Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ПРИНЦИП СТАЦИОНАРНОСТИ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Л. М. Зубов

(Ленинград)

Показывается, что уравнениями Эйлера и естественными краевыми условиями вариационной задачи о стационарности дополнительной работы являются уравнения сплошности, записанные в компонентах тензора напряжений Пиола, и граничные условия на той части поверхности, где заданы перемещения.

Дополнительная работа рассматривается как функционал над тензором напряжений Пиола. Уравнения статики для тензора Пиола записываются в метрике начального (недеформированного) состояния; такой подход позволяет разделить статическую и геометрическую стороны задачи о равновесии упругого тела. Для изотропной упругой среды указывается способ выражения дополнительной работы через компоненты тензора Пиола. Основные обозначения, относящиеся к нелинейной теории упругости, взяты из работы [1].

Вариация удельной потенциальной энергии деформации идеально упругого тела равна [1]

$$\delta W = \frac{1}{2}\left(\frac{G}{g}\right)^{1/2} \mathrm{Q} \cdot\cdot\, \delta \mathrm{G}^* = \frac{1}{2}\left(\frac{G}{g}\right)^{1/2} I_1\,\{\mathrm{Q}\cdot\delta\mathrm{G}^*\} \qquad (1)$$

$$(G^* = \nabla R\cdot\nabla R^T)$$

Здесь Q — энергетический тензор напряжений [1], G^* — мера деформации Коши, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки деформированного тела, ∇ — набла-оператор в метрике недеформированного состояния, $I_1\{P\}$ — первый инвариант тензора P, G / g — третий инвариант тензора G^*.

Воспользуемся формулами

$$\sqrt{G/g}\,\mathrm{Q} = \mathrm{D}\cdot(\nabla\mathbf{R})^{-1}, \qquad \delta\mathrm{G}^* = \nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\delta\mathbf{R}^T + \nabla\delta\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T$$

где D — тензор напряжений Пиола [1]; выражение (1) преобразуем к виду

$$\delta W = {}^1/_2 I_1\{\mathrm{D}\cdot(\nabla\mathbf{R})^{-1}\cdot\nabla\mathbf{R}\cdot\delta\nabla\mathbf{R}^T\} + {}^1/_2\,[\mathrm{D}\cdot(\nabla\mathbf{R})^{-1}]\cdot\cdot[\nabla\delta\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T]$$

Так как тензор $\mathrm{D}\cdot(\nabla\mathrm{R})^{-1}$ симметричен, то

$$[\mathrm{D}\cdot(\nabla\mathbf{R})^{-1}]\cdot\cdot[\nabla\delta\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T] = [\mathrm{D}\cdot(\nabla\mathbf{R})^{-1}]\cdot\cdot[\nabla\delta\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{R}^T]^T =$$
$$= [\mathrm{D}\cdot(\nabla\mathbf{R})^{-1}]\cdot\cdot[\nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\delta\mathbf{R}^T] = I_1\,\{\mathrm{D}\cdot(\nabla\mathbf{R})^{-1}\cdot\nabla\mathbf{R}\cdot\nabla\delta\mathbf{R}^T\}$$

Таким образом, вместо (1) имеем

$$\delta W = \mathrm{D}\cdot\cdot\nabla\delta\mathbf{R}^T \qquad (2)$$

Если обозначить $\nabla\mathbf{R} = \mathrm{C}$ и рассматривать W как функцию от компонентов тензора C, то из (2) следует

$$\partial_{sk} = \partial W / \partial C^{sk}$$

Здесь ∂_{sk} и C^{sk} — компоненты тензоров D и C в некотором базисе.

Введем в рассмотрение удельную дополнительную работу деформации как функцию от компонентов тензора D, связанную с W преобразованием Лежандра

$$B = \mathrm{D}\cdot\cdot\mathrm{C}^T - W \tag{3}$$

По свойству преобразования Лежандра [2]

$$\delta B = \mathrm{C}^T\cdot\cdot\delta\mathrm{D} = \nabla\mathbf{R}^T\cdot\cdot\delta\mathrm{D}$$

Пусть упругое тело занимает в недеформированном состоянии объем v, ограниченный поверхностью $o = o_1 + o_2$, причем на o_1 заданы внешние поверхностные силы, а на o_2 перемещения.

