Прикладная математика и механика. Том 34, 1970

К ЗАДАЧЕ ВСТРЕЧИ В СИСТЕМАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ИМПУЛЬСНЫМИ И НЕПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассмотрены две задачи на минимакс времени до встречи объектов. Векторы управлений преследователя и убегающего предполагаются постоянными по направлению и непараллельными. Каждый из векторов стеснен «импульсным» ограничением. По тематике статья примыкает к [1, 2]. Приведены результаты вычислений, выполненных Ю. А. Краюшкиным.

1. Пусть относительное движение преследующего $P\ (y_1,\ y_2)$ и убегающего $E\ (z_1,\ z_2)$ в переменных $x_1 = y_1 - z_1$, $x_2 = y_2 - z_2$ описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x_1^{\cdot} &= x_2 + v\cos\varphi = x_2 + v\gamma_1 \\ x_2^{\cdot} &= -x_1 + v\sin\varphi + u = -x_1 + v\gamma_2 + u \end{aligned} \tag{1.1}$$

а управления u и v стеснены условиями

$$\begin{aligned} \mu(\tau) &= M - \int_0^\tau |u|\,d\tau \geqslant 0, \qquad M = \mathrm{const} > 0 \\ \nu(\tau) &= N - \int_0^\tau |v|\,d\tau \geqslant 0, \qquad N = \mathrm{const} > 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Управление $v(\tau)$ формируется в зависимости от фазового вектора $(x_1,\ x_2,\ \mu,\ \nu)$ системы, а преследователь знает еще и управление $v(\tau)$, т. е. объекты дискриминированы

$$\begin{aligned} v(\tau) &= v\,[x_1(\tau),\ x_2(\tau),\ \mu(\tau),\ \nu(\tau)] \\ u(\tau) &= u\,[x_1(\tau),\ \ldots,\ \nu(\tau),\ v(\tau)] \end{aligned}$$

Ограничения (1.2) допускают управления в виде импульсных δ-функций $u = \mu_1\delta$, $v = \nu_1\delta$, поэтому будем считать, что в этом случае переменные изменяются согласно формулам

$$\begin{aligned} x_1(\tau) &= x_1(\tau - 0) + \nu_1\gamma_1, \qquad & x_2(\tau) &= x_2(\tau - 0) + \nu_1\gamma_2 + \mu_1 \\ \mu(\tau) &= \mu(\tau - 0) - |\mu_1|, \qquad & \nu(\tau) &= \nu(\tau - 0) - |\nu_1| \end{aligned} \tag{1.3}$$

Допустимой траекторией $x_1(\tau)$, $x_2(\tau)$, $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ будем называть траекторию с конечным числом скачков, всюду непрерывную справа и почти всюду удовлетворяющую уравнениям (1.1) в совокупности с уравнениями $\mu^{\cdot} = -|u|$, $\nu^{\cdot} = -|v|$. Пару управлений, реализующих допустимую траекторию, будем называть взаимно допустимыми и будем решать задачу только в этом классе. Совокупность величин x_1, x_2, μ, ν будем называть фазовым вектором и обозначать через z. Возможность скачков требует уточнения понятия «встреча».

Определение 1.1. Пусть (x_1, x_2, μ, ν) — начальная точка или левые пределы траектории при $t \to T - 0$ и пусть $v = \nu_1 (x_1, ..., \nu)\delta$ — импульсное управление убегающего. Если можно указать импульсное управление $u = \mu_1\delta$ и число $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, удовлетворяющие уравнениям

$$x_1 + \lambda\nu_1\gamma_1 = 0, \qquad x_2 + \lambda\nu_1\gamma_2 + \mu_1 = 0$$

то совокупность $(x_1, x_2, \mu, \nu, \nu_1)$, включающую кроме фазового вектора еще и импульс ν_1, будем называть встречей, а величину T — моментом встречи. Заметим, что встреча реализуется тогда и только тогда, когда замкнутый отрезок с началом (x_1, x_2) и компонентами $(\nu_1\gamma_1, \nu_1\gamma_2)$ имеет хотя бы одну общую точку с замкнутым отрезком $x_2 = 0$, $|x_1| \leqslant \mu$.

Введем новые переменные

$$\eta_1 = x_1 / \mu, \qquad \eta_2 = x_2 / \mu, \qquad \alpha = \nu / \mu$$
$$u_1 = u / \mu, \qquad v_1 = v / \mu$$

При конечных величинах u и v получим, как следствие (1.1) и (1.2), уравнения

$$\eta_1^{\cdot} = \eta_2 + \eta_1 | u_1 | + v_1\gamma_1, \qquad \eta_2^{\cdot} = -\eta_1 + \eta_2 | u_1 | + u_1 + v_1\gamma_2$$
$$\alpha^{\cdot} = -| v_1 | + \alpha | u_1 | \tag{1.4}$$

