Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

О ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СЦЕПЛЕНИЯ ИЛИ ТРЕНИЯ

В. М. Александров

(Ростов-на-Дону)

Как известно, плоские контактные задачи теории упругости для полуплоскости при наличии сцепления или трения по области контакта достаточно хорошо изучены.

Соответствующие контактные задачи для упругих тел, отличных по форме или своим механическим свойствам от изотропной упругой полуплоскости, начали разрабатываться сравнительно недавно. Здесь прежде всего следует отметить работы Г. Я. Попова [1, 2].

В настоящей работе дан общий анализ структуры решения неклассических плоских контактных задач при наличии сцепления или трения по области контакта. Указаны возможные способы их эффективного решения.

1. Математическая постановка. Некоторые вспомогательные результаты. Неклассическими смешанными задачами будем называть: 1) смешанные задачи теории упругости для тел сложной формы (полоса, слой, круг, сфера, бесконечный цилиндр, клин и т. д.), 2) динамические смешанные задачи теории упругости, 3) пространственные задачи теории упругости для штампов сложной формы в плане, 4) смешанные задачи моментной теории упругости, 5) смешанные задачи линейной вязко-упругости и т. д.

В большинстве практически важных случаев перечисленные смешанные задачи в плоском варианте методами операционного исчисления могут быть приведены к решению следующих трех типов интегральных уравнений первого рода:

а) при наличии полного сцепления по области контакта

$$\begin{gathered}\int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) K_{11}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi - \varepsilon \int_{-1}^{1} \varphi_2(\xi) K_{12}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_1(x) \\ \varepsilon \int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) K_{21}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi + \int_{-1}^{1} \varphi_2(\xi) K_{22}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_2(x)\end{gathered} \qquad \begin{pmatrix}|x| \leqslant 1 \\ K_{12}(t) = K_{21}(t)\end{pmatrix} \tag{1.1}$$

б) при наличии сил трения по области контакта

$$\int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) K_{11}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi - k\varepsilon \int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) K_{12}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_1(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.2}$$

в) в отсутствие сцепления и трения по области контакта

$$\int_{-1}^{1} \varphi_1(\xi) K_{11}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi f_1(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.3}$$

Здесь $\lambda \in (0, \infty)$, $\varepsilon \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ — безразмерные параметры. Ядра $K_{jl}(t)$ $(j = 1, 2,\ l = 1, 2)$ при всех $|t| = |\xi - x|\,\lambda^{-1} < \infty$ могут быть представлены в виде

$$K_{jj}(t) = -\ln|t| + F_{jj}(t), \qquad K_{12}(t) = {}^1/_2\pi\,\mathrm{sgn}\,t + F_{12}(t) \tag{1.4}$$

функции $F_{jj}(t)$ — четные, а $F_{12}(t)$ — нечетная по t, все они, по крайней мере, непрерывные. Дальше на $F_{jl}(t)$ будут наложены дополнительные ограничения. Функции $f_j(x)$ будем считать принадлежащими классу[1] $H_n^\alpha(-1, 1)$, $n \geqslant 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Представим функции $\varphi_j(x)$ в виде

$$\varphi_j(x) = \varphi_j^\circ(x) + \varphi_j^*(x) \tag{1.5}$$

Здесь $\varphi_j^\circ(x)$ удовлетворяют соответственно следующим интегральным уравнениям:

$$\text{а)}\ \int_{-1}^{1} \varphi_1^\circ(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| + F_{11}(0)\right]d\xi - \frac{\pi\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_2^\circ(\xi)\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi = \pi f_1(x)$$

$$(|x| \leqslant 1) \tag{1.6}$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi_2^\circ(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| + F_{22}(0)\right]d\xi + \frac{\pi\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_1^\circ(\xi)\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi = \pi f_2(x)$$

$$\text{б)}\ \int_{-1}^{1} \varphi_1^\circ(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| + F_{11}(0)\right]d\xi - \frac{\pi k\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_1^\circ(\xi)\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi =$$

$$= \pi f_1(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.7}$$

$$\text{в)}\ \int_{-1}^{1} \varphi_1^\circ(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| + F_{11}(0)\right]d\xi = \pi f_1(x) \qquad (|x| \leqslant 1) \tag{1.8}$$

На основании (1.1)—(1.8) легко прийти к выводу, что $\varphi_i^\circ(\xi)$, удовлетворяющие уравнениям (1.6) — (1.8), являются главными членами асимптотики функций $\varphi_j(\xi)$ при больших значениях параметра λ.