Как известно [1], уравнения равновесия в объеме и на поверхности для упругого тела могут быть записаны в виде

$$\nabla\cdot\mathrm{D} + \rho_0\mathbf{K} = 0 \quad \text{в } v, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathrm{D} = \mathbf{F}^\circ \quad \text{на } o_1 \tag{4}$$

Здесь ρ_0 — плотность среды в недеформированном состоянии, $\mathbf{K}$ — вектор массовых сил, $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности недеформированного тела, $\mathbf{F}^\circ$ — вектор поверхностных внешних сил, приходящийся на единицу площади недеформированного тела.

Произвольный тензор D, удовлетворяющий условиям (4), будем называть статически возможным.

Рассмотрим следующий функционал над статически возможными тензорами D, называемый дополнительной работой:

$$\Phi = \iiint\limits_v B\, d\tau - \iint\limits_{o_2} \mathbf{R}\cdot\mathbf{F}^\circ\, do \tag{5}$$

Здесь $\mathbf{F}^\circ$ следует трактовать как реакцию приспособлений, обеспечивающих равенство вектора перемещения на o_2 заданному.

Далее, сославшись на (2) и учитывая, что на o_2 вектор $\mathbf{R}$ не варьируется, получаем

$$\delta\Phi = \iiint\limits_v \nabla\mathbf{R}^T\cdot\cdot\delta\mathrm{D}\, d\tau - \iint\limits_{o_2} \mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{F}^\circ\, do \tag{6}$$

Предполагая, что вектор $\mathbf{R}$ непрерывно дифференцируем, проинтегрируем (6) по частям при помощи тождества

$$\mathrm{P}^T\cdot\cdot\nabla\mathbf{a} = \nabla\cdot(\mathrm{P}\cdot\mathbf{a}) - (\nabla\cdot\mathrm{P})\cdot\mathbf{a} \tag{7}$$

Приходим к равенству

$$\delta\Phi = -\iiint\limits_v (\nabla\cdot\delta\mathrm{D})\cdot\mathbf{R}\, d\tau + \iint\limits_{o_1} \mathbf{n}\cdot\delta\mathrm{D}\cdot\mathbf{R}\, do + \iint\limits_{o_2} \mathbf{n}\cdot\delta\mathrm{D}\cdot\mathbf{R}\, do - \iint\limits_{o_2} \mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{F}^\circ\, do = 0$$

так как согласно (4)

$$\nabla\cdot\delta\mathrm{D} = 0 \quad \text{в } v, \qquad \mathbf{n}\cdot\delta\mathrm{D} = 0 \quad \text{на } o_1, \qquad \mathbf{n}\cdot\delta\mathrm{D} = \delta\mathbf{F}^\circ \quad \text{на } o_2 \tag{8}$$

Таким образом, из непрерывности среды следует свойство стационарности дополнительной работы.

Теперь покажем обратное: уравнениями Эйлера и естественными краевыми условиями вариационной задачи о стационарности дополнительной работы являются уравнения сплошности

$$\nabla \times \mathrm{C} = 0 \quad \text{в } v$$

и граничные условия на o_2.

Так как вариации $\delta\mathrm{D}$ должны удовлетворять условию (8), введем [1] лагранжев вектор $\boldsymbol{\lambda}$

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{v} [\mathrm{C}^T \cdot\cdot \delta\mathrm{D} + \boldsymbol{\lambda}\cdot(\nabla\cdot\delta\mathrm{D})]\, d\tau - \iint\limits_{o_2} \mathbf{R}\cdot\delta\mathbf{F}^\circ\, do$$

Теперь за счет надлежащего выбора вектора $\boldsymbol{\lambda}$ вариации компонент тензора D можно считать независимыми. Далее, сославшись на (7), имеем

$$(\nabla\cdot\delta\mathrm{D})\cdot\boldsymbol{\lambda} = \nabla\cdot(\delta\mathrm{D}\cdot\boldsymbol{\lambda}) - \delta\mathrm{D}\cdot\cdot\nabla\boldsymbol{\lambda}^T$$

Вариационное уравнение принимает вид

$$\delta\Phi = \iiint\limits_{v} (\mathrm{C}^T - \nabla\boldsymbol{\lambda}^T)\cdot\cdot\delta\mathrm{D}\, d\tau + \iint\limits_{o_2} (\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{R})\cdot\delta\mathbf{F}^\circ\, do = 0$$

Из произвольности вариаций $\delta\mathrm{D}$ в объеме и на o_2 получаем, что тензор C должен быть равен градиенту некоторого вектора; это эквивалентно уравнению

$$\nabla \times \mathrm{C} = 0 \tag{9}$$

Сам этот вектор, вычисляемый по тензору C, на поверхности o_2 равен заданному вектору $\mathbf{R}$. Так как тензор C здесь предполагается выраженным через тензор D, то (9) есть условия сплошности, записанные через компоненты тензора напряжений Пиола.

