Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТРЕУГОЛЬНЫХ ТОЧЕК ЛИБРАЦИИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

А. П. Маркеев

(Москва)

Излагаются результаты исследования устойчивости положения равновесия неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. Для точек либрации найдена область параметрического резонанса с точностью до первой степени эксцентриситета. Получены формулы для расчета характеристических показателей. Внутри областей устойчивости в первом приближении найдены резонансные значения μ и e, при которых точки либрации могут быть неустойчивыми.

1. Рассмотрим три материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона. Пусть точки S и J, имеющие массы m_1 и m_2, движутся относительно их общего центра масс O по кеплеровским эллипсам с эксцентриситетом e. Третье тело движется в плоскости тел S и J, не оказывая влияния на их движение.

Известно [1], что дифференциальные уравнения движения задачи трех тел имеют частное решение, соответствующее точкам либрации: три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся вокруг общего центра масс тел.

В случае круговой задачи ($e = 0$) при выполнении неравенства

$$27\ \mu(1-\mu) < 1$$

$$\mu = m_2 \mid (m_1 + m_2) \qquad (0 < \mu \leqslant 1/2)$$

точки либрации устойчивы в первом приближении [1].

В работе [2] показано, что треугольные точки либрации действительно устойчивы при всех значениях μ в области устойчивости в первом приближении, кроме двух значений

$$\mu = \frac{15 - \sqrt{213}}{30} = 0.0135160\ldots, \qquad \mu = \frac{45 - \sqrt{1833}}{90} = 0.0242938\ldots$$

при которых имеет место неустойчивость [1].

Случай эллиптической задачи рассматривался в работах [5-7]. В работах [5, 6] асимптотическим методом анализируется устойчивость в первом приближении при малых значениях эксцентриситета. В работе [7] при помощи численных расчетов в плоскости μ e получены области устойчивости в первом приближении для любых значений эксцентриситета ($0 \leqslant e < 1$).

---

[1] В работе [2] использованы результаты статьи [3], где при доказательстве неустойчивости допущены неточности. Эти неточности исправлены в работе [4].

В предлагаемой работе найдена область параметрического резонанса с точностью до первой степени эксцентриситета, получены выражения характеристических показателей через коэффициенты характеристического уравнения и указаны значения μ и e, при которых в областях устойчивости в первом приближении точки либрации могут быть неустойчивыми при рассмотрении нелинейной задачи.

2. Пусть начало координат $q_i = p_i = 0$ будет положением равновесия системы

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{2.1}$$

Здесь H — аналитическая в окрестности точки $q_i = p_i = 0$ функция Гамильтона с периодом 2π по независимой переменной t.

Пусть линеаризованная система устойчива и все ее мультипликаторы различны. Тогда можно считать, что функция Гамильтона приведена (см., например, [8]) к виду

$$H = {}^1/_2\lambda_1 (q_1^2 + p_1^2) + {}^1/_2\lambda_2 (q_2^2 + p_2^2) + H_3 + H_4 + \ldots \tag{2.2}$$

Здесь $\pm i\lambda_1$, $\pm i\lambda_2$ — характеристические показатели линеаризованной системы, H_m — однородная функция степени m относительно q_i, p_i, имеющая период 2π по t.

Далее, если для целых чисел k_1 и k_2, удовлетворяющих равенству $|k_1| + |k_2| = 3$ или $|k_1| + |k_2| = 4$, выполняется условие

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 \not\equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ 1) \tag{2.3}$$

то существует [9] аналитическое каноническое 2π — периодическое по t преобразование, приводящее гамильтониан к виду

$$H = \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O((r_1 + r_2)^{5/2}) \tag{2.4}$$
$$(2r_i = q_i^2 + p_i^2)$$

Коэффициенты c_{ij} в (2.4) не зависят от t.

Если квадратичная форма

$$c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2$$

будет знакоопределенной в области $r_1 \geqslant 0$, $r_2 \geqslant 0$, то положение равновесия формально устойчиво [8, 10, 11]. Из формальной устойчивости следует, что неустойчивость по Ляпунову не обнаруживается при учете в разложении (2.2) функций H_m до сколь угодно большого m, а если и существуют траектории, уходящие от начала координат, то движение по ним происходит крайне медленно.

Исследование устойчивости при невыполнении условия (2.3) для неотрицательных k_1 и k_2 проведено в работе [4].