Поправки $\varphi_j^*(\xi)$, исчезающие при $\lambda \to \infty$, должны быть найдены из следующих интегральных уравнений:

$$\text{а)}\ \int_{-1}^{1} \varphi_1^*(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| + F_{11}(0)\right]d\xi - \frac{\pi\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_2^*(\xi)\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi = \pi f_1^*(x)$$

$$(|x| \leqslant 1) \tag{1.9}$$

$$\int_{-1}^{1} \varphi_2^*(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi - x}{\lambda}\right| + F_{22}(0)\right]d\xi + \frac{\pi\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_1^*(\xi)\,\mathrm{sgn}\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi = \pi f_2^*(x)$$

$$f_j^*(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi) + \varphi_j^*(\xi)]\left[F_{jj}\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) - F_{jj}(0)\right]d\xi \pm$$

$$\pm\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi) + \varphi_j^*(\xi)]\,F_{12}\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right)d\xi \tag{1.10}$$

---

[1] Если $f(x) \in H_n^\alpha(-\beta, \beta)$, то ее n-я производная удовлетворяет при $x \in [-\beta, \beta]$ условию Гельдера с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$.

Здесь плюс для $j=1$ и минус для $j=2$;

$$\text{б)}\ \int_{-1}^{1}\varphi_1^*(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|+F_{11}(0)\right]d\xi-\frac{\pi k\varepsilon}{2}\int_{-1}^{1}\varphi_1^*(\xi)\operatorname{sgn}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi f_1^*(x)$$

$$(|x|\leqslant 1) \qquad (1.11)$$

$$f_1^*(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_1^\circ(\xi)+\varphi_1^*(\xi)]\left[F_{11}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-F_{11}(0)\right]d\xi+$$

$$+\frac{\varepsilon k}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_1^\circ(\xi)+\varphi_1^*(\xi)]\,F_{12}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \qquad (1.12)$$

$$\text{в)}\ \int_{-1}^{1}\varphi_1^*(\xi)\left[-\ln\left|\frac{\xi-x}{\lambda}\right|+F_{11}(0)\right]d\xi=\pi f_1^*(x) \qquad (|x|\leqslant 1) \quad (1.13)$$

$$f_1^*(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_1^\circ(\xi)+\varphi_1^*(\xi)]\left[F_{11}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-F_{11}(0)\right]d\xi \qquad (1.14)$$

Интегральные уравнения (1.6) — (1.8) можно представить в виде

$$\int_{-1}^{1}\varphi^\circ(\xi)\left[-\ln|\xi-x|-\frac{\pi\operatorname{tg}\pi\mu}{2}\operatorname{sgn}(\xi-x)\right]d\xi=\pi f(x)-$$

$$-P^\circ[\ln\lambda+F_{11}(0)]-iQ^\circ \quad (|x|\leqslant 1) \qquad (1.15)$$

Здесь соответственно для случаев (1.16)

а) $\varphi^\circ(\xi)=\varphi_1^\circ(\xi)+i\varphi_2^\circ(\xi)$, $\quad f(x)=f_1(x)+if_2(x)$, $\quad P^\circ=P_1^\circ+iP_2^\circ$

$$\mu=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon},\qquad P_j^\circ=\int_{-1}^{1}\varphi_j^\circ(\xi)\,d\xi,\qquad Q^\circ=P_2^\circ[F_{22}(0)-F_{11}(0)]$$

б) $\varphi^\circ(\xi)=\varphi_1^\circ(\xi)$, $\quad f(x)=f_1(x)$, $\quad P^\circ=P_1^\circ$

$$Q^\circ=0,\qquad \mu=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{1+ik\varepsilon}{1-ik\varepsilon} \qquad (1.17)$$

в) $\varphi^\circ(\xi)=\varphi_1^\circ(\xi)$, $\quad f(x)=f_1(x)$, $\quad P^\circ=P_1^\circ$, $\quad Q^\circ=0$, $\mu=0$ (1.18

Дифференцируя обе части уравнения (1.15) по x, будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi^\circ(\xi)\,d\xi}{\xi-x}+\pi\operatorname{tg}\pi\mu\varphi^\circ(x)=\pi f'(x) \qquad (|x|\leqslant 1) \qquad (1.19)$$

Здесь использовано соотношение

$${}^1/_2(\operatorname{sgn}x)'=\delta(x) \qquad (1.20)$$

и известные свойства дельта-функции $\delta(x)$.

При сделанных предположениях относительно функций $f_i(x)$ решение интегрального уравнения (1.19) может быть получено путем решения соответствующей задачи Римана [3] и будет иметь вид

$$\varphi^\circ(x) = \frac{\cos\pi\mu}{\pi X(x)}\left[P^\circ - \cos\pi\mu \int_{-1}^{1} \frac{f'(\xi)\,X(\xi)\,d\xi}{\xi - x}\right] + \frac{1}{2}\sin 2\pi\mu f'(x) \qquad (1.21)$$

$$X(x) = (1+x)^{1/2+\mu}(1-x)^{1/2-\mu} \qquad (1.22)$$

Чтобы выражение $\varphi^\circ(x)$ в форме (1.21) удовлетворяло также интегральному уравнению (1.15), необходимо соответствующим образом определить величину P°. Применим для этого следующий искусственный прием.