Уравнения (1.3) приобретут вид

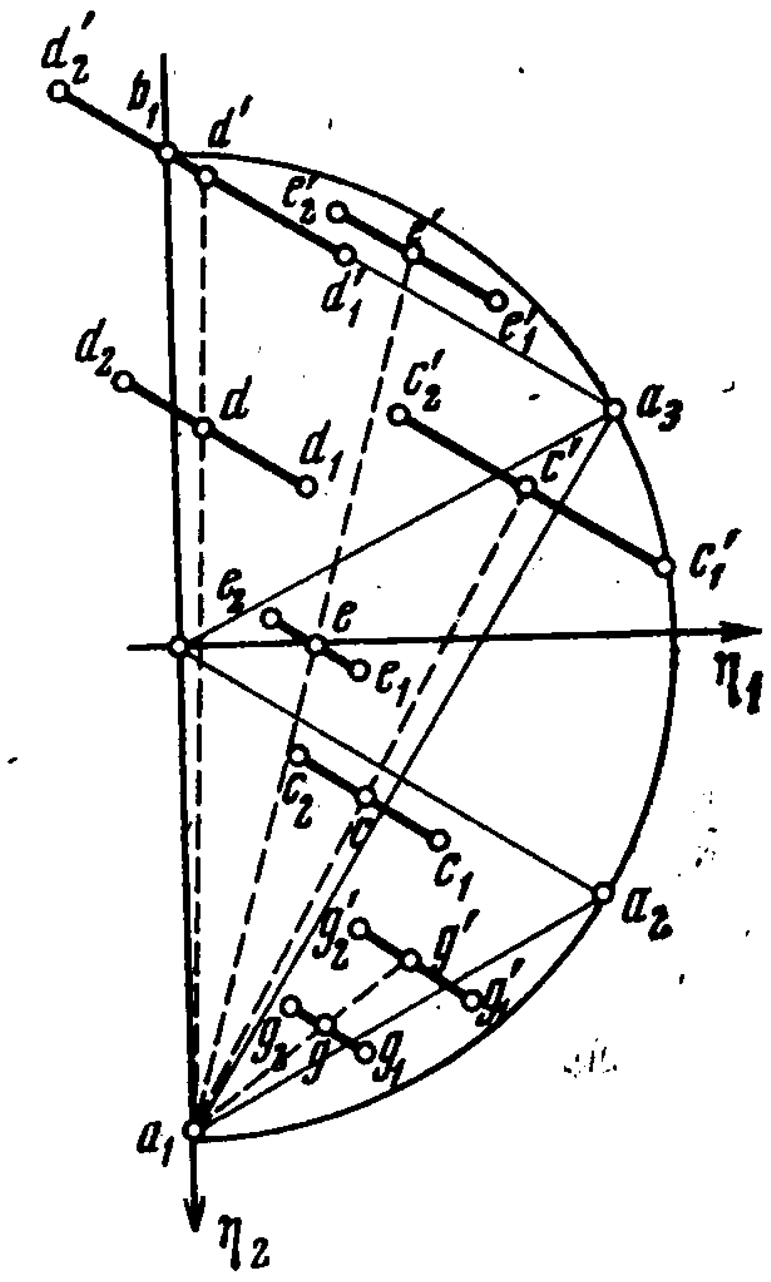
$$\eta_1' (\tau) = \lambda [\eta_1 + \nu_1\gamma_1 / \mu], \qquad \eta_2' (\tau) = \mp 1 \pm \lambda (1 \pm \nu_1\gamma_2 / \mu) \tag{1.5}$$
$$\alpha' (\tau) = \lambda [\alpha - | \nu_1 | / \mu], \qquad \lambda = \mu / (\mu - | \mu_1 |)$$

Здесь верхняя комбинация отвечает $\mu_1 > 0$, а нижняя $\mu_1 < 0$; величины η_1, η_2, α — левые пределы или начальная точка.

Будем решать задачу отыскания пары стратегий u°, v°, доставляющих седловую точку цене игры $T(u, v)$. Как это будет показано ниже, седловые стратегии существуют не всегда. В некоторых случаях можно указать лишь стратегию u° и последовательность стратегии $v^\circ(\varepsilon)$, при которых

$$\min_u \sup_v T = \sup_v \min_u T = \lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{v_\varepsilon} \min_u T = T^\circ$$

причем предельная функция $\lim v_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ приводит к встрече при $T_1 < T^\circ$. Если же существует v° такое, что при $v = v^\circ$ встреча не осуществляется при любом u, то это v° будем также называть оптимальным.



Фиг. 1

2. Направим ось η_2 вниз и рассмотрим единичную полуокружность (a_1, a_2, b_1) в плоскости $\eta_1\eta_2$. Изобразим несколько фазовых векторов (η_1, η_2, α) тройками точек (g_2, g, g_1), (c_2, c, c_1), (e_1, e, e_1) (на фиг. 1). Каждая из троек, например (g_2, g, g_1), отвечает точке $g (\eta_1, \eta_2)$ и стрелке (g_2, g_1) длины 2α, параллельной радиусу $(0, a_2)$, составляющему угол φ с осью η_1.

Из формул (1.5) видно, что импульсное управление $u = \mu_1\delta < 0$ преобразует вектор (g_2, g, g_1) в вектор (g_2', g', g_1') преобразованием подобия вдоль прямых (a_1, g_1), (a_1, g_2). Вследствие линейности задачи оптимальное управление меняет знак при изменении знаков η_1, η_2, а оптимальное время сохраняется, поэтому будем рассматривать только область $\eta_1 > 0$. φ зафиксируем пока острым.

В статье [2] решена задача при $\varphi = \pi / 2$; управление $u^\circ = -\mu_1{}^\circ\delta$. Угол в этой задаче импульсное и выбирается из уравнения

$$R' = \sqrt{\eta_1'^2 + \eta_2'^2} = 1 - \alpha'$$

где η_1', η_2', α' заменены правыми частями (1.6). Если же последнее уравнение выполнено при $\mu_1{}^\circ = 0$, то $u^\circ(v) < 0$ выбирается из условия $R_1^{\cdot} + \alpha^{\cdot} = 0$.

Управление v° может быть взято нулем или любой положительной величиной, пока концы стрелки g_2 и g_1 остаются внутри единичного полукруга. Если же один из них, например g_2, покинет полукруг, то управление $v^\circ = -\nu\delta < 0$ выводит точку за его пределы и встреча в дальнейшем невозможна. При реализации оптимального управления u° этого не происходит и встреча реализуется через оптимальное время $T^\circ = 2 \operatorname{arc\,tg} [\eta_1 / (1 - \eta_2 - \alpha)]$. Если же импульс μ_1 выбран меньшим, чем $\mu_1{}^\circ$, то до встречи точка g_2 покинет полукруг, и встреча не осуществится.

Начнем анализ общего случая и будем выбирать наименьшее возможное импульсное $u^\circ = \mu_1{}^\circ\delta < 0$, при котором ни одна из точек $g_1, g_2, c_1, c_2 \ldots$ не сможет покинуть полукруг при дальнейшей реализации $u = v = 0$. Пусть точка g_1 лежит правее прямой $(a_1 a_2)$ и выполнено неравенство $R + \alpha = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2} + \alpha > 1$, т. е. фазовый вектор находится в области $D_1{}^\circ$, определяемой неравенствами

$$D_1{}^\circ \left[\psi_1 = (\eta_1 + \alpha\gamma_1)\cos\theta - \sin\theta\,(1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2) > 0, \quad \theta = \varphi / 2 + \pi / 4, \quad R + \alpha > 1\right]$$

2.1. Если фазовый вектор лежит в области $D_1{}^\circ$ и управление $v^\circ = 0$, пока точка g_1 внутри полукруга и $v^\circ = \nu\delta > 0$, когда она покинет полукруг, то встреча невозможна при любом управлении u.

