Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. К. Персидский

(Алма-Ата)

Для системы уравнений возмущенного движения указаны некоторые признаки существования сектора, что в свою очередь позволило получить ряд новых теорем, относящихся ко второму методу Ляпунова.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx_s \,/\, dt = f_s(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

правые части которой непрерывны в области

$$(h)\, t \geqslant 0, \ \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant A$$

причем $f_s(t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$.

Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ величины, каждая из которых может принимать одно из следующих двух значений 1 и -1.

Пусть указанные параметры приняли какие-либо фиксированные значения $\alpha_s = \alpha_{s0}$, $(s = 1, 2, \ldots, n)$, тогда обозначим через $K_0\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ множество всех тех точек $(t, x_1, \ldots, x_n) \in h$, у которых ни одна из координат $x_s \neq 0$ и

$$\operatorname{sign} x_s = \alpha_{s0} \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{2}$$

При этом будем говорить, что сами числа $\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}$ образуют базис рассматриваемой области K_0.

Множество $\sigma\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ всех тех граничных точек области $K_0\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$, у которых одна или несколько координат $x_s = 0$, назовем боковой поверхностью этой области и положим

$$K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}) = K_0\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}\, U\, \sigma\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\} \tag{3}$$

Отметим, что если область h задана неравенствами

$$t \geqslant 0, \qquad \|x\| < \infty \tag{4}$$

то соответствующее некоторому базису $\{\alpha_{s0}\}$ множество $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ будет «конусом».

Определение 1. Будем говорить, что в области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ правые части системы (1) обладают свойством сохранения знаков элементов базиса $\{\alpha_{s0}\}$, если в точках боковой поверхности $\sigma\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ выполняются неравенства

$$\alpha_{s0} f_s(t, x_1, \ldots x_{s-1}, 0, x_{s+1}, \ldots x_n) \geqslant 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

Определение 2. Пусть $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая функция Ляпунова. Назовем ее положительной знакоопределенной в области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$, если существует не зависящая от t такая знакоопределенная положительная в области h функция $\omega(x_1, \ldots x_n)$, что во всех точках $(t, x_1, \ldots, x_n) \in K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ выполняется неравенство $v \geqslant \omega$.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого аналогично доказательству леммы 4.1 из работы [1].

Лемма 1. Пусть правые части системы (1) обладают в области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ свойством сохранения знаков элементов базиса $\{\alpha_{s0}\}$.

Тогда через любую точку $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in K_0\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ проходит хотя бы одно такое решение этой системы, которое при всех значениях $t \geqslant t_0$ либо не покидает область $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$, либо может покинуть ее лишь через точки поверхности

$$t \geqslant 0, \qquad \|x\| = A \tag{6}$$

Лемма 2. Если при выполнении условий леммы 1 область h задается неравенством (4) и решения системы (1) обладают свойством единственности, то соответствующая область $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ будет для этой системы положительно инвариантным множеством.

Например, в случае системы линейных уравнений

$$dx_s/dt = P_{s1}(t)\, x_1 + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

с непрерывными коэффициентами область $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ будет положительно инвариантным множеством в случае, когда базис $\{\alpha_{s0}\}$ и коэффициенты системы связаны при всех значениях $t \geqslant 0$ соотношениями

$$p_{ks}\alpha_{s0}\alpha_{k0} \geqslant 0 \quad \text{при } s \neq k \qquad (s, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{8}$$

Нетрудно видеть, что при этом положительно инвариантным множеством будет и конус $K\{-\alpha_{10}, \ldots, -\alpha_{n0}\}$.

В частности, если $p_{sk}(t) \geqslant 0$ при $s \neq k$, то система (7) имеет два положительно инвариантных множества $K\{1, 1, \ldots, 1\}$ и $K\{-1, -1, \ldots, -1)\}$, что согласуется с [1].

Заметим, что в случае выполнения условий леммы 1 соответствующая область $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ будет сектором [2], поэтому эта лемма может быть использована для построения некоторых признаков неустойчивости.

Например, имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть правые части системы (1) обладают в области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ свойством сохранения знаков элементов ее базиса и при некоторых вещественных постоянных $A_1, \ldots, A_n$, среди которых хотя бы одно из чисел $A_s > 0$, в точках области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ имеет место неравенство

$$\sum_{s=1}^{n} \alpha_{s0} A_s f_s(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \lambda(t)\, W(t, x_1, \ldots, x_n)$$

где

$$\lambda(t) \geqslant 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau = \infty$$

а W — положительная знакоопределенная функция в рассматриваемой области.