Теперь следует решить вопрос о выражении тензора $\nabla\mathbf{R}$ и дополнительной работе Φ через тензор напряжений Пиола. Для изотропной упругой среды можно предположить следующий способ.

Воспользуемся снова формулой

$$\mathrm{D} = \sqrt{G/g}\,\mathrm{Q}\cdot\nabla\mathbf{R}$$

и образуем симметричный тензор

$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T = (G/g)\,\mathrm{Q}\cdot\mathrm{G}^*\cdot\mathrm{Q}$$

Для изотропной упругой среды тензоры Q и G^* соосны, следовательно, тензор $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$ соосен тензору G^* и может быть представлен в виде

$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T = a\mathrm{E} + b\mathrm{G}^* + c\mathrm{G}^{*2} \tag{10}$$

где a, b, c — функции инвариантов тензора G^*. Соотношение (10) можно обратить, т. е. записать

$$\mathrm{G}^* = a_1\mathrm{E} + b_1\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T + c_1(\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T)^2 \tag{11}$$

[1] Этот способ доказательства рекомендовал автору А. И. Лурье.

Здесь a_1, b_1, c_1 — функции инвариантов тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$. Аналогично можно записать

$$\sqrt{G/g}\,\mathrm{Q} = a_2\mathrm{E} + b_2\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T + c_2(\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T)^2 \qquad (12)$$

где a_2, b_2, c_2 также некоторые функции инвариантов тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$.

Для изотропной упругой среды удельная потенциальная энергия деформации является функцией инвариантов меры деформации Коши G^*. Из соотношения (11) можно выразить инварианты тензора G^* через инварианты тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$, тем самым удельная потенциальная энергия деформации W будет выражена через компоненты тензора напряжений Пиола. Далее величина

$$\mathrm{D}\cdot\cdot\nabla\mathbf{R}^T = \sqrt{G/g}\,\mathrm{Q}\cdot\cdot\mathrm{G}^*$$

при помощи формул (11) и (12) также выражается через инварианты тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$. Таким образом, удельная дополнительная работа деформации изотропного упругого тела B оказывается представленной как функция от инвариантов тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$, т. е. в конечном итоге как функция от компонентов тензора напряжений Пиола. Из (12) следует, что тензор $\sqrt{g/G}\,\mathrm{Q}^{-1}$ также есть изотропная тензорная функция от тензора $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$ и может быть представлен в виде

$$\sqrt{g/G}\,\mathrm{Q}^{-1} = a_3\,\mathrm{E} + b_3\,\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T + c_3(\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T)^2$$

Здесь a_3, b_3, c_3 — снова функции инвариантов $\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T$. Поэтому при известном тензоре D тензор $\nabla\mathbf{R}$ определяется соотношением

$$\nabla\mathbf{R} = [a_3\mathrm{E} + b_3\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T + c_3(D\cdot D^T)^2]\cdot D$$

а радиус-вектор деформированного тела формулой

$$\mathbf{R} = \int_{(M_0)}^{(M)} d\mathbf{r}\cdot[a_3\,\mathrm{E} + b_3\,\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T + c_3(\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T)^2]\cdot\mathrm{D} + \mathbf{R}(M_0)$$

где интеграл может вычисляться по любой кривой, соединяющей точки M_0 и M.