Доказательство. В области $D_1{}^\circ$ производная $(R + \alpha)^{\cdot}$ удовлетворяет оценке

$$(R + \alpha)^{\cdot} = (R + \alpha)\,|u_1| + (\eta_2 / R)\,u_1 \geqslant (R + \alpha - 1)\,|u_1| \geqslant 0$$

Это значит, что $R + \alpha$ не убывает, и в момент выхода точки g на радиус $(0, a_2)$ точка g_1 окажется за пределами полукруга. В этот момент или несколько ранее можно реализовать $v = \nu\delta > 0$ и точка g окажется за пределами полукруга, который является областью достижимости нуля [3] до выхода на радиус $(0, a_2)$. Доказательство закончено.

2.2. Согласно 2.1, в области $D_1\,[\psi_1 > 0,\ R + \alpha \leqslant 1]$, граничащей с областью $D_1{}^\circ$, по поверхности $R + \alpha = 1$, выберем управление $u^\bullet = \mu_1{}^\circ\delta < 0$ из условия $R' + \alpha' = 1$ под видом

$$\lambda_1{}^\circ = 2\,(1 - \eta_2 - \alpha) / [\eta_1^2 + (1 - \eta_2)^2 - \alpha^2] \qquad (2.1)$$
$$\lambda^\bullet = \mu / (\mu - |\,\mu_1{}^\circ\,|)$$

Если для вектора (η_1, η_2, α) в области D_1 реализовано импульсное управление $v = \nu_1\delta$ и точка

$$(\eta_1 + (\nu_1 / \mu)\gamma_1, \quad \eta_2 + (\nu_1 / \mu)\gamma_2, \ \alpha - |\nu_1| / \mu)$$

осталась в области D_1, то в формуле (2.1) надо подставить эти значения на место величин η_1, η_2, α. Это замечание справедливо и для всех последующих выражений λ_2°, $\lambda_3^\bullet$, λ_4°. Если $R + \alpha = 1$, то конечное управление u_1°, найденное из условия $(R + \alpha)^\cdot = 0$, реализуется согласно уравнению

$$u_1^\circ = (1 - \eta_2)^{-1} [v_1 (\eta_1\gamma_1 + \eta_2\gamma_2) - | v_1 | R] \tag{2.2}$$

2.3. В области

$$D_2 \begin{bmatrix} \psi_1 \leqslant 0, \psi_2 = (\eta_1 + \alpha\gamma_1)\gamma_1 - \gamma_2(1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2) > 0 \\ r^2 = (\eta_1 + \alpha\gamma_1)^2 + (\eta_2 + \alpha\gamma_2)^2 \leqslant 1 \end{bmatrix}$$

для вектора (c_2, c, c_1), отвечающего положению точки c_1 $(\eta_1 + \alpha\gamma_1, \eta_2 + \alpha\gamma_2)$ между прямыми (a_1a_3) и (a_1a_2) выберем управление $u^\bullet = \mu_1^\circ\delta$ из условия $(\eta_1' + \alpha'\gamma_1)^2 + (\eta_2' + \alpha'\gamma_2)^2 = 1$ попадания точки на дугу (a_2a_3). Величина $\lambda_2^\bullet$ будет иметь вид

$$\lambda_2^\circ = 2 (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2) / [(\eta_1 + \alpha\gamma_1)^2 + (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2)^2] \tag{2.3}$$

Если в этом случае $\lambda_2^\circ = 1$, то реализуется конечное управление $u_1^\circ < 0$, найденное из условия $(\lambda_2^\bullet)^\cdot = 0$ под видом

$$u_1^\circ = -(1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2)^{-1} [(\eta_1\gamma_2 - \eta_2\gamma_1)\alpha + (\eta_1\gamma_1 - \eta_2\gamma_2 - \alpha) \times \times (|v_1| - v_1)] \tag{2.4}$$

Геометрически очевидно, что точки e_1' e_2' не в состоянии покинуть полуокружность при реализации u_1° до тех пор, пока точка e (η_1, η_2, α) находится в области D_2.

2.4. В области D_3' $[\psi_2 \leqslant 0, \ \psi_3 = \eta_1 - \alpha\gamma_1 > 0]$ для вектора (e_2, e, e_1), отвечающего точке e_1, расположенной не левее прямой (a_1a_3), и точке e_2, расположенной правее прямой $\eta_2 = 0$, переход к вектору (e_2', e', e_1') может быть опасен возможностью выхода точки e_2' за полукруг вблизи точки b_1.

2.5. Если в области

$$D_3^\bullet \ [\psi_2 \leqslant 0, \quad \psi_3 > 0, \quad \rho^2 = \eta_1^2 + \eta_2^2 - \alpha^2 + 2\alpha\gamma_2 > 1]$$

положить $v^\circ = 0$, пока точка e_2' находится внутри полукруга, и $v^\bullet = -\nu_1\delta$, когда она выйдет за полукруг, то встреча невозможна при любом управлении u. Доказательство аналогично 2.1.

2.6. Согласно 2.5, в области D_3 $[\psi_2 \leqslant 0, \ \psi_3 > 0, \ \rho^2 \leqslant 1]$ выберем величину λ_3° из уравнения $\rho'^2 = \eta_1'^2 + \eta_2'^2 - \alpha'^2 + 2^1\alpha'\gamma_2 = 1$ под видом

$$\lambda_3^\circ = 2 (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2) / [\eta_1^2 + (1 - \eta_2)^2 - \alpha^2] \tag{2.5}$$

а при $\lambda_3^\bullet = 1$ конечное управление $u_1^\bullet$ найдется из условия $(\lambda_3^\circ)^\cdot = 0$ под видом

$$u_1^\circ = + [(\eta_1\gamma_1 + \eta_2\gamma_2)v_1 + (\alpha - \gamma_2) | v_1 |] / (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2) \tag{2.6}$$

2.7. В области

$$D_4\,[\psi_2 \leqslant 0,\ \psi_3 \leqslant 0,\ \psi_4 = \eta_1\gamma_2 - (1+\eta_2)\gamma_1 \leqslant 0]$$

для вектора (d_2, d, d_1) с точкой d_2, лежащей левее оси $\eta_1 = 0$, и точкой d_1 лежащей левее прямой (a_1, a_3), выберем скачок $\mu_1^\bullet < 0$ из условия попадания точки d' на прямую $(b_1 a_3)$ под видом

$$\lambda_4^\circ = 2\,(1 - \eta_2 - \eta_1 \operatorname{tg}\varphi) \,/\, (\eta_1^2 + (1 - \eta_2)^2 - \eta_1^2\gamma_2^2 \tag{2.7}$$

а при $\lambda_4^\circ = 1$ управление u_1° найдем из условия $(\lambda_4^\circ)^\cdot = 0$ под видом

$$u_1^\bullet = (\eta_2 \operatorname{tg}\varphi + \eta_1) \,/\, (1 - \eta_2 + \eta_1 \operatorname{tg}\varphi) \tag{2.8}$$

Начиная выбор управления $v^\bullet$, заметим, что здесь уже не удается привести эвристические соображения о минимизации μ_1°, помогавшие при выборе u°. Зафиксируем управление $v_1^\bullet$, не объясняя пока ничего. Оправдание этого выбора приведем позже.