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Теорема 2. Пусть элементы некоторого базиса $\{\alpha_{s0}\}$ и коэффициенты системы (7) связаны при $t \geqslant 0$ соотношениями (8).

Если при этом существуют вещественные постоянные $c_1, \ldots, c_n$, среди которых хотя бы одно из чисел $c_l > 0$, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{\substack{k=1\\(k\neq s)}}^{n} |p_{ks}(t)|\, c_k + p_{ss}(t)\, c_s \geqslant F(t) \geqslant 0 \qquad (s=1,2,\ldots,n) \tag{9}$$

где

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t F(\tau)\, d\tau = \infty$$

то нулевое решение рассматриваемой системы неустойчиво.

Теорема 3. Если элементы некоторого базиса $\{\alpha_{s0}\}$ и коэффициенты системы (7) удовлетворяют при $t \geqslant 0$ неравенствам (8) и хотя бы для одного из диагональных коэффициентов $p_{ss}(t)$ этой системы выполняется соотношение

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t p_{ss}(\tau)\, d\tau = \infty \tag{10}$$

то нулевое решение системы (7) неустойчиво.

Доказательство этих теорем легко получить при помощи функций Ляпунова, взятых в виде некоторых линейных форм.

Например, для доказательства теоремы 3 можно положить

$$v = \alpha_{s0} x_s \exp\left(-\int_0^t p_{ss}(\tau)\, d\tau\right) \tag{11}$$

Тогда в точках множества $K_0\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ функция $v > 0$, а ее полная производная в силу системы (7) будет удовлетворять в области $K\ \{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ неравенству

$$v' = \alpha_{s0} \exp\left(-\int_0^t p_{ss}(\tau)\, d\tau\right)(p_{s1}(t)\, x_1 + \ldots + p_{s,\, s-1}(t)\, x_{s-1} + \\ + p_{s,\, s+1}(t)\, x_{s+1} + \ldots + p_{sn}(t)\, x_n) \geqslant 0$$

Таким образом, для рассматриваемой системы уравнений будут выполнены все условия одной теоремы о неустойчивости с сектором из работы [3].

Рассмотрим далее систему линейных дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n \qquad (s=1,2,\ldots,n) \tag{12}$$

коэффициенты которой вещественные постоянные.

Лемма 3. Пусть коэффициенты системы (12) и элементы некоторого базиса $\{\alpha_{s0}\}$ связаны соотношениями (8).

Тогда чтобы все корни векового уравнения

$$\det \| p_{sk} - \lambda \delta_{sk} \| = 0 \qquad (13)$$

имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы при любых положительных $a_1, \ldots, a_n$ все определяемые из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ks} \alpha_{k0} b_k = -\alpha_{s0} a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (14)$$

числа $b_1, \ldots, b_n$ были положительными.

Необходимость. Пусть все корни уравнения (13) имеют отрицательные вещественные части, тогда определитель системы (14)

$$\Delta = \alpha_{10} \ldots \alpha_{n0} \det \| p_{sk} \| \neq 0$$

Положим

$$v(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} b_s \alpha_{s0} x_s$$

Из (14) следует, что ни одно из чисел $b_s \neq 0$. Допустим, что хотя бы одна из величин $b_s < 0$. Тогда функция v удовлетворяла бы в силу системы (12) в точках положительно инвариантного множества $K\ \{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости, а нулевое решение этой системы асимптотически устойчиво.

Аналогично доказывается достаточность и следующая лемма.

Лемма 4. Пусть коэффициенты системы (12) таковы, что для некоторого базиса $\{\alpha_{s0}\}$ выполняются неравенства (8) и $\det \| p_{sk} \| \neq 0$.

Тогда, чтобы уравнение (13) имело хотя бы один корень с положительной вещественной частью или имело такие корни с вещественными частями, равными нулю, что соответствующее этим корням число групп решений меньше их кратности, необходимо и достаточно существование хотя бы одного отрицательного числа b_s, определяемого из системы (14).

Отметим, что при выполнении соотношений (8) система (14) может быть представлена в следующем виде:

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq s)}}^{n} | p_{ks} | b_k + p_{ss} b_s = -a_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (15)$$

При помощи приведенных лемм нетрудно получить ряд теорем об устойчивости и неустойчивости для системы уравнений

$$dx_s / dt = p_{s1} \varphi_1 (t, x_1, \ldots, x_n) + \ldots + p_{sn} \varphi_n (t, x_1, \ldots, x_n)$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (16)$$

где p_{sk} — вещественные постоянные, а функции φ_s непрерывны в h, причем $\varphi_s (t, 0, 0, \ldots, 0) \equiv 0$.