Проведем указанное вычисление на примере полулинейного материала [1]. Для полулинейного материала выражение для удельной потенциальной энергии деформации W и закон состояния имеют следующий вид:

$$W = {}^1/_2\lambda s_1^2 + \mu s_2 = {}^1/_2\,\mathrm{D}\cdot\cdot(\nabla\mathbf{R}^T - \mathrm{A}^T), \quad \mathrm{A} = \mathrm{G}^{*-1/2}\cdot\nabla\mathbf{R} \qquad (13)$$

$$D = [(\lambda s_1 - 2\mu)G^{*-1/2} + 2\mu E]\cdot\nabla R \qquad (14)$$

$$s_1 = I_1\{G^{*1/2}\} - 3, \quad s_2 = I_1\{G^*\} - 2I_1\{G^{*1/2}\} + 3 \quad (\lambda,\ \mu = \mathrm{const})$$

По (14) получаем

$$\mathrm{D}\cdot\mathrm{D}^T = [(\lambda s_1 - 2\mu)\,E + 2\mu\,\mathrm{G}^{*1/2}]^2$$

отсюда

$$2\mu G^{*1/2} = (D\cdot D^T)^{1/2} - (\lambda s_1 - 2\mu)E, \quad s_1 = f_1/(3\lambda + 2\mu), \quad f_1 = I_1\{(D\cdot D^T)^{1/2}\}$$

Далее

$$[(\lambda s_1 - 2\mu)\,G^{*-1/2} + 2\mu E]^{-1} = G^{*1/2}\cdot(D\cdot D^T)^{-1/2} = \\ = \frac{1}{2\mu}\left[E - \left(\frac{\lambda f_1}{3\lambda+2\mu} - 2\mu\right)(D\cdot D^T)^{-1/2}\right]$$

Из (14) теперь получаем

$$\nabla\mathbf{R} = \frac{1}{2\mu}\left[E - \left(\frac{\lambda f_1}{3\lambda+2\mu} - 2\mu\right)(D\cdot D^T)^{-1/2}\right]\cdot D \qquad (15)$$

Отметим, что соотношение (15) остается существенно нелинейным относительно тензора D при сколь угодно малых напряжениях.

Далее вычисляем

$$D\cdot\cdot\nabla\mathbf{R}^T = \frac{1}{2\mu}\left[D\cdot\cdot D^T - \left(\frac{\lambda f_1}{3\lambda+2\mu} - 2\mu\right) f_1\right], \qquad D\cdot\cdot A^T = f_1$$

Окончательно по (13) получаем выражение удельной дополнительной работы деформации для полулинейного материала через первые инварианты тензоров $(D\cdot D^T)^{1/2}$ и $D\cdot D^T$

$$B = {}^1/_2\, D\cdot\cdot\nabla\mathbf{R}^T + {}^1/_2\, D\cdot\cdot A^T = \frac{1}{4\mu}\left[D\cdot\cdot D^T - \frac{\nu}{1+\nu} f_1^2\right] + f_1, \qquad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Замечание. Представление удельной дополнительной работы деформации в виде (3) с той несущественной разницей, что вместо вектора-радиуса деформированного тела **R** используется вектор перемещений, имеется в монографии [3].

Однако в книге [3] удельная дополнительная работа деформации рассматривается как функция и тензора напряжений Пиола и градиентов перемещений; при этом утверждается, что невозможно выразить дополнительную работу только через компоненты тензора Пиола.

При рассмотрении дополнительной работы как функционала и над тензором напряжений Пиола и над вектором перемещений утрачивается смысл начала Кастильяно как вариационного принципа, выделяющего среди всех статически возможных напряженных состояний те, которые удовлетворяют условиям сплошности.

В статье [4] дополнительная работа трактуется как функционал только над тензором напряжений Пиола и устанавливается, что из стационарности дополнительной работы следуют уравнения сплошности (9). Тем не менее вопрос о возможности выразить градиенты перемещений и удельную дополнительную работу деформации через компоненты тензора напряжений Пиола в [4] остался открытым.

В действительности, как показано выше, градиенты перемещений и удельная дополнительная работа деформации могут быть представлены как функции только от компонентов тензора напряжений Пиола; поэтому начало Кастильяно, сформулированное для тензора напряжений Пиола, сохраняет свое значение и в нелинейной теории упругости.

Автор благодарит А. И. Лурье за внимание к работе.

Поступила 27 XI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Теория упругости для полулинейного материала. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
3. Новожилов В. В. Теория упругости. Л., Судпромгиз, 1958.
4. Levinson M. The complementary energy theorem in finite elasticity. Trans. ASME, Ser. E., J. Appl. Mech., 1965, vol. 32, No. 4. (Рус. перев.: Прикл. механ. 1965, № 4.)