2.8. Выберем малую величину $\varepsilon(\varphi) > 0$, исчезающую при $\varphi \to \pi / 2$, и в областях D_1 и D_2 правее прямой $w_1 = \eta_1 / (1 - \eta_2) = \varepsilon$ положим $v^\bullet = 0$.

2.9. В областях D_1 и D_2 на прямой $w_1 = \varepsilon$ выберем $v^\bullet > 0$ из условия $w_1^\cdot = 0$ под видом

$$v_1^\bullet = (\varepsilon\eta_1 - \eta_2) \,/\, (\gamma_1 + \varepsilon\gamma_2) \tag{2.9}$$

2.10. В областях D_3 и D_4 положим управление $v^\bullet = -\nu\delta > 0$ импульсным и реализующим весь ресурс.

2.11. В любой ситуации, выводящей точки $(\eta_1 \pm \alpha\gamma_1,\ \eta_2 \pm \alpha\gamma_2)$ за пределы полукруга, положим $v^\bullet = \pm\nu_1\delta$.

3. Предположим, что в начальный момент значение

$$w_1^\circ = \eta_1^\bullet \,/\, (1 - \eta_2^\circ) \geqslant \varepsilon(\varphi)$$

и вектор $(\eta_1^\bullet, \eta_2^\circ, \alpha^\bullet)$ лежат в областях D_1 или D_2. Тогда при реализации управлений $u^\bullet, v^\bullet$, выбранных согласно уравнениям (2.1), ..., (2.8) и 2.7,... ..., 2.10 реализуется некоторое движение, которое в дальнейшем будем именовать траекторией. Встреча при движении по траектории реализуется через время T_ε, состоящее, вообще говоря, из трех слагаемых: $T_\varepsilon = T_1 + T_2 + T_3$. Время $T_1 = 2 \operatorname{arc\,tg}\,[\eta_1 / (1 - \eta_2 - \alpha)] - \pi / 2 - \varphi$ отвечает движению из области D_1 до границы области D_2 по окружности $R' = \mathrm{const}$. Если движение начинается из области D_2, то $T_1 = 0$. Время T_2 отвечает движению точки в области D_2; $w_1 \geqslant \varepsilon$ из состояния $(\eta_1', \eta_2', \alpha')$, полученного реализацией $u^\circ = \mu_1^\circ\delta$, согласно уравнениям (2.1), в которых $u_1^\bullet$ взято согласно (2.2). Поскольку вдоль этого участка траектории справедливо уравнение $(\eta_1 + \alpha\gamma_1)^2 + (\eta_2 + \alpha\gamma_2)^2 = 1$, то можно взять из него величину α по формуле

$$\alpha = -\eta_1\gamma_1 - \eta_2\gamma_2 + \sqrt{1 - (\eta_1\gamma_2 - \eta_2\gamma_1)} \tag{3.1}$$

и интегрировать систему (1.1) при $v^\circ = 0$ до реализации равенства

$\psi_2(t_1) = 0$, т. е. границы с областями D_3 или D_4, если все время сохраняется неравенство $w_1(t) > \varepsilon$ при $0 < t \leqslant t_1$. В этом случае $T_2 = t_1 - T_1$. Если же равенство $w(t_2) = \varepsilon$ реализуется раньше равенства $\psi_1 = 0$, то в дальнейшем реализуется управление v° согласно (2.9) и точка (η_1, η_2) движется вдоль прямой $w_1 = \varepsilon$ до выхода в момент t_3 на плоскость $\psi_2 = 0$. В этом случае $T_2 = t_3 - T_1$. Величины $t_1 - T_1$ и $t_2 - T_1$ не удается вычислить явно вследствие нелинейности определяющих их уравнений. Время $t_3 - t_2$ движения по прямой $w_1 = \varepsilon$ можно получить интегрированием уравнения с разделенными переменными, но его явный вид не играет существенной роли.

Движение из областей D_3 и D_4 после реализации u°, v°, согласно (2.6), (2.8) и правилу 2.10, происходит по дуге (a_3b_1) за время $T_3 = 2 \operatorname{arc\,tg} [(\eta_1 + \alpha\gamma_1) / (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2)]$.

Применяя стандартным способом теоремы о дифференцируемости решения по начальным данным, можно убедиться, что для всех внутренних точек областей D_1, D_2, D_3, D_4, лежащих правее прямой $w_1 = \varepsilon$, функция T_3 непрерывна вместе со своими частными производными. В точках плоскости $\psi_2 = 0$, где происходит «склеивание» функций T_2 и T_3, частные производные разрывны, но существуют непрерывные в областях D_2, D_3, D_4 их пределы при приближении к этой плоскости из областей D_2, D_3, D_4. В остальных граничных точках областей D_1, ..., D_4 также существуют такие пределы. В дальнейшем не будем в обозначениях различать производные и их внутренние пределы. Действительно, в точках плоскости $\psi_2 = 0$ функция T_ε постоянна. Любое ее изменение сопровождается смещением из плоскости $\psi_2 = 0$, и при вычислении приращения можно пользоваться теми или другими пределами производных. Для остальных границ можно также привести весомую аргументацию возможности замены производных их пределами.

Напомним также, что на границе $R + \alpha = 1$ в области D_1 невозможно никакое существенно отрицательное управление $u < 0$, так как оно нарушит неравенство $R + \alpha \leqslant 1$ и, согласно 2.1 и 2.7, встреча не состоится.

Это же утверждение справедливо для границы $r^2 = 1$ области D_2 и границ $\rho^2 = 1$ области D_3 и $\psi_4 = 0$ области D_4.