Заметим, что имеет место соотношение [1]

$$\int_{-1}^{1}\left[-\ln|\xi - x| + \frac{\pi\operatorname{tg}\pi\mu}{2}\operatorname{sgn}(\xi - x)\right]\frac{d\xi}{Y(\xi)} = \frac{\pi}{\cos\pi\mu}D_\mu \qquad (1.23)$$

$$Y(x) = (1+x)^{1/2-\mu}(1-x)^{1/2+\mu}, \qquad D_\mu = -\left[\ln 2 + C + 0.5\psi(1/2+\mu) + {}\right.$$
$$\left. {}+ 0.5\psi(1/2 - \mu)\right]$$

Здесь $\psi(x)$ — пси-функция Эйлера, C — постоянная Эйлера.

Умножим теперь обе части интегрального уравнения (1.15) на $Y^{-1}(x)$ и проинтегрируем по x в пределах от -1 до 1. Переставив затем интегралы в левой части полученного соотношения, с учетом (1.23) и

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\xi}{Y(\xi)} = \frac{\pi}{\cos\pi\mu} \qquad (1.24)$$

будем иметь

$$P^\circ[\ln\lambda + F_{11}(0) + D_\mu] + iQ^\circ = \cos\pi\mu\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,dx}{Y(x)} \qquad (1.25)$$

Из (1.25) для рассматриваемых случаев имеем

$$\text{а) } P_1^\circ = \cos\pi\mu\,[\ln\lambda + F_{11}(0) + D_\mu]^{-1}\operatorname{Re}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,dx}{Y(x)} \qquad (1.26)$$

$$P_2^\circ = \cos\pi\mu\,[\ln\lambda + F_{22}(0) + D_\mu]^{-1}\operatorname{Im}\int_{-1}^{1}\frac{f(x)\,dx}{Y(x)}$$

$$\text{б) } P_1^\circ = \cos\pi\mu\,[\ln\lambda + F_{11}(0) + D_\mu]^{-1}\int_{-1}^{1}\frac{f_1(x)\,dx}{Y(x)} \qquad (1.27)$$

$$\text{в) } P_1^\circ = [\ln 2\lambda + F_{11}(0)]^{-1}\int_{-1}^{1}\frac{f_1(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (1.28)$$

При получении (1.28) учтено, что $\psi(1/2) = -C - 2\ln 2$.

Приведем еще некоторые соотношения, которые понадобятся дальше.

В работе [1] показано, что

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\xi^m X(\xi)\,d\xi}{\xi - x} = \frac{x^m X(x)}{\operatorname{ctg}\pi\mu} - \frac{P_{m+1}(x)}{\cos\pi\mu} \qquad (|x| \leqslant 1)$$

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n(\mu)\,x^{k-n}, \qquad a_n(\mu) = \sum_{r=0}^{n}\frac{(-1)^r(-{}^1/_2-\mu)_r(\mu-{}^1/_2)_{n-r}}{(n-r)!\,r!} \tag{1.29}$$

$$(z)_n = z(z+1)\ldots(z+n-1), \quad (z)_0 = 1$$

Если функция $f(x) \in H_n{}^\alpha(-\beta, \beta)$, $n \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то можно показать, что

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(x-\xi)^k}{k!}f^{(k)}(\xi)\right| \leqslant A\,|x-\xi|^{\alpha+n} \tag{1.30}$$

при любых x и $\xi \in [-\beta, \beta]$, $A = \text{const} > 0$. Если функция $f(x)$ четная, то взяв в качестве новых переменных x^2, ξ^2 и воспользовавшись формулой (1.30), получим

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(x^2-\xi^2)^k}{(2k)!!}[L^k f(\xi)]\right| \leqslant B_+|x-\xi|^{\alpha+n} \qquad \left(L = \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right) \tag{1.31}$$

при любых x и $\xi \in [-\beta, \beta]$, $B_+ = \text{const} > 0$. Аналогично для нечетной функции $f(x)$ имеем

$$\left| f(x) - x\sum_{k=0}^{n}\frac{(x^2-\xi^2)^k}{(2k)!!}[L^k f(\xi)\,\xi^{-1}]\right| \leqslant B_-|x-\xi|^{\alpha+n} \tag{1.32}$$

при любых $x \in [-\beta, \beta]$ и $0 < \varepsilon \leqslant |\xi| \leqslant \beta$, $B_- = \text{const} > 0$.

Лемма 1. Пусть $f(z) \in H_n{}^\lambda(L)$, $n \geqslant 0$, $0 < \lambda \leqslant 1$, L-гладкий замкнутый контур в плоскости комплексного переменного z. Тогда функция

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad (z \in L) \tag{1.33}$$

также принадлежит $H_n{}^\mu(L)$, причем $\mu = \lambda$, если $\lambda < 1$, и $\mu = 1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, если $\lambda = 1$.

Лемма легко следует из результатов пунктов 4.4 и 5.1 монографии [3].

2. Исследование структуры решения (1.5) интегральных уравнений (1.1) — (1.3). Изучим сначала структуру решения $\varphi^\circ(x)$ интегрального уравнения (1.15).