Если условие (2.3) нарушается для одной пары неотрицательных целых чисел k_1 и k_2, сумма которых равна трем, то при соответствующем выборе переменных q_i, p_i функция Гамильтона примет вид

$$H = a_{k_1, k_2} r_1^{1/2 k_1} r_2^{1/2 k_2} \sin(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2) \tag{2.5}$$

где

$$q_i = \sqrt{2r_i}\sin\varphi_i, \qquad p_i = \sqrt{2r_i}\cos\varphi_i \qquad (i = 1, 2)$$

При $a_{k_1, k_2} \neq 0$ положение равновесия неустойчиво.

Когда условие (2.3) не выполняется для пары неотрицательных целых чисел k_1 и k_2, сумма которых равна четырем, гамильтониан можно преобразовать к такому виду

$$H = c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1r_2 + c_{02}r_2^2 + b_{k_1, k_2} r_1^{1/2 k_1} r_2^{1/2 k_2} \sin(k_1\varphi_1 + k_2\varphi_2) + H'(r_i, \varphi_i, t)$$

$$(H' = O((r_1 + r_2)^{5/2})) \tag{2.6}$$

При выполнении неравенства

$$|b_{k_1, k_2}| k_1^{1/2 k_1} k_2^{1/2 k_2} > |c_{20}k_1^2 + c_{11}k_1k_2 + c_{02}k_2^2| \tag{2.7}$$

положение равновесия неустойчиво [1]; если функция $H - H'$ знакоопределенная в окрестности положения равновесия, то имеет место формальная устойчивость.

3. Для исследования движения тела P используем координаты Нехвила с истинной аномалией ν в качестве независимой переменной. Начало системы координат совпадает с центром масс O, ось Ox направлена на тело J. Единицу длины выберем так, чтобы расстояние между телами S и J равнялось единице. Тогда дифференциальные уравнения движения тела P имеют вид [1]

$$\frac{d^2x}{d\nu^2} - 2\frac{dy}{d\nu} = \frac{1}{1 + e\cos\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{d\nu^2} + 2\frac{dx}{d\nu} = \frac{1}{1 + e\cos\nu}\frac{\partial\Omega}{\partial y} \tag{3.1}$$

где

$$\Omega = \frac{x^2 + y^2}{2} + W, \qquad W = \frac{1-\mu}{SP} + \frac{\mu}{JP}$$

$$SP^2 = (x + \mu)^2 + y^2, \qquad JP^2 = (x + \mu - 1)^2 + y^2$$

Нетрудно проверить, что система (3.1) соответствует движению с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + p_x y - p_y x + \frac{e\cos\nu}{2(1 + e\cos\nu)}(x^2 + y^2) - \frac{1}{1 + e\cos\nu}W \tag{3.2}$$

Здесь p_x, p_y — обобщенные импульсы, соответствующие координатам x, y.

Для системы с гамильтонианом (3.2) решение, соответствующее треугольной точке либрации, будет положением равновесия

$$x_0 = 1/2(1 - 2\mu), \quad y_0 = 1/2\sqrt{3}, \quad p_{x_0} = -1/2\sqrt{3}, \quad p_{y_0} = 1/2(1 - 2\mu) \tag{3.3}$$

Введем замену переменных

$$x = x_0 + q_1, \quad y = y_0 + q_2, \quad p_x = p_{x_0} + p_1, \quad p_y = p_{y_0} + p_2$$

---

[1] При $k_i = 0$ величина $k_i^{1/2 k_i}$ в неравенстве (2.7) считается равной единице.

Тогда решение (3.3) будет соответствовать положению равновесия $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$. Разлагая функцию Гамильтона в ряд по степеням q_i, p_i и отбрасывая члены, не зависящие от q_i, p_i, получаем

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{3.4}$$

где

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + p_1q_2 - p_2q_1 + \frac{1}{8(1 + e\cos\nu)} \times$$
$$\times [q_1^2 - 5q_2^2 - 6\sqrt{3}(1 - 2\mu) q_1q_2] + \frac{e\cos\nu}{2(1 + e\cos\nu)}(q_1^2 + q_2^2) \tag{3.5}$$

$$H_3 = \frac{1}{16(1 + e\cos\nu)}[-7(1 - 2\mu) q_1^3 + 3\sqrt{3} q_1^2q_2 + 33(1 - 2\mu) q_1q_2^2 + 3\sqrt{3}q_2^3]$$