Изучение производной $(T_\varepsilon)^\cdot$ начнем с областей D_3 и D_4, где $T_\varepsilon = T_3$. Производной придадим вид

$$(T_\varepsilon)^\cdot = (T_3)^\cdot = (1 + w_3^2)^{-1} (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2)^{-2} [\eta_2 (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2) - \\ - \eta_1 (\eta_1 + \alpha\gamma_1) + (u_1 + |u_1|) (\eta_1 + \alpha\gamma_1) + (v_1 - |v_1|) (\eta_1\gamma_2 - \eta_2\gamma_1 + \gamma_1)]$$

где

$$w_3 = (\eta_1 + \alpha\gamma_1) / (1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2)$$

Легко проверить, что w_3 сохраняется при любых $u < 0$, $v > 0$, импульсных или конечных. Слагаемые производной $(T_\varepsilon)^\cdot$, содержащие v_1, отрицательны при $v_1 < 0$, а слагаемые, содержащие $u_1 > 0$, положительны. Аналогично при $u = \mu_2\delta > 0$ и $v = \nu_2\delta < 0$ можно сделать вывод, что

$\Delta T_\varepsilon(\mu_2\delta > 0) > 0$, $\Delta T_\varepsilon(\nu_2\delta < 0) < 0$. При $u_1 < 0$ и $v_1 > 0$ производная $(T_\varepsilon)^\cdot$, казалось бы, не зависит от управлений. Это, однако, неверно для импульсных $u_1 = \mu_1\delta < 0$ и $v = \nu_1\delta > 0$, так как в этом случае изменяется не содержащая u и v часть производной $(T_\varepsilon)^\cdot$.

Обозначая через

$$w_1 = \eta_1 / (1 - \eta_2), \qquad w_2 = \alpha / (1 - \eta_2)$$

отношения, которые сохраняются при $u = \mu_1\delta < 0$, придадим производной вид

$$(T_\varepsilon)^\cdot = (1 + w_3^2)^{-1} [\eta_2 / (1 - \eta_2)(1 - w_2\gamma_2)^{-1} - w_1(w_1 + w_2\gamma_1) \times \times (1 - w_2\gamma_2)^{-2}]$$

Эта производная достигает минимума по $\mu_1 < 0$ при том его значении, который минимизирует величину η_2. Очевидно, что оно равно μ_1°, взятому согласно (2.5), поскольку, согласно (1.5), величина η_2' минимальна при максимальном λ. Выразим теперь $(T_\varepsilon)^\cdot$ через α и величины $s_1 = \eta_1 + \alpha\gamma_1$, $s_2 = 1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2$, которые сохраняются при $v = \nu_1\delta > 0$

$$(T_3)^\cdot = (1 - w_3^2)^{-1} [s_2 - s_1^2 - s_2^2 + \alpha(s_1\gamma_1 - s_2\gamma_2)] s_2^{-2}$$

Выражение $s_1\gamma_1 - s_2\gamma_2 = \psi_1 \leqslant 0$ в областях D_3, D_4, поэтому максимум $(T_3)^\cdot$ достигается при $\alpha = 0$, т. е. при $\nu_1 = \nu > 0$. В итоге можно сделать вывод, что справедливы соотношения

$$\min_{\mu_1<0}\max_{\nu_1>0}(T_3)^\cdot = \max_{\nu_1>0}\min_{\mu_1<0}(T_3)^\cdot = -1 = (T_3)^\cdot(\mu_1^\circ, \nu_1^\circ)$$

В итоге можно сделать окончательный вывод, что в областях D_3 и D_4 справедливы неравенства

$$T(u^\circ, v) \leqslant T_\varepsilon(u^\circ, v^\circ) \leqslant T(u, v^\circ) \tag{3.2}$$

т. е. $u^\circ v^\circ$ реализуют седловую точку игры.

В области D_2 функция $T_\varepsilon = T_2 + 2\varphi$, а в области D_1 функция $T_\varepsilon = T_2 + T_1 + 2\varphi$. Замечая, что $T_\varepsilon(w_1, w_2)$ зависит только от отношений w_1 и w_2, и обозначая частные производные по этим переменным через T^1 и T^2, запишем $(T_\varepsilon)^\cdot$ под видом

$$(T_\varepsilon)^\cdot = T^1\eta_2 / (1 - \eta_2) - T^1 w_1^2 - T^2 w_1 w_2 + P_1(u) + P_2(v)$$

$$P_1(u) = (1 - \eta_2)^{-2}(u_1 + |u_1|)(T^1\eta_1 + T^2\alpha) \tag{3.3}$$

$$P_2(v) = (1 - \eta_2)^{-2}[v_1 T^1(\eta_1\gamma_2 - \eta_2\gamma_1 + \gamma_1) + T^2(\alpha v_1\gamma_2 - - |v_1|(1 - \eta_2))]$$

Предположим, что $T^1 > 0$. Это предположение по непрерывности оправдано для малых α потому, что при $\alpha = 0$ $T_\varepsilon = 2\operatorname{arctg}[\eta_2 / (1 - \eta_2)$ и производная $T^1 = 1 - \eta_2 > 0$ положительна.

Если $T^1 > 0$, то $(T_\varepsilon)^\cdot$ достигает минимума по $\mu_1 < 0$ при минимальном η_2. Минимальное η_2 реализуется при $u^\circ = \mu_1^\circ\delta$, выбранном согласно (2.3).

Запишем этот факт под видом

$$T_\varepsilon(\mu_1^\circ))^\cdot = \min_{\mu_1<0}(T_\varepsilon)^\cdot$$

Введем новые переменные l_1 и l_2 по формулам

$$l_1 = \eta_1\gamma_1 + \eta_2\gamma_2, \qquad l_2 = -\eta_1\gamma_2 + \eta_2\gamma_1$$

и докажем вспомогательное предложение.

3.1. Если начальная точка $w_1^\circ > \varepsilon$, w_2° лежит в области D_2, либо в части области D_1, выделяемой неравенством

$$\begin{aligned} -\lambda_1^\circ(1-\eta_2) + \sqrt{\lambda_1^{\circ 2}\eta_1^2 + [1-\lambda_1^\circ(1-\eta_2)]^2} - \\ -\lambda_1^\circ\eta_1\gamma_1 - [1-\lambda_1^\circ(1-\eta_2)]\,\gamma_2 < 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

то при вариациях переменных, стесненных условиями $\delta l_2 = 0$, $\delta\alpha = -\delta l_1 > 0$ вариация времени δT положительна.