Теорема 1. Если $f(x) \in H^\alpha_{n+1}(-1, 1)$, $n \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то функция $\varphi^\circ(x)$ имеет вид

$$\varphi^\circ(x) = \omega^\circ(x)\,X^{-1}(x) \tag{2.1}$$

При этом $\omega^\circ(x) \in H^\gamma_n(-1, 1)$, где $\gamma = \alpha$, если $\alpha < 1$, и $\gamma = 1 - \varepsilon$, если $\alpha = 1$, ε — сколь угодно малое положительное число.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай нечетной функции $f(x)$. Используя (1.29), представим выражение (1.21) для $\varphi^\circ(x)$ в виде

$$\varphi^\circ(x) = \frac{\cos\pi\mu}{\pi X(x)}\left[P^\circ - \cos\pi\mu\int_{-1}^{1}\frac{\Phi_n(\xi)X(\xi)\,d\xi}{\xi - x} + Q_{2n+1}(x)\right] + \frac{1}{2}\sin 2\pi\mu\Phi_n(x)$$

$$\Phi_n(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(1-x^2)^k}{(2k)!!}[L^k f'(\xi)]_{\xi=1} \qquad (2.2)$$

Здесь $Q_{2n+1}(x)$ — полином степени $2n+1$.

Легко убедиться, что функция $\Phi_n(x) \in H_n^\alpha(-1, 1)$. Кроме того, из (1.31) следует, что в окрестности точек $x = \pm 1$ функция $\Phi_n(x)$ ведет себя, как $(1 \mp x)^{n+\alpha}$. Остается показать, что интеграл

$$J(x) = \int_{-1}^{1}\frac{\Phi_n(\xi)X(\xi)\,d\xi}{\xi - x} \qquad (|x| \leqslant 1) \qquad (2.3)$$

как функция x принадлежит $H_n^\gamma(-1, 1)$.

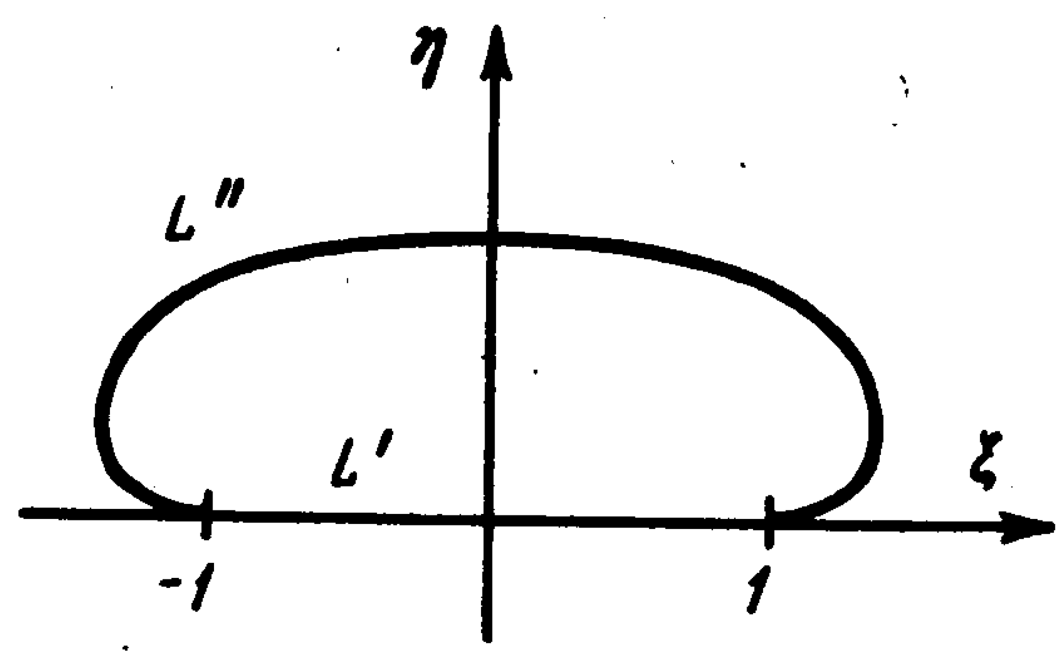
Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$J^*(z) = \int_L \frac{\Phi_n^*(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \quad (z \in L), \qquad \Phi_n^*(z) = \begin{cases} 0, & z \in L'' \\ \Phi_n(x)X(x), & z \in L' \end{cases} \qquad (2.4)$$

Здесь L' — отрезок вещественной оси $|\xi| \leqslant 1$ в плоскости комплексного переменного, L'' — его гладкое замыкание (фигура).

С учетом свойств $\Phi_n(x)$ легко установить, что $\Phi_n^*(z) \in H_n^\alpha(L)$. Тогда на основании леммы 1 можно заключить, что

$$J^*(z) \in H_n^\gamma(L) \qquad (2.5)$$



Замечая теперь, что $J^*(z)$ совпадает на отрезке L' с интегралом $J(x)$, убедимся в справедливости теоремы для случая нечетной функции $f(x)$. Случай четной функции $f(x)$ рассматривается аналогично с привлечением соотношения (1.32).

Следствие 1. Если $f(x) \in H_1^\alpha(-1, 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$, то функция $\varphi^\circ(x) \in L_p(-1, 1)$, $1 \leqslant p \leqslant \varkappa < 2$. Причем для случаев а) и в) величина $\varkappa = 2 - \varepsilon$, для случая б) величина $\varkappa = 2(1 + 2\mu)^{-1} - \varepsilon$, ε — сколь угодно малое положительное число.

