(\ln\sqrt{z\zeta} - \frac{\psi(j+1)+\psi(j+k+1)}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(c^*_{j+n-1,\,j+k+q} + c^*_{j+k+q-1,\,j+n})\right\} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Таким образом, формулы (4.23), (4.24) и (4.27) определяют разложения в полярных координатах функций (4.22), т. е. решений $T_i^{(-n)}(z, \zeta)$ и различных производных от них.

5. Рассмотрим теперь представления решений краевых задач для многосвязной области. Если B-конечная многосвязная область, дополнение которой $B_1, B_2, \ldots, B_m$ — ограниченные континуумы, а B_0 — содержит бесконечную точку, то решение $F(z, \zeta)$ можно разыскивать в виде

$$F(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n \Phi_n(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + A^*{}_n \Phi^*{}_n(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + B_n \Psi_n(z - z_0, \zeta - \zeta_0) + B_n{}^* \Psi_n{}^*(z - z_0, \zeta - \zeta_0)\} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \times \{A_{1,n}^{(j)} T_1^{(-n)}(z - z_j, \zeta - \zeta_j) + A_{2,n}^{(j)} T_2^{(-n)}(z - z_j, \zeta - \zeta_j) + A_{3,n}^{(j)} T_3^{(-n)}(z - z_j, \zeta - \zeta_j) + A_{4,n}^{(j)} T_4^{(-n)}(z - z_j, \zeta - \zeta_j)\} \tag{5.1}$$

где точки $(z_0, \zeta_0) \in B_0$, $(z_j, \zeta_j) \in B_j$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Константы, входящие в (5.1), определяются из граничных условий соответствующей краевой задачи.

Если B-неограниченная многосвязная область, содержащая бесконечную точку, то первая сумма в (5.1) исчезает, т. е.

$$A_n = A_n{}^* = B_n = B_n{}^* = 0$$

В случае периодической задачи (неограниченная оболочка с периодической системой отверстий) представление (5.1) несколько упорядочивается. Имеем

$$F(z,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \{A_{1,j}^{(n)} T_1^{(-j)}(z - z_n, \zeta - \zeta_n) + A_{2,j}^{(n)} T_2^{(-j)}(z - z_n, \zeta - \zeta_n) + A_{3,j}^{(n)} T_3^{(-j)}(z - z_n, \zeta - \zeta_n) + A_{4,j}^{(n)} T_4^{(-j)}(z - z_n, \zeta - \zeta_n)\} \tag{5.2}$$

где $z_n = z_0 + n\omega$, ω — основной период.

Из условия периодичности напряжений, в предположении о возможности изменения порядка суммирования, находим

$$A_{k,j}^{(n)} = A_{k,j} \qquad (k = 1, 2, 3, 4) \tag{5.3}$$

Вводя периодические функции (ряд в правой части всегда сходится, так как функции $T_i^{(-j)}$ экспоненциально затухают на бесконечности)

$$\Pi_i^{(-j)}(z,\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_i^{(-j)}(z - z_n, \zeta - \zeta_n) \tag{5.4}$$

получаем окончательное представление (5.5)

$$F(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \{A_{1,j}\Pi_1^{(-j)}(z,\zeta) + A_{2,j}\Pi_2^{(-j)}(z,\zeta) + A_{3,j}\Pi_3^{(-j)}(z,\zeta) + A_{4,j}\Pi_4^{(-j)}(z,\zeta)\}$$

Аналогично получаем представление решения в случае двоякопериодической задачи (5.6)

$$F(z,\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} \{A_{1,j} m_1^{(-j)}(z,\zeta) + A_{2,j} m_2^{(-j)}(z,\zeta) + A_{3,j} m_3^{(-j)}(z,\zeta) + A_{4,j} m_4^{(-j)}(z,\zeta)\}$$

где двоякопериодические функции $m_i^{(-j)}$ (z, ζ) имеют вид

$$m_i^{(-j)}(z,\zeta) = \sum_{m,n} T_i^{(-j)}(z - z_{m,n}, \zeta - \zeta_{m,n}) \qquad (i = 1, 2, 3, 4; \; j = 0, 1, 2, \ldots)$$

6. Остановимся более подробно на случае односвязной неограниченной области (неограниченная оболочка с отверстием). В этом случае имеем, очевидно

$$F(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_{1,n} T_1^{(-n)}(z,\zeta) + A_{2,n} T_2^{(-n)}(z,\zeta) + A_{3,n} T_3^{(-n)}(z,\zeta) + A_{4,n} T_4^{(-n)}(z,\zeta)\} \tag{6.1}$$