Доказательство. Если точка лежит в области D_2, то указанные вариации оставят ее в этой области и, кроме того, импульс μ_1° останется постоянным, так как он зависит только от l_2 и $l_1 + \alpha$, а эти величины сохраняются. Кроме того, можно убедиться непосредственным вычислением, что вариации $\delta l_2'$, $\delta l_1'$, $\delta\alpha$, полученные после импульса μ_1°, также удовлетворяют условиям $\delta l_2' = 0$, $-\delta\alpha' = \delta l_1' < 0$. Штрихи в обозначениях в дальнейшем опустим, а под вариациями величин будем понимать их полные вариации, а не их линейные приближения. Вычисляя вариацию δu_1° по формуле (2.4) при $v^\circ = 0$; получим

$$\delta u_1^\circ = l_2'\delta\alpha\,/\,(1-\eta_2' - \alpha'\gamma_2) \leqslant 0 \tag{3.5}$$

так как $l_2' \leqslant 0$ в области D_2. Опуская в дальнейшем штрихи при обозначениях переменных, вычислим вариацию $\delta l_2^\cdot$

$$\begin{aligned} \delta l_2^\cdot = -\delta l_1 + l_2\delta\,|\,u_1^\circ\,| + \gamma_1\delta u_1^\circ = \delta\alpha\,(l_1+\alpha)\,(l_1+\alpha-\gamma_2)\times \\ \times(1-\eta_2-\alpha\gamma_2)^{-1} > 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Неравенство (3.6) справедливо потому, что все множители при $\delta\alpha > 0$ положительны в области D_2. Вариация выражения

$$\delta\,(d\alpha \quad 0 \quad / \, dl_2) = \delta\,[\alpha\,|\,u_1^\circ\,|\,/\,(-l_1 + l_2\,|\,u_1^\circ\,| + u_1^\circ\gamma_1)] < 0 \tag{3.7}$$

удовлетворяет неравенству (3.7) потому, что положительный числитель и отрицательный знаменатель увеличиваются согласно (3.5) и (3.6). Это значит, что вдоль траектории функция $\alpha\ (l_2, l_{20}, \alpha_0)$ монотонно возрастает по α_0 при любых l_2, l_{20} до тех пор, пока не реализуется равенство $w_1 = \varepsilon$, Следовательно, если равенство $w_1 = \varepsilon$ не достигается на исходной траектории, то неравенство (3.6) будет справедливо во всех ее точках, и поэтому прямая $l_2 = -\cos\varphi$ (это прямая (b_1a_3)) — граница области D_3 или D_4 — будет достигнута на исходной траектории раньше, чем на варьированной Если же значение $w_1 = \varepsilon$ достигнуто на исходной траектории в точке l_2°, то это значение l_2° будет достигнуто раньше, чем на варьированной траектории, и изображающаяся точка исходной траектории, двигаясь в дальнейшем по прямой $w_1 = \varepsilon$, достигнет границы областей D_3 или D_4 раньше, чем точка исходной траектории. Итак, $\delta T_2 > 0$ в области D_2. Если переменные лежат в области D_1, то, вычисляя непосредственно вариацию δT_1, можно убедиться, что она положительна. Вариация $\delta\alpha' = \delta\alpha\lambda_1^\circ + \alpha\delta\lambda_1^\circ + \delta\alpha\delta\lambda_1^\circ$ также окажется положительной при условии (3.4). Поскольку величина α' сохраняется на траектории, то в момент $T_1 + \delta T_1$ на границе области D_2 реализуются условия

$$\delta l_2 (T_1 + \delta T_1) = 0, \qquad \delta\alpha (T_1 + \delta T_1) = -\delta l_1 (T_1 + \delta T_1) > 0$$

Следовательно, согласно доказанному выше $\delta T_1 > 0$ и вариация $\delta T_\varepsilon = \delta T_1 + \delta T_2 > 0$ положительна. Завершая доказательство, заметим, что неравенство (3.4) после реализации $u = \mu_1^\circ\delta$, взятого согласно (2.2), примет вид $\eta_2' - 1 + \sqrt{\eta_1'^2 + \eta_2'^2} - l_1' < 0$. Поскольку величина $\eta_1'^2 + \eta_2'^2$ сохраняется вдоль траектории, а величины η_2' и $-l_1$ уменьшаются, то неравенство (3.4) не нарушится вдоль траектории. Доказательство закончено.

Выписывая вариацию δT_ε, получим согласно 3.1 неравенство

$$\delta T_\varepsilon = -\delta\alpha (1 - \eta_2)^{-2} [T^1 (\eta_1\gamma_2 - \eta_2\gamma_1 + \gamma_1) + T^2 (\eta_2 + \alpha\gamma_2 - 1)] + O(\delta\alpha) > 0 \tag{3.8}$$

3.2. Справедливы три оценки

$$P_2 (v) \leqslant 0 \tag{3.9}$$

$$T_2 > 0 \tag{3.10}$$

$$P_1 (u > 0) > 0 \tag{3.11}$$

Доказательство. Оценка (3.9) вытекает из (3.8); оценка (3.10) из (3.9), $T^1 > 0$ и оценок

$$\eta_1\gamma_1 + \gamma_2 (1 - \eta_2) > 0, \qquad 1 - \eta_2 - \alpha\gamma_1 > 0$$

которые справедливы в области D_1. Оценка (3.11) следует из (3.8), $T^1 > 0$, (3.10). Если $v < 0$, то оценка (3.9) делается строгой $P_2 (v < 0) < 0$ неравенством. Это следует из (3.8), $T_1 > 0$ и (3.10).

3.3. Обозначим через T° величину $T^\circ = \lim T_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$. Эта функция удовлетворяет оценкам (3.2), ..., (3.11). Доказательств интуитивно ясного положения не будем приводить.

Введем в рассмотрение область $D_5 [\partial T^\circ / dw_1 = T^{\circ 1} > 0]$, которая образуется непрерывным изменением α из области $D_5^\circ [T^{\circ 1} (\alpha = 0) > 0]$, область $D_4 [w_1 \geqslant \varepsilon]$ и $D_6 = D_4 \cup D_5$ и сформулируем теорему.