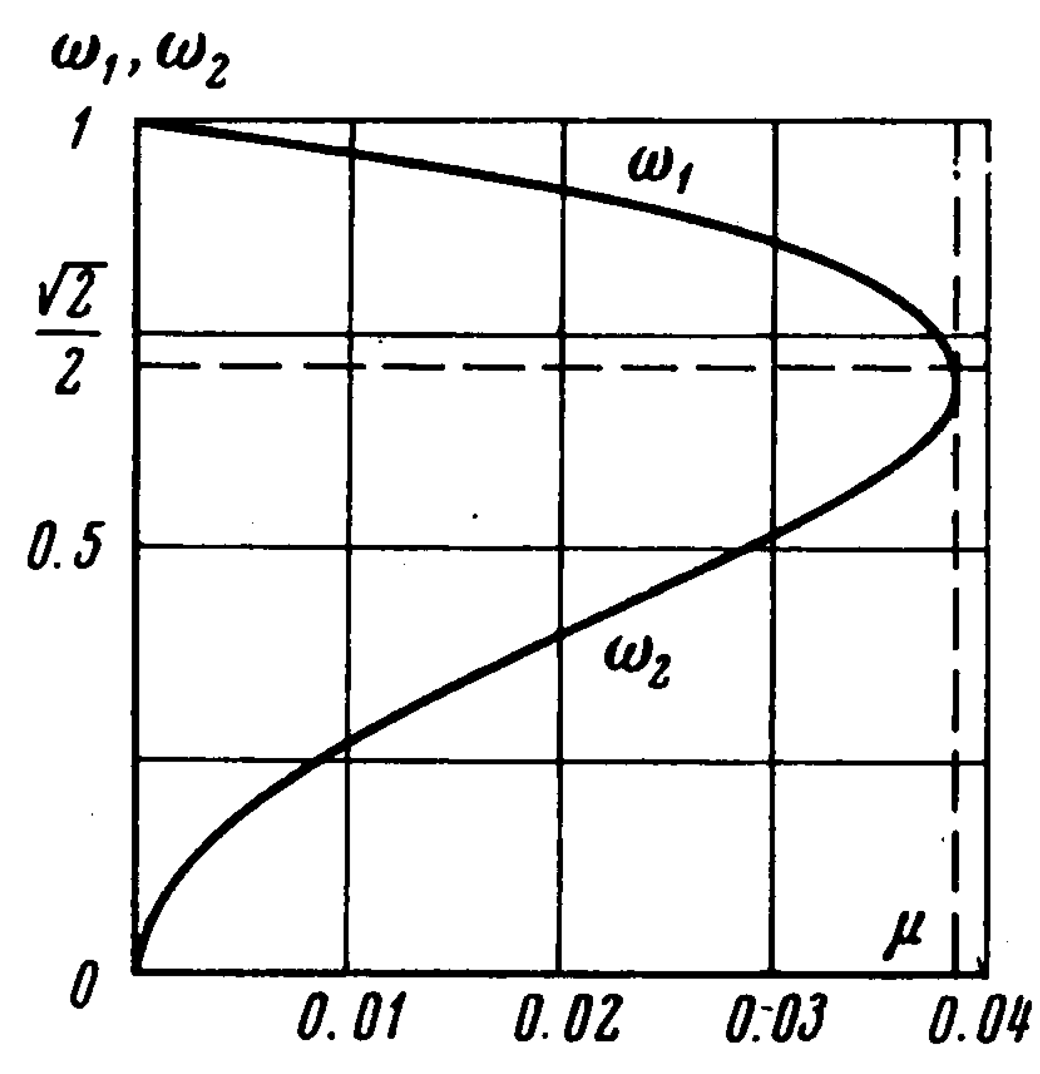
$$H_4 = \frac{1}{128(1 + e\cos\nu)}[37q_1^4 + 100\sqrt{3}(1 - 2\mu) q_1^3q_2 - 246q_1^2q_2^2 -$$
$$- 180\sqrt{3}(1 - 2\mu) q_1q_2^3 - 3q_2^4]$$

4. В эллиптической задаче возможно явление параметрического резонанса. При малых значениях эксцентриситета границы области неустойчивости можно найти асимптотическими методами. Согласно [8], параметрический резонанс обнаруживается в окрестности тех значений μ, для которых величины λ_1 и λ_2 при $e = 0$ удовлетворяют соотношениям

$$\lambda_1 = {}^1/_2 N, \qquad \lambda_2 = {}^1/_2 N, \ \lambda_1 + \lambda_2 = N \tag{4.1}$$