Перейдем теперь к изучению структуры функций $\varphi_j^*(\xi)$. При этом будем дальше рассматривать два основных варианта:

$$\text{А)}\ F_{jj}(t) = c_{jj}|t| + G_{jj}(t), \qquad F_{12}(t) = b_{12}t\ln|t| + G_{12}(t) \qquad (2.6)$$

$$G_{jl}(t) \in H_1^\nu(-2/\lambda, 2/\lambda), \qquad 0 < \nu \leqslant 1,\ \lambda > 0$$

$$\text{Б)}\ F_{jl}(t) \in H_{k+1}^\nu\ (-2/\lambda, 2/\lambda), \qquad 0 < \nu \leqslant 1, \qquad \lambda > 0, k \geqslant 0 \qquad (2.7)$$

Кроме того, предполагаем, что решения $\varphi_j^*(\xi)$ интегральных уравнений (1.9) — (1.14) существуют в $L_q(-1, 1)$, $1 < q \leqslant \varkappa$.

Заметим, что вариант А встречается в смешанных задачах для областей с цилиндрическими круговыми границами, например в контактных задачах теории упругости для бесконечной круглой трубы.

Вариант Б встречается при изучении смешанных задач для полосы, клина и т. д.

Для указанных вариантов выясним сначала свойства функции $f_j^*(x)$ вида (1.10), (1.12), (1.14).

С учетом (2.6) перепишем (1.10) в виде

$$f_j^*(x) = -\frac{c_{jj}}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi)+\varphi_j^*(\xi)]\frac{|\xi-x|}{\lambda}d\xi \pm \frac{\varepsilon b_{12}}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi)+\varphi_j^*(\xi)] \times$$
$$\times \frac{(\xi-x)}{\lambda}\ln\frac{|\xi-x|}{\lambda}d\xi - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi)+\varphi_j^*(\xi)]\left[G_{jj}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)-G_{jj}(0)\right]d\xi \pm$$
$$\pm\frac{\varepsilon}{\pi}\int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi)+\varphi_j^*(\xi)]G_{12}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi \qquad (2.8)$$

На основании допущений А относительно свойств функций $\varphi_j^*(\xi)$ и $G_{jl}(t)$, а также с учетом свойств функций $\varphi_j^\circ(\xi)$ не представляет труда показать, что третий и четвертый интегралы в (2.8) как функции от x принадлежат $H_1^\nu(-1, 1)$. Для исследования первых двух интегралов в (2.8) продифференцируем их по x. Будем иметь (2.9)

$$\int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi)+\varphi_j^*(\xi)]\operatorname{sgn}\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi, \qquad \int_{-1}^{1}[\varphi_j^\circ(\xi)+\varphi_j^*(\xi)]\left[\ln\frac{|\xi-x|}{\lambda}+1\right]d\xi$$

Используя неравенство Гельдера и свойства функций $\varphi_j^\circ(\xi)$, $\varphi_j^*(\xi)$, можно доказать, что первый интеграл (2.9) как функция x принадлежит $H_0^r(-1, 1)$, а второй — $H_0^{r-\varepsilon}(-1, 1)$. Здесь

$$r = \operatorname{In} f\left(\frac{p-1}{p}, \frac{q-1}{q}\right)$$

а ε — любое сколь угодно малое положительное число. Следовательно, первый интеграл в (2.8) принадлежит $H_1^r(-1, 1)$, а второй — $H_1^{r-\varepsilon}(-1, 1)$.

Таким образом, для варианта А функции $f_j^*(x) \in H_1^s(-1, 1)$, где для случаев а), б) величина $s = \operatorname{In} f(r-\varepsilon, \nu)$, для случая в) величина

$$s = \operatorname{In} f(r, \nu)$$

Для варианта Б на основании сделанных допущений и свойств $\varphi_j^\circ(\xi)$ легко найдем, что для всех рассматриваемых случаев функции

$$f_j^*(x) \in H_{k+1}^\nu(-1, 1)$$

Теперь можно сформулировать следующие теоремы относительно $\varphi_j^*(x)$.

Теорема 2. Если $f(x) \in H_1^\alpha(-1, 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и если справедливы допущения А), то функция $\varphi^*(x)$ имеет вид

$$\varphi^*(x) = \omega^*(x) X^{-1}(x) \tag{2.10}$$

причем $\omega^*(x) \in H_0^s(-1, 1)$.

Теорема 3. Если $f(x) \in H_1^\alpha(-1, 1)$, $0 < \alpha \leqslant 1$ и если справедливы допущения Б), то функция $\varphi^*(x)$ имеет вид (2.10), причем $\omega^*(x) \in H_{k+1}^l(-1, 1)$, где $l = \nu$, если $\nu < 1$, и $l = 1 - \varepsilon$, если $\nu = 1$, ε — сколь угодно малое положительное число [1].