Теорема. Если $z \in D_6$, то справедливы оценки

$$T_\varepsilon (u^\circ, v^\circ) \leqslant T (u, v^\circ) \tag{3.12}$$

$$T (u^\circ, v) < T^\circ \quad (3.13); \quad T_\varepsilon (u^\circ, v^\circ) \geqslant T_\varepsilon (u^\circ, v^*) \tag{3.13}$$

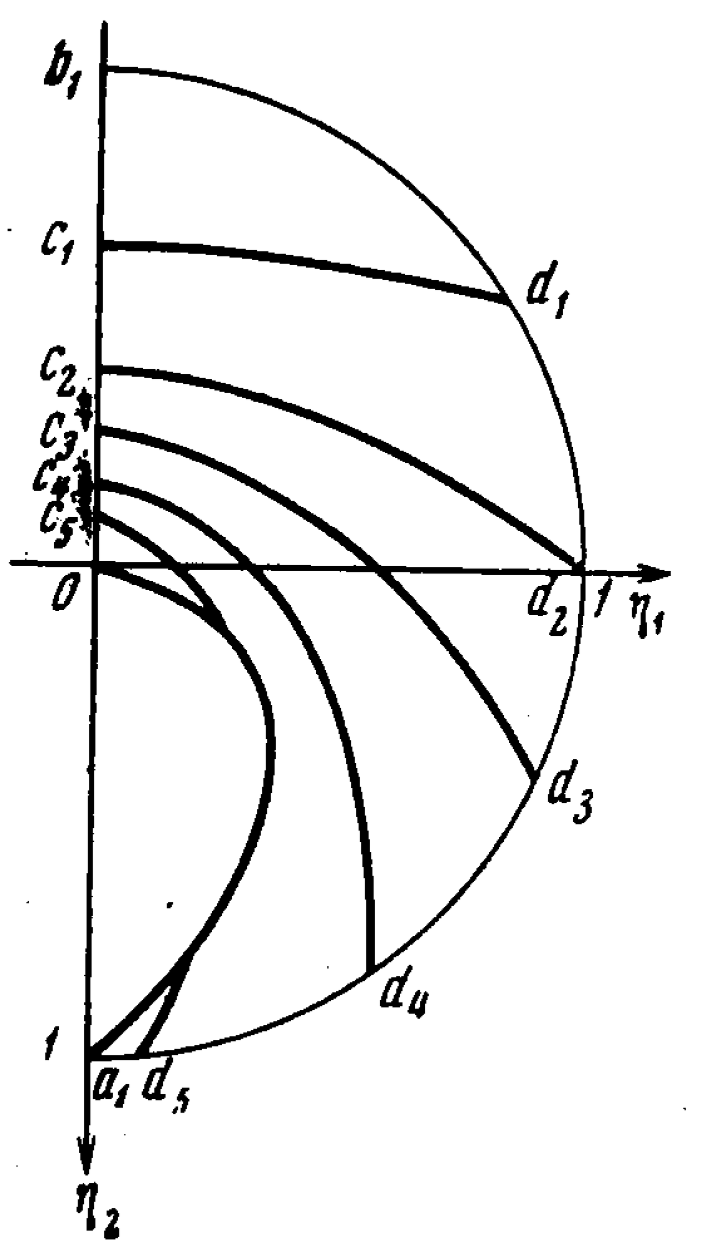
где v^* — управление, которое совместно с u° оставляет точку в области D_1.

Доказательство. Все утверждения теоремы являются прямыми следствиями предыдущих положений 3.1, 3.2, 3.3 и интегрирования соответствующих минимаксных и максиминных дифференциальных неравенств. Не будем их приводить. Для управлений $v = \nu_2\delta$ или $u = \mu_2\delta$ типа δ функций можно воспользоваться дифференциальными неравенствами и теоремой о среднем, в результате получим, что $\Delta T\ (\nu_2/\mu_1^\circ) < 0$ и $\Delta T\ (\nu_2^\circ,\ \mu_2) > 0$. Доказательство закончено.

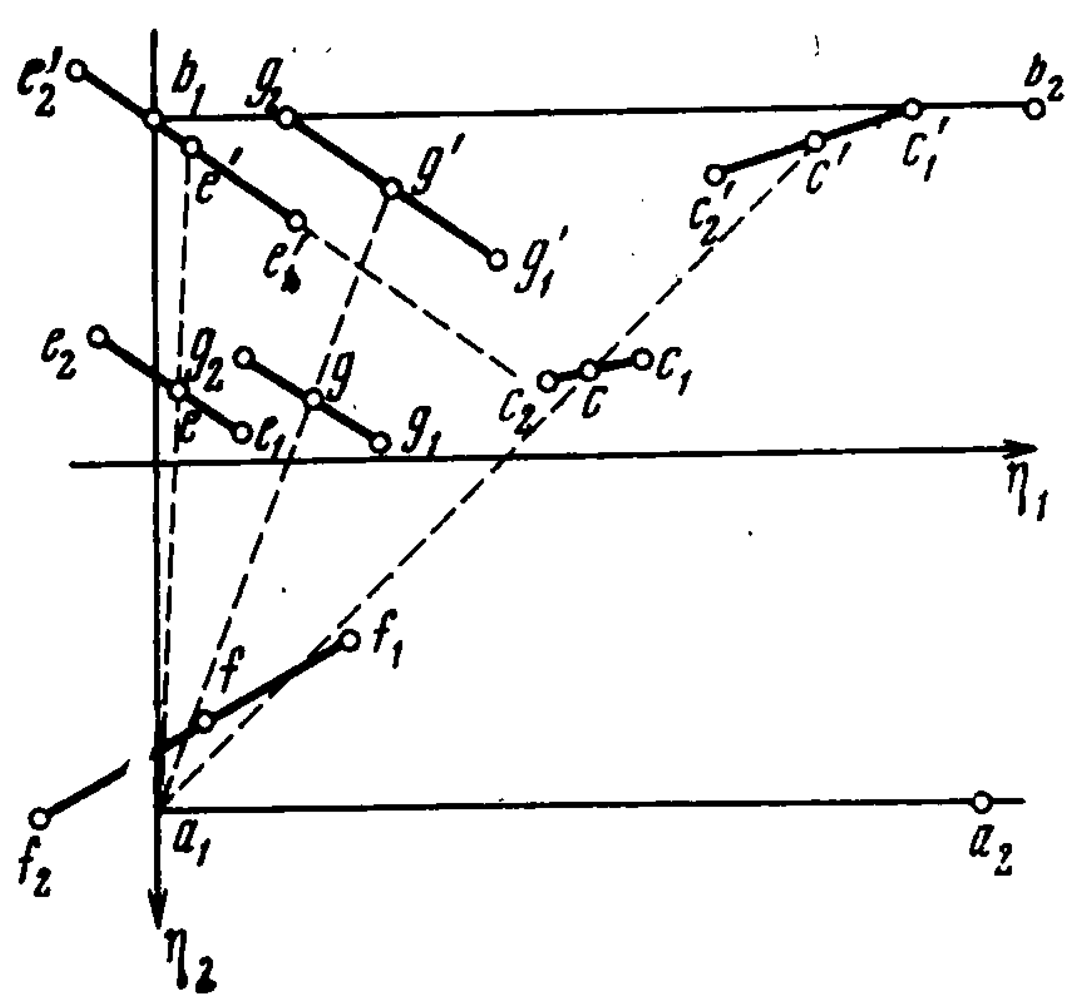
Некоторую неудовлетворенность оставляет необходимость проверки неравенства $T^{\circ 1} > 0$, которое не удается проверить явно, а только указать грубое достаточное условие (3.4), которое гарантирует оценку $T^{\circ 1} > 0$.