где N — целое число. Из [2] следует, что $\lambda_1 = \omega_1$, $\lambda_2 = -\omega_2$ при $e = 0$. При этом ω_1, ω_2 — действительные положительные корни уравнения

$$\omega^4 - \omega^2 + 27/4\mu(1 - \mu) = 0 \tag{4.2}$$



Фиг. 1

На фиг. 1 приведена зависимость ω_1 и ω_2 от μ. Простой анализ показывает, что в области устойчивости круговой задачи из соотношений (4.1) выполняется только одно соотношение $\omega_2 = {}^1/_2$. При этом

$$\mu = {}^1/_6(3 - 2\sqrt{2}) = 0.0285954\ldots$$

Расчеты при помощи метода усреднения показывают, что границы области неустойчивости в окрестности этого значения μ с точностью до первой степени эксцентриситета имеют вид

$$\mu = 0.0285954\ldots \pm e\, 0.0594720\ldots \tag{4.3}$$

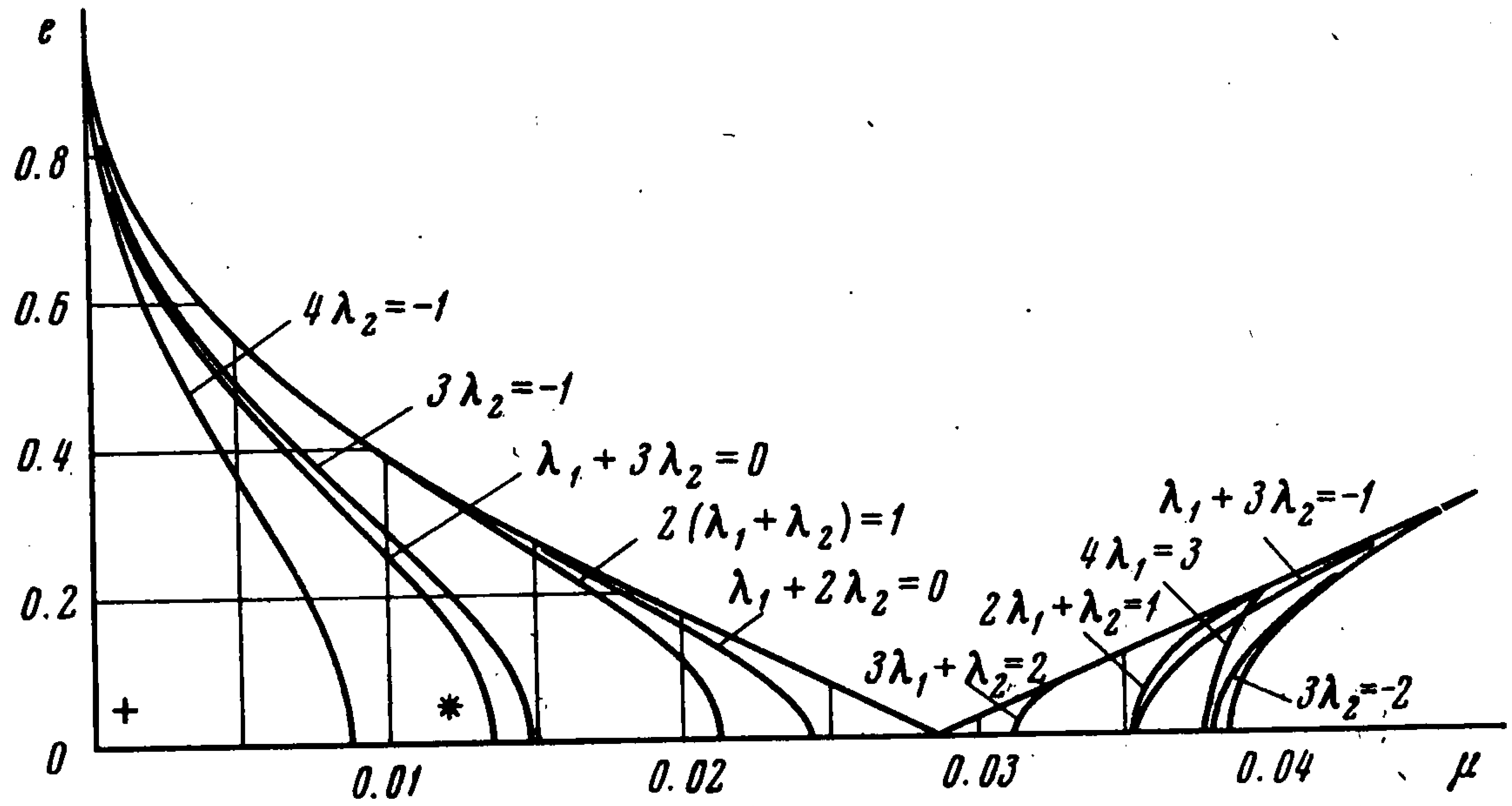
Области устойчивости и неустойчивости линеаризованной задачи для произвольных значений e можно получить при помощи численных расчетов [7]. На фиг. 2 в плоскости μe области устойчивости линеаризованной задачи отмечены сеткой. Вне отмеченных областей точки либрации неустойчивы, а для значений μe, лежащих внутри этих областей, выполняются необходимые условия устойчивости.

5. В областях необходимых условий устойчивости при значениях параметров μ, e, удовлетворяющих для неотрицательных целых чисел k_1, k_2 резонансным соотношениям (2.3), движение может быть неустойчивым. Чтобы найти резонансные значения параметров, получим сначала выражения для величин λ_1, λ_2 через коэффициенты характе-

ристического уравнения

$$\rho^4 - a_1\rho^3 + a_2\rho^2 - a_1\rho + 1 = 0$$

Коэффициент a_1 равен следу фундаментальной матрицы линеаризованной системы, вычисленной при $\nu = 2\pi$, a_2 равен сумме всех ее главных миноров второго порядка.



Фиг. 2

В плоскости коэффициентов a_1, a_2 область устойчивости линеаризованной системы задается системой неравенств [12]

$$-2 < a_2 < 6, \qquad 4(a_2 - 2) < a_1^2 < {}^1/_4\,(a_2 + 2)^2$$

В этой области корни характеристического уравнения можно записать в виде

$$\rho_1 = e^{i2\pi\lambda_1}, \quad \rho_2 = e^{i2\pi\lambda_2}, \quad \rho_3 = e^{-i2\pi\lambda_1}, \quad \rho_4 = e^{-i2\pi\lambda_2}$$

Нетрудно проверить, что имеют место соотношения

$$a_1 = 2(\cos 2\pi\lambda_1 + \cos 2\pi\lambda_2), \qquad a_2 = 2 + 4\cos 2\pi\lambda_1 \cos 2\pi\lambda_2$$

Следовательно, $\cos 2\pi\lambda_1$ и $\cos 2\pi\lambda_2$ удовлетворяют уравнению

$$z^2 - {}^1/_2\, a_1 z + {}^1/_4\,(a_2 - 2) = 0 \tag{5.1}$$

Из этого уравнения λ_1 и λ_2 определяются неоднозначно. Для однозначного определения λ_1 и λ_2 рассмотрим предельный случай круговой задачи. При $e = 0$ корни уравнения (5.1) будут такими

$$z_{1,2} = {}^1/_2\,(\cos 2\pi\omega_1 + \cos 2\pi\omega_2 \pm |\cos 2\pi\omega_1 - \cos 2\pi\omega_2|)$$

При помощи (4.2) легко проверить, что $\cos 2\pi\omega_1 \geqslant \cos 2\pi\omega_2$. Поэтому

$$\lambda_1 = (2\pi)^{-1}\operatorname{Arc\,cos} z_1, \qquad \lambda_2 = (2\pi)^{-1}\operatorname{Arc\,cos} z_2$$

Далее, учитывая, что $1 \geqslant \omega_1 \geqslant {}^1/_2\sqrt{2} \geqslant \omega_2 \geqslant 0$, получаем

$$\lambda_1 = 1 - (2\pi)^{-1}\arccos z_1 \qquad \text{при всех } \omega_1 \text{ и } \omega_2$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -(2\pi)^{-1}\arccos z_2 & \text{при } 0 \leqslant \omega_2 \leqslant {}^1/_2 \\ -1 + (2\pi)^{-1}\arccos z_2 & \text{при } {}^1/_2 \leqslant \omega_2 \leqslant {}^1/_2\sqrt{2} \end{cases}$$