ть в области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ выполняются следующие

асти системы (16) обладают свойством сохранения знаков
азиса $\{\alpha_{s0}\}$;

екоторых положительных постоянных $A_1 \ldots, A_n$, выполняется
тво

$$\sum_{s=1}^{n} A_s \alpha_{s0} \varphi_s(t, x_1 \ldots, x_n) \geqslant \lambda(t) W(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{17}$$

где

$$\lambda(t) \geqslant 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau = \infty$$

а W — положительная знакоопределенная функция в области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$;

3) элементы базиса $\{\alpha_{s0}\}$ и коэффициенты системы связаны соотношениями (8).

Если при этом уравнение (13), не имея корней, равных нулю, имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью или имеет такие корни с вещественными частями, равными нулю, что соответствующее этим корням число групп решений меньше их кратности, то нулевое решение системы (16) неустойчиво.

Для доказательства теоремы определим постоянные $B_1, \ldots, B_n$ из системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ks} \alpha_{k0} = \alpha_{s0} A_s \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{18}$$

и положим

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} B_s \alpha_{s0} x_s \tag{19}$$

Из леммы 4 следует, что хотя бы одно из чисел $B_s > 0$, поэтому форма V способна принимать в области $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ положительные значения, причем в точках этой области

$$V' = \sum_{s=1}^{n} \alpha_{s0} A_s \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \tag{20}$$

Допустим, что нулевое решение системы (16) устойчиво. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$, $(\varepsilon < A)$ найдется такое число $\delta > 0$, что все интегральные линии системы (16), лежащие при $t = 0$ на сфере $\|x\| = \delta$, ни при каких значениях $t \geqslant 0$ не достигают сферы $\|x\| = \varepsilon$.

Выберем на сфере $\|x\| = \delta$ точку $(0, x_1, \ldots, x_n) \in K_0\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$, в которой $V > 0$ и рассмотрим проходящую через эту точку ту интегральную линию системы (16)

$$x_s = u_s(t) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{21}$$

которая, согласно лемме 1, не пересекает боковую поверхность $\sigma\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ ни при каких значениях $t \geqslant 0$. На основании (20) заключаем, что указанная интегральная линия не имеет общих точек и с некоторой достаточно малой окрестностью начала ординат $h_\alpha : t \geqslant 0$, $\|x\| \leqslant \alpha$, $(0 < \alpha < \delta)$. Но в точках множества $K\{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\} \setminus h_\alpha$ функция $W(t, x_1, \ldots, x_n) \geqslant \beta > 0$, где β — некоторое достаточно малое число. Отсюда следует, что при всех значениях $t \geqslant 0$ вдоль решения (21) долж[...] неравенство

$$V(u_1(t), \ldots, u_n(t)) \geqslant V(x_{10}, \ldots, x_{n0}) + \beta \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$$

которое заведомо нарушается при достаточно больших значениях t.

Пусть дана система уравнений

$$dx_s/dt = p_{s1}\varphi_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots + p_{sn}\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) + R_s(x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (22)$$

где p_{sk} — вещественные постоянные, φ_s — многочлены относительно величин $x_1, \ldots, x_n$ степени не выше чем $N \geqslant 1$, причем $\varphi_s(0, \ldots, 0) = 0$, а функции R_s разлагаются в некоторой окрестности начала координат по степеням $x_1, \ldots, x_n$ в ряды, начинающиеся членами порядка не ниже чем $N + 1$.

Теорема 5. Пусть в области $K\ \{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ правые части системы (22) обладают свойством сохранения знаков элементов базиса $\{\alpha_{s0}\}$ и удовлетворяют следующим условиям:

1) при некоторых положительных постоянных $A_1, \ldots, A_n$ функция

$$U(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} A_s \alpha_{s0} \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (23)$$

является в области $K\ \{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ положительной знакоопределенной формой,

2) коэффициенты p_{sk} и элементы базиса $\{\alpha_{s0}\}$ связаны соотношениями (8).

Если при этом $\det \| p_{sk} \| \neq 0$ и уравнение (13) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью или имеет такие корни с вещественными частями, равными нулю, что соответствующее этим корням число групп решений меньше их кратности, то нулевое решение системы (22) неустойчиво.

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что полная производная в силу системы (22) линейной формы (19) будет функцией положительной знакоопределенной в точках пересечения множества $K\ \{\alpha_{10}, \ldots, \alpha_{n0}\}$ с некоторой достаточно малой окрестностью начала координат.