Результаты вычислений на ЭВМ при $\varphi = 0$ приведены на фиг. 2. Величина $T^{\circ 1}$ на поверхности $R + \alpha = 1$ исчезает впервые на кривой $(a_1,\ 0)$. Кроме того, линии $(c_1,\ d_1)$, $(c_2,\ d_2)$ показывают, что управление v° является оптимальным, а $T^{\circ 1} > 0$ даже в области, где нарушено неравенство (3.4).

До сих пор предполагалось, что угол φ — острый. Если он не острый, а тупой или прямой, то область D_3 исчезает, правый конец g_1 стрелки $(g_1,\ g,\ g_2)$ становится левым. Поэтому достаточно во всех формулах $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ заменить на $-\sin\varphi$, $-\cos\varphi$, а в остальном изменений не будет. Анализ первой задачи закончен.



Фиг. 2



Фиг. 3

4. Приведем без подробных доказательств результаты анализа второго примера, в котором уравнения движения имеют вид

$$\eta_1^{\cdot} = \eta_2 + \eta_1\ |\ u_1\ | + v_1\gamma_1, \qquad \eta_2^{\cdot} = \eta_2\ |\ u_1\ | + u_1 + v_1\gamma_2$$

с такими же, как и в п. 1 ограничениями на управления. Рассмотрение опять идет в области $\eta_1 \geqslant 0$. На фиг. 3 изображен ряд возможных векторов $(g_1,\ g,\ g_2)$, $(c_1,\ c,\ c_2)$ и т. д.

Ясно, что если конец стрелки g_1 или g_2 попадет на открытую полупрямую $(a_1,\ a_2]$ либо пересечет открытую полупрямую $(b_1,\ b_2]$, то импульс $v = \pm\nu\delta$, направленный соответствующим образом, выведет точку за пределы области достижимости нуля [3], и преследование не закончить. Сомнительным остается вектор $(f_1,\ f, f_2)$, для которого импульс $v^\circ = -\nu\delta$, направленный в точку f_2, пересекает отрезок $\eta_1 = 0$, $|\ \eta_2\ | \leqslant 1$ и приводит, согласно определению 1.1, к встрече. В этом случае можно все же показать, что при любом управлении «u» и $v = 0$ один из концов f_1 или f_2 выйдет до встречи за полупрямые $(a_1, a_2]$; $(b_1, b_2]$. Поэтому можно утверждать, что:

4.1. Если v° положить нулем, пока замкнутые отрезки с началом η_1, η_2 и компонентами $\pm\alpha\gamma_1$, $\pm\alpha\gamma_2$ не пересекают полупрямую $(b_1, b_2]$ и не имеют общих точек с полупрямой $(a_1, a_2]$ и положить $v = \pm\nu\delta$, когда одно из этих условий нарушится, то при остром угле φ преследование нельзя закончить, если эти условия нарушены в начальный момент. При тупом угле φ преследование нельзя закончить, если эти условия нарушены в начальный момент, либо, если в начальный момент выполнено неравенство $l_2 + \alpha\gamma_2 \geqslant 1$.

Не аргументируя подробно, приведем формулы для оптимальных управлений и оптимального времени. Будем считать, что все неравенства, нарушающие условия, принятые в 4.1, выполнены и не будем их записывать.

4.2. Угол φ острый. В области D_1 $[\psi_1 = \eta_1 - \alpha\gamma_2 \geqslant 0]$ управлени $u^\circ = \mu_1{}^\circ\delta$ имеет вид

$$\lambda_1{}^\circ = 2 / (1 - \eta_2 + \alpha \sin \varphi), \qquad \lambda_1{}^\circ = \mu / (\mu - |\mu_1{}^\circ|) \tag{4.1}$$

Если $\lambda_1{}^\circ = 1$, то $u_1{}^\circ$, взятое из условия $(\lambda_1{}^\circ) = 0$, имеет вид

$$u_1{}^\circ = -({}^1/_2)(v_1 + |v_1|)\gamma_2 \qquad (4.2$$

В области D_2 $(\psi_1 < 0)$ имеют место равенства

$$\lambda_2{}^\circ = 2 / (1 - \eta_2 + \eta_1 \operatorname{tg} \varphi), \qquad u_1{}^\circ = \eta_2 \operatorname{tg} \varphi / (1 - \eta_2)$$

Управление $v^\circ = \nu\delta$ везде.

Описанные управления отвечают седловой точке игры, а оптимальное время имеет вид

$$T^\circ(u^\circ, v^\circ) = 2(\eta_1 + \alpha \cos \varphi) / (1 - \eta_2 - \alpha \sin \varphi)$$

4.3. Угол φ тупой. Управление u° дается формулами (4.1) и (4.2). Управление $v^\circ = 0$ при $w_1 > \varepsilon$, а при $w_1 = \varepsilon$ находится из условия $w_1{}^\circ = 0$ под видом $v^\circ = \eta_2 / (\gamma_1 - \varepsilon\gamma_2)$. Имеет место теорема, аналогичная теореме из п. 3, и предельное значение $T^\circ = \lim T_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ дается формулой

$$T^\circ = \eta_1 / (1 - \eta_2\gamma_1) + \operatorname{ctg} \varphi \ln [(1 - \eta_2 - \alpha\gamma_2) / (1 - \eta_2 + \alpha\gamma_2)]$$

Поскольку производная $T^{\circ 1}$ положительна и ограничения на начальные значения типа (3.4) в данном случае не существенны, то теорема, аналогичная теореме из п. 3, может быть сформулирована без трудно проверяемых условий принадлежности точки к области, аналогичной области D_6.

Поступила 16 VI 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
2. Пожарицкий Г. К. Импульсные преследования в случае линейных однотипных объектов второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 5.
3. Мархашов Л. М., Плотникова Г. В., Пожарицкий Г. К. Импульсные быстродействия в линейных системах второго порядка. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.