Здесь $\varphi^*(x) = \varphi_1^*(x) + i\varphi_2^*(x)$ для случая а) и $\varphi^*(x) = \varphi_1^*(x)$ для случаев б) и в). Доказательство теорем 2 и 3 легко следует из теоремы 1 и указанных выше свойств функций $f_j^*(x)$.

3. Об эффективных асимптотических методах решения интегральных уравнений (1.1) — (1.3). В обзорной работе [4] изложены эффективные асимптотические методы решения интегральных уравнений типа (1.3). Некоторые из этих методов без существенных изменений могут быть использованы и для приближенного решения интегральных уравнений типа (1.1), (1.2).

Именно при больших значениях параметра λ асимптотические решения уравнений (1.1), (1.2) могут быть получены методом, аналогичным описанному в [4], п.2. Продемонстрируем это на примере уравнения (1.2), (1.4).

При предположениях А) на основании соотношений (1.21), (1.27) можно представить интегральное уравнение (1.2) в виде эквивалентного ему в $L_p(-1, 1)$ при $\lambda > 0$ интегрального уравнения второго рода

$$\varphi_1(x) = \frac{\cos\pi\mu}{\pi X(x)}\left\{P_1 - \cos\pi\mu \int_{-1}^{1} \frac{f_1'(t)\,X(t)\,dt}{t-x} - \frac{\cos\pi\mu}{\pi\lambda}\int_{-1}^{1}\frac{X(t)\,dt}{t-x}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)\times\right.$$
$$\left.\times\left[F_{11}'\left(\frac{\xi-t}{\lambda}\right) - \operatorname{tg}\pi\mu F_{12}'\left(\frac{\xi-t}{\lambda}\right)\right]d\xi\right\} + \frac{1}{2}\sin 2\pi\mu f_1'(x) +$$
$$+\frac{1}{2\pi\lambda}\sin 2\pi\mu\int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)\left[F_{11}'\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) - \operatorname{tg}\pi\mu F_{12}'\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)\right]d\xi \tag{3.1}$$

при дополнительном условии

$$P_1 = \int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)\,d\xi = \cos\pi\mu(\ln\lambda + D\mu)^{-1}\left\{\int_{-1}^{1}\frac{f_1(t)\,dt}{Y(t)} -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{dt}{Y(t)}\int_{-1}^{1}\varphi_1(\xi)\left[F_{11}\left(\frac{\xi-t}{\lambda}\right) - \operatorname{tg}\pi\mu F_{12}\left(\frac{\xi-t}{\lambda}\right)\right]d\xi\right\} \tag{3.2}$$

---

[1] Можно показать, что результаты теорем 2 и 3 сохраняются, если даже функция $f'(x)$ в точках $x = \pm 1$ имеет особенность типа $(1 - x^2)^{-\theta}$, $0 < \theta < 1/2$.

Допустим теперь, что для функции $F_{jl}(t)$ действительны следующие разложения[1]

$$F_{jj}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{jjk} + b_{jjk}|t| + c_{jjk}\ln|t|)\, t^{2k}$$
$$(c_{jl_0} = 0) \qquad (3.3)$$
$$F_{12}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_{12k} + b_{12k} t \ln|t| + c_{12k}\operatorname{sgn} t)\, t^{2k}$$

равномерно сходящиеся при всех $|t| < \rho$. Тогда все результаты, основанные на (3.3), будут выполнимы, по крайней мере, при всех $\lambda > 2\rho^{-1}$.

Подставим выражения (3.3) в уравнение (3.1) и будем искать его решение в виде

$$\varphi_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1mn}(x)\, \lambda^{-m} \ln^n \lambda \qquad (3.4)$$

Приравнивая коэффициенты правой и левой части (3.1) при одинаковых степенях λ^{-1} и $\ln\lambda$, получим бесконечную систему соотношений для последовательного определения функций $\varphi_{1mn}(x)$, которую для краткости не приводим.

Если в (3.3)

$$b_{jlk} = c_{jlk} = 0 \qquad (3.5)$$

а функция $f_1(x)$ — полином, то при определении $\varphi_{1mn}(x)$ из указанных выше соотношений все квадратуры берутся в замкнутом виде (см., например, [1], формулы (3.1), (3.3)). В общем случае может быть произведено приближенное определение нескольких первых функций $\varphi_{1mn}(x)$ подобно тому, как это сделано в [5].

После нахождения нужного числа функций $\varphi_{1mn}(x)$ (в зависимости от желаемой точности асимптотического решения (3.4)) по формуле (3.2) определяется величина P_1.

При малых значениях параметра λ построение асимптотического решения интегрального уравнения (1.2) методом, изложенным в [4], п.4, не вызывает особых затруднений. Поэтому изложим здесь лишь схему построения асимптотического при малых λ решения для системы интегральных уравнений (1.1).