Теорема 6. Пусть в области h функции φ_s удовлетворяют условиям

$$\varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_s \geqslant 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (24)$$

Если при этом существуют положительные постоянные $A_1, \ldots, A_n$, удовлетворяющие неравенствам

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k \neq s)}}^{n} |p_{ks}| A_k + A_s p_{ss} \leqslant 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n) \qquad (25)$$

то нулевое решение системы (16) устойчиво.

Действительно, положим

$$V(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} A_s |x_s| \tag{26}$$

Нетрудно видеть, что в силу системы (16)

$$V' \leqslant \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |p_{ks}| A_k + p_{ss} A_s \right) \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_s \leqslant 0 \tag{27}$$

что и доказывает теорему.

Отметим, что соотношения (25) будут заведомо выполнены со знаками строгого неравенства в случае, когда коэффициенты p_{sk} и элементы некоторого базиса $\{\alpha_{s0}\}$ связаны соотношениями (8) и все корни уравнения (13) имеют отрицательные вещественные части.

Отметим также, что теорема 6 является модификацией и некоторым уточнением одной теоремы об устойчивости, приведенной в нашей работе [4].

Аналогично теореме 6 доказывается следующий критерий асимптотической устойчивости, близкий к одной теореме из [5].

Теорема 7. Если при выполнении условий теоремы 6 соотношения (25) имеют место со знаками строгих неравенств и функция

$$U(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(t, x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_s \tag{28}$$

является положительной знакоопределенной, то нулевое решение системы (16) асимптотически устойчиво, равномерно по t_0 и x_{s0}.

Рассмотрим два следствия из этой теоремы.

Следствие 1. Пусть система (22) такова, что функции $\varphi_s(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяют условиям (24). Если при этом выражение

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s=1}^{n} \varphi_s(x_1, \ldots, x_n) \operatorname{sign} x_s \tag{29}$$

является однородной функцией положительной знакоопределенной и при некоторых положительных $A_1, \ldots, A_n$ со знаками строгих неравенств выполнены соотношения (25), то нулевое решение системы (22) асимптотически устойчиво.

Следствие 2. Пусть область h определения правых частей системы (16) задается неравенствами (4).

Если в этой области выполнены все условия теоремы 7, то нулевое решение системы (16) будет асимптотически устойчиво в целом, равномерно по t_0 и x_{s0}.

Отметим, что в этом случае функция (26) будет удовлетворять в силу рассматриваемой системы дифференциальных уравнений всем условиям теоремы о равномерной асимптотической устойчивости в целом из работы [6].

В заключение в качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$dx_s/dt = p_{s1}\varphi_1(x_1) + \ldots + p_{sn}\varphi_n(x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{30}$$

где P_{sk} — вещественные постоянные, а $\varphi_s(x_s)$ непрерывны и удовлетворяют неравенствам

$$\varphi_s(x_s) \operatorname{sign} x_s > 0 \quad \text{при } x_s \neq 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

Пусть коэффициенты этой системы и элементы некоторого базиса $\{\alpha_{s0}\}$ связаны соотношениями (8), тогда на основании теоремы 4 и второго следствия из теоремы 7 можно сделать следующие заключения:

1) для абсолютной устойчивости рассматриваемой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни векового уравнения (13) имели отрицательные вещественные части;

2) пусть при выполнении сделанных выше предложений относительно правых частей системы (30) $\det \| p_{sk} \| \neq 0$. Тогда, чтобы нулевое решение этой системы было неустойчиво при любом выборе функций $\varphi_s(x_s)$, удовлетворяющих неравенствам (31), необходимо и достаточно существование хотя бы одного корня уравнения (13) с положительной вещественной частью или существование таких корней этого уравнения с вещественными частями, равными нулю, что соответствующее этим корням число групп решений меньше их кратности.

Поступила 24 II 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966, стр. 62—63.
2. Персидский С. К. Ко второй методе Ляпунова. Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ. 1947, № 42, вып. 1, стр. 48—55.
3. Персидский С. К. Ко второй методе Ляпунова. Изв. АН КазССР, сер. матем. и механ. 1956, вып. 4(8).
4. Персидский С. К. Исследование устойчивости решений некоторых нелинейных систем дифференциальных уравнений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
5. Скачков Б. Н. Об устойчивости нелинейной системы дифференциальных уравнений, Вестник ЛГУ, № 19, вып. 4, 1960.
6. Барбашин Е. А., Красовский Н. Н. О существовании функции Ляпунова в случае асимптотической устойчивости в целом. ПММ, 1954, т. 18, вып. 3.