Таким образом, неоднозначность в определении величин λ_1 и λ_2 устранена, и их можно вычислять по формулам

$$\lambda_1 = 1 - (2\pi)^{-1}\arccos {}^1/_4\,(a_1 + \Delta) \qquad \text{при } \mu \geqslant 0$$

$$\lambda_2 = \begin{cases} -(2\pi)^{-1}\arccos {}^1/_4\,(a_1 - \Delta) & \text{при } 0 \leqslant \mu \leqslant {}^1/_6\,(3 - 2\sqrt{2}) \\ -1 + (2\pi)^{-1}\arccos {}^1/_4\,(a_1 - \Delta) & \text{при } \mu \geqslant {}^1/_6\,(3 - 2\sqrt{2}) \end{cases} \tag{5.2}$$

$$\Delta = (a_1^2 - 4a_2 + 8)^{1/2}$$

Для нахождения резонансных значений параметров нужно при фиксированных μ и e из области необходимых условий устойчивости вычислить фундаментальную матрицу при $\nu = 2\pi$, найти коэффициенты a_1, a_2 характеристического уравнения, а затем по формулам (5.2) вычислить λ_1 и λ_2. Эти расчеты проводились на вычислительной машине. На фиг. 2 в плоскости μe внутри областей устойчивости в первом приближении построены кривые, на которых выполняются резонансные соотношения. При $e = 0$ эти кривые перпендикулярны оси $O\mu$ и исходят из точек, которые определяются следующими данными

μ	0.0087...	0.0135...	0.0148...	0.0212...	0.0242...
	$4\lambda_2 = -1$	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0$	$3\lambda_2 = -1$	$\lambda_1 + \lambda_2 = {}^1/_2$	$\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$
μ	0.0312...	0.0353...	0.0353...	0.0378...	0.0380...
	$3\lambda_1 + \lambda_2 = 2$	$2\lambda_1 + \lambda_2 = 1$	$\lambda_1 + 3\lambda_2 = -1$	$4\lambda_1 = 3$	$3\lambda_2 = -2$

Для значений μe, принадлежащих резонансным кривым, возможна неустойчивость или формальная устойчивость. Вне резонансных кривых возможна формальная устойчивость. Для решения последних вопросов надо провести расчеты, используя результаты работ [4, 10, 11].

В заключение отметим, что для системы Солнце — Юпитер и Земля — Луна имеем соответственно $\mu = 0.000953...$, $e = 0.048253...$ и $\mu = 0.012116...$, $e = 0.054900...$. Точки с этими значениями параметров отмечены на фиг. 2 крестиком и звездочкой. На резонансные кривые они не попадают.

Автор благодарит В. А. Сарычева за внимание к работе и В. П. Алексеенко за помощь при проведении численных расчетов.

Поступила 11 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М., «Наука», 1964.
2. Маркеев А. П. Об устойчивости треугольных точек либрации в круговой ограниченной задаче трех тел. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
3. Маркеев А. П. Об устойчивости канонической системы с двумя степенями свободы при наличии резонанса. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. Маркеев А. П. Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
5. Гребеников Е. А. Об устойчивости лагранжевых треугольных решений ограниченной эллиптической задачи трех тел. Астрон. ж., 1964, т. 41, вып. 3.
6. Лукьянов Л. Г. Об устойчивости в первом приближении треугольных лагранжевых решений ограниченной эллиптической задачи трех тел. Бюл. Ин-та теор. астрон. АН СССР, 1969, т. 11, № 10 (133), стр. 693.
7. Danby J. M. A. Stability of the Triangular Points in the Elliptic Restricted Problem of Three Bodies. Astronom. J., 1964, vol. 69, No. 2, p. 165.
8. Moser J. New Aspects in the Theory of Stability of Hamiltonian Systems. Comm. Pure Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81.
9. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. М.— Л., Гостехтеориздат, 1941.
10. Glimm J. Formal Stability of Hamiltonian Systems, Comm. Pure Appl. Math., 1964, vol. 17, No. 4, p. 509.
11. Брюно А. Д. О формальной устойчивости систем Гамильтона. Матем. заметки. 1967, т. 1, вып. 3, стр. 325.
12. Ляпунов А. М. Об устойчивости движения в одном частном случае задачи о трех телах. Собр. соч., М.— Л., Изд-во АН СССР, 1956, т. 1.