Перепишем систему (1.1) в виде

$$\int_{-1}^{1} \varphi(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g(x) \qquad (|x| \leqslant 1)$$
$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x), \qquad K(t) = K_{11}(t) + i\varepsilon K_{12}(t) \qquad (3.6)$$
$$g(x) = f(x) + \frac{1}{\pi i}\int_{-1}^{1} \varphi_2(\xi) M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi, \qquad M(t) = K_{22}(t) - K_{11}(t)$$
$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$$

[1] Такого сорта разложения для $F_{jl}(t)$ получаются во всех смешанных задачах для областей вида бесконечной круглой трубы, полосы, клина и т. п.

Теперь систему (3.6) удобно решать методом последовательных приближений по схеме

$$\Phi_n(x) = \Phi_{1n}(x) + i\Phi_{2n}(x) \to \varphi(x), \qquad n \to \infty \tag{3.7}$$

$$\int_{-1}^{1} \Phi_n(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g_n(x) \qquad (|x| \leqslant 1)$$

$$g_n(x) = f(x) + \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{1} \Phi_{2,\,n-1}(\xi) M\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi, \qquad g_0(x) = f(x) \tag{3.8}$$

причем асимптотическое при малых λ решение интегрального уравнения (3.7) может быть построено примерно так, как это описано в [4], п. 4.

Действительно, представим уравнение (3.7) в виде системы трех интегральных уравнений

$$\int_{-1}^{\infty} \psi_{1n}\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g_n(x) + \int_{-\infty}^{-1} \left[\psi_{2n}\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - v_n(\xi)\right] K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi$$

$$(-1 \leqslant x < \infty) \tag{3.9}$$

$$\int_{-\infty}^{1} \psi_{2n}\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g_n(x) + \int_{1}^{\infty} \left[\psi_{1n}\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) - v_n(\xi)\right] K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi$$

$$(-\infty < x \leqslant 1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} v_n(\xi) K\left(\frac{\xi - x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g_n(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{3.10}$$

эквивалентных (3.7) при условии

$$\Phi_n(\xi) = \psi_{1n}\left(\frac{1+\xi}{\lambda}\right) + \psi_{2n}\left(\frac{1-\xi}{\lambda}\right) - v_n(\xi) \qquad (|\xi| \leqslant 1) \tag{3.11}$$

Здесь функция $g_n(x)$ с сохранением достаточной гладкости продолжена в интервалы $-\infty < x < -1$, $1 < x < \infty$. Кроме того если

$$K(t) \sim e^{-\varkappa|t|}, \qquad |t| \to \infty \tag{3.12}$$

то необходимо, чтобы

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varkappa^*|x|} f(x)\, dx < \infty, \qquad \varkappa^* < \varkappa \tag{3.13}$$

Решение интегрального уравнения (3.10) легко находится применением теоремы о свертках для преобразования Фурье. Интегральные уравнения (3.9) заменами переменных приводятся к следующим:

$$\int_{0}^{\infty} \psi_{1n}(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \pi g_n(\lambda t - 1) +$$

$$+ \int_{2/\lambda}^{\infty} [\psi_{2n}(\tau) - v_n(1 - \lambda\tau)] K\left(\frac{2}{\lambda} - \tau - t\right) d\tau \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{3.14}$$

$$\int_{0}^{\infty} \psi_{2n}(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \pi g_n(1 - \lambda t) +$$

$$+ \int_{2/\lambda}^{\infty} [\psi_{1n}(\tau) - v_n(\lambda\tau - 1)] K\left(\tau + t - \frac{2}{\lambda}\right) d\tau$$

Систему интегральных уравнений (3.14) естественно при малых λ решать методом последовательных приближений по схеме

$$\Psi_{1nm} \to \psi_{1n}, \qquad \Psi_{2nm} \to \psi_{2n}, \qquad m \to \infty$$

$$\int_0^\infty \Psi_{1n0}(\tau)\, K(\tau - t)\, d\tau = \pi g_n(\lambda t - 1), \qquad \int_0^\infty \Psi_{2n0}(\tau)\, K(t - \tau)\, d\tau = \pi g_n(1 - \lambda t)$$

$$\int_0^\infty \Psi_{1nm}(\tau)\, K(\tau - t)\, d\tau = \pi g_n(\lambda t - 1) + \int_{2/\lambda}^\infty [\Psi_{2n,\,m-1}(\tau) - v_n(1 - \lambda\tau)] \times$$
$$\times K(2/\lambda - \tau - t)\, d\tau \tag{3.15}$$

$$\int_0^\infty \Psi_{2nm}(\tau)\, K(t - \tau)\, d\tau = \pi g_n(1 - \lambda t) + \int_{2/\lambda}^\infty [\Psi_{1n,\,m-1}(\tau) - v_n(\lambda\tau - 1)] \times$$
$$\times K(\tau + t - 2/\lambda)\, d\tau$$
$$(m \geqslant 1,\ 0 \leqslant t < \infty)$$

При этом на каждом этапе необходимо находить решения интегральных уравнений Винера — Хопфа с одними и теми же ядрами, но с различными правыми частями.

Чтобы получить практически приемлемые решения указанных интегральных уравнений Винера — Хопфа, приходится прибегать к методу приближенной факторизации Койтера [6]. При этом обычно удается так аппроксимировать ядро $K(t)$ вида (3.6), что сохраняются все его основные свойства, а окончательное решение выражается через табулированные функции.