Согласно равенствам (4.22), (4.23), выражение (6.1) можно представить в полярных координатах следующим образом:

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial \zeta^q} F(z,\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_{p,q}^k (\sqrt{z\zeta})\, e^{ik\theta} \tag{6.2}$$

$$F_{p,q}^k = \sum_{n=0}^{\infty} \{[A_{1,n} + (-1)^{k+p+q} A_{3,n}]\, F_{p,q}^{k,n}(\sqrt{z\zeta}) + [A_{2,n} + (-1)^{k+p+q} A_{4,n}] \times$$
$$\times F_{q,p}^{-k,n}(\sqrt{z\zeta})\}$$

Величины $F_{p,q}^{k,n}$ заданы в (4.27).

Если область и нагрузка симметричны относительно осей координат, то из условий симметрии $A_{1,n} = A_{2,n} = A_{3,n} = A_{4,n} = A_n$ и представление (6.1) упрощается. Имеем

$$F(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T^{(-n)}(z,\zeta) \tag{6.3}$$

$$T^{(-n)}(z,\zeta) = T_1^{(-n)}(z,\zeta) + T_1^{(-n)}(\zeta, z) + T_1^{(-n)}(-z, -\zeta) + T_1^{(-n)}(-\zeta, -z)$$

В полярных координатах имеем представление (6.2), где

$$F_{p,q}^k(\sqrt{z\zeta}) = [1 + (-1)^{k+q+p}] \sum_{n=0}^{\infty} (F_{p,q}^{k,n} + F_{q,p}^{-k,n})\, A_n \tag{6.4}$$

Например, для решения $F(z, \zeta)$ имеем представление

$$F(z,\zeta) = F_{0,0}^{\circ}(\sqrt{z\zeta}) + 2\sum_{k=1}^{\infty} F_{0,0}^{2k}(\sqrt{z\zeta}) \cos 2k\theta \tag{6.5}$$

Если задача носит обратносимметричный характер относительно осей x и y, то

$$A_{1,n} = A_{3,n}, \qquad A_{2,n} = A_{4,n}, \qquad A_{1,n} = -A_{2,n} = A_n \tag{6.6}$$

Получаем

$$F(z,\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n T^{(-n)}(z,\zeta) \tag{6.7}$$

$$T^{(-n)}(z,\zeta) = T_1^{(-n)}(z,\zeta) - T_1^{(-n)}(\zeta, z) + T_1^{(-n)}(-z, -\zeta) - T_1^{(-n)}(-\zeta, -z)$$

Разложение в полярных координатах остается в силе, его коэффициенты таковы:

$$F^k_{p,q}(\sqrt{z\zeta}) = [1 + (-1)^{k+p+q}] \sum_{n=0}^{\infty} A_n (F^{k,n}_{p,q} - F^{-k,n}_{q,p}) \qquad (6.8)$$

Например, решение $F(z, \zeta)$ представляется формулой

$$F(z, \zeta) = 2i \sum_{k=1}^{\infty} F^{2k}_{0,0} \sin 2k\theta \qquad (6.9)$$

7. Специального рассмотрения требуют лишь условия однозначности тангенциальных смещений.

Если иметь в виду представления (6.1), то условие однозначности дает связь

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A_{1,n} - A_{3,n}) = i \sum_{n=0}^{\infty} (\overline{A}_{2,n} - \overline{A}_{4,n}) \qquad (7.1)$$

Из (7.1) следует, в частности, что для симметричных ($A_{1,n} = A_{2,n} = A_{3,n} = A_{4,n}$) и для обратносимметричных ($A_{1,n} = A_{3,n} = -A_{2,n} = -A_{4,n}$) задач условия однозначности тангенциальных смещений удовлетворяются автоматически.

Указанные выше представления и их выражения в полярных координатах могут быть непосредственно использованы при решении различных краевых задач теории пологих оболочек в рядах.

Поступила 17 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки и связанные с ними проблемы. Обзор результатов. В кн.: «Упругость и пластичность», 1965. Итоги науки, сер. Механика, М., ВИНИТИ, 1967.
2. Фильштинский Л. А. Полные системы частных решений в теории пологих оболочек. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. Снеддон И. Н., Берри Д. С. Классическая теория упругости. М., Физматгиз, 1961.
4. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 4-е. М., Изд-во АН СССР, 1954.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, М., «Наука», 1966.
6. Гольденвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.