Продемонстрируем это на примере задачи о вдавливании в упругий слой толщины h, жестко защемленный по основанию, штампа при наличии полного сцепления по линии контакта $-a \leqslant x \leqslant a$, $\lambda = h/a$, $\varepsilon = (1 - 2\sigma)\,[2\,(1 - \sigma)]^{-1}$, σ — коэффициент Пуассона.

Для этой задачи [1]

$$K_{jj}(t) = \int_0^\infty \frac{L_{jj}(u)}{u} \cos ut\, du, \qquad K_{12}(t) = \int_0^\infty \frac{L_{12}(u)}{u} \sin ut\, du \qquad (j = 1,\ 2) \tag{3.16}$$

$$L_{jj}(u) = \frac{2\varkappa\, \mathrm{sh}\, 2u + 4\,(-1)^j u}{2\varkappa\, \mathrm{ch}\, 2u + \varkappa^2 + 1 + 4u^2}, \qquad L_{12}(u) = \frac{2\varkappa\,(\mathrm{ch}\, 2u - 1) - 8\,(\varkappa - 1)^{-1} u^2}{2\varkappa\, \mathrm{ch}\, 2u + \varkappa^2 + 1 + 4u^2}$$
$$(\varkappa = 3 - 4\sigma)$$

Тогда имеем

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{L(u)}{u} e^{iut}\, du, \qquad L(u) = L_{11}(u) + \varepsilon L_{12}(u) \tag{3.17}$$

На основании (3.16) легко установить, что

$$u^{-1} L(u) \sim |u|^{-1}(1 + \varepsilon\, \mathrm{sgn}\, u), \qquad u \to \pm\infty$$
$$u^{-1} L(u) \sim A_0 + A_1 u, \qquad u \to 0 \tag{3.18}$$
$$A_0 = 2\varepsilon\,(1 - \varepsilon), \qquad A_1 = 2\varepsilon\,(1 - \varepsilon) - (1 - \varepsilon)^2$$

Найдем теперь решение интегрального уравнения Винера — Хопфа

$$\int_0^\infty \psi(\tau) K(\tau - t)\, d\tau = \pi p(t), \qquad 0 \leqslant t < \infty \tag{3.19}$$

с ядром (3.17). С целью проведения приближенной факторизации аппроксимируем функцию $L(u)\, u^{-1}$ выражением

$$\frac{L^*(u)}{u} = \frac{B(u + iD)^{1/2+i\beta}(u - iD)^{1/2-i\beta}}{u^2 + E^2} = \frac{B\sqrt{u^2 + D^2} \exp[-2\beta \operatorname{arctg}(Du^{-1})]}{u^2 + E^2} \tag{3.20}$$

Постоянные B, D, E и β в (3.20) подберем так, чтобы поведение аппроксимирующей функции $u^{-1}L^*(u)$ совпало с поведением в нуле и на бесконечности функции $u^{-1}L(u)$, определяемом формулами (3.18). После несложных выкладок найдем

$$B = 1 + \varepsilon, \quad D = \frac{2\beta A_0}{A_1}, \quad E^2 = \frac{2\beta\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{A_1}, \quad \beta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon} = \mu i \tag{3.21}$$

Рассмотрим далее случай $p(t) \equiv p = \text{const}$. Решая интегральное уравнение (3.19) с ядром (3.17), (3.20) по известной схеме [6], получим

$$\psi(t) = \frac{pEe^{\pi\beta}}{BD^{1/2-i\beta}\,\Gamma(1/2 + i\beta)} \left[\frac{e^{-Dt}}{t^{1/2-i\beta}} + ED^{-1/2-i\beta}\gamma(1/2 + i\beta, Dt)\right] \tag{3.22}$$

Здесь $\gamma(\alpha, x)$ — неполная гамма-функция

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$$

Таблица этой функции имеется в [7].

Заметим, что интегральное уравнение (3.19) соответствует уравнениям (3.15) для $\Psi_{1nm}(\tau)$. С учетом этого, подставляя в (3.22) выражения $t = (1 + x)\lambda^{-1}$ и $\beta = \mu i$, убедимся, что полученное приближенное решение уравнения (3.19) обладает в точке $x = -1$ особенностью вида $(1 + x)^{-1/2-\mu}$. Это вполне соответствует установленным в пунктах 1,2. фактам относительно особенностей решения смешанных задач со сцеплением. Наконец заметим, что более точная, чем (3.20), аппроксимация получается умножением $u^{-1}L^*(u)$ на соответствующую дробно-рациональную функцию.

Поступила 23 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН Арм ССР, Сер. физ.-матем. н., 1963, т. 16, № 2.
2. Попов Г. Я. Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, 1966, т. 30, вып. 3.
3. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 2. М., Физматгиз, 1963.
4. Александров В. М. Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
5. Александров В. М., Белоконь А. В. Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, 1967, т. 31, вып. 4.
6. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. Пагурова В. И. Таблицы неполной гамма-функции. М., ВЦ АН СССР